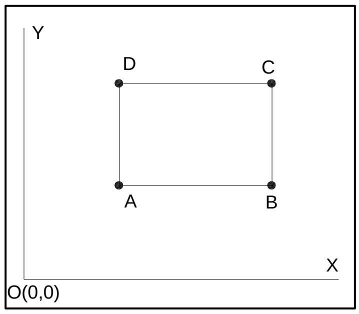
ΠΜΣ: «ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΔΙΑΔΡΑΣΤΙΚΩΝ & ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ»
Α' Εξάμηνο: 'Εισαγωγή στη Σχεδίαση με Η/Υ (CAD)'
Ακαδημαϊκό Έτος 2010-2011
Διδάσκοντες: Φ. Αζαριάδης, Σ. Κυρατζή

Γραπτή Εξέταση: Φεβρουάριος 2011

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ - BEZIER (Σ. ΚΥΡΑΤΖΗ)

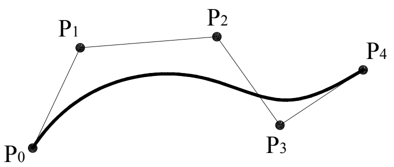
ΘΕΜΑ 1. (3/10)

[1α] Δίνεται το σχήμα Σ της διπλανής εικόνας και ο πίνακας μετασχηματισμού $M_1 = T(\vec{d})S(s_1,s_2)R(\theta)T(-\vec{d})$, που εφαρμόζεται σε αυτό, με $\vec{d} = \overrightarrow{OA}$. Το νέο σχήμα είναι $\Sigma' = \mathrm{M}_1\Sigma$. **(i)** Ποια ενέργεια περιγράφει ο μετασχηματισμός M_1; **(ii)** Ποια είναι τα επιμέρους βήματα που παράγουν τον πίνακα M_1; **(iii)** Αν εφαρμοστεί στο Σ ο μετασχηματισμός $M_2 = T(\vec{d})R(\theta)S(s_1,s_2)T(-\vec{d})$, με $\vec{d} = \overrightarrow{OA}$, το σχήμα $\Sigma'' = \mathrm{M}_2\Sigma$ θα είναι το ίδιο με το σχήμα Σ'; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

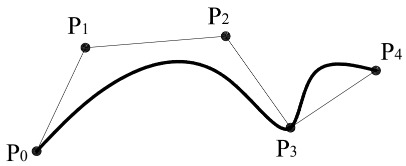


[1β] Έστω καμπύλη Bezier $P^4(t)$, με σημεία ελέγχου τα σημεία $\boldsymbol{P}_\mathbf{i}$, με i=0,...4.

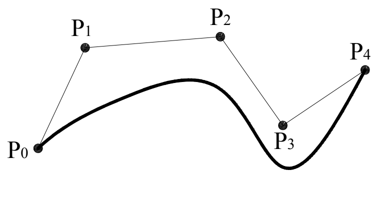
(i) Ποιο από τα παρακάτω σχήματα αναπαριστά την μορφή της καμπύλης $P^4(t)$. Εξηγείστε γιατί τα άλλα δύο σχήματα είναι λάθος.



(α)



(β)



(γ)

(ii) Εφαρμόζεται στην καμπύλη $P^4(t)$ ο μετασχηματισμός της «συμμετρίας γύρω από ευθεία L». Το αποτέλεσμα θα είναι καμπύλη Bezier; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

(iii) Αν μετακινηθεί το σημείο ελέγχου P_1, πως θα επηρεαστεί η καμπύλη;

(iv) Πότε η καμπύλη $P^4(t)$ θα είναι ευθύγραμμο τμήμα;

ΘΕΜΑ 2. (2/10) Δίνεται καμπύλη Bezier $P^3(t)$, με σημεία ελέγχου $P_0(0,0)$, $P_1(0,4)$, $P_2(4,7)$ και $P_3(12,9)$, η οποία ορίζεται στο παραμετρικό διάστημα [0,1] και καμπύλη Bezier $Q^3(t)$, με σημεία ελέγχου $Q_0(10,7)$, $Q_1(12,9)$, $Q_2(18,5)$ και $Q_3(20,1)$, η οποία ορίζεται στο παραμετρικό διάστημα [1,2].

(**2α**) Με τι είδους παραμετρική συνέχεια ενώνονται οι καμπύλες $P^3(t)$ και $Q^3(t)$; Δικαιολογήστε την απάντηση σας;

(**2β**) Πόσα και ποια σημεία ελέγχου της καμπύλης $Q^3(t)$ πρέπει να αλλάξουν, ώστε οι καμπύλες $P^3(t)$ και $Q^3(t)$ να ενώνονται μεταξύ τους με παραμετρική συνέχεια C^2; Ποια είναι η νέα θέση των σημείων αυτών;

<u>ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ (Φ. ΑΖΑΡΙΑΔΗΣ)</u>

ΘΕΜΑ 3. (2.5/10) Δίνεται στο επίπεδο XY καμπύλη K με αναλυτική εξίσωση $y = x^3$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της κατά τμήματα παρεμβολής Hermite προσεγγίστε το τμήμα της καμπύλης που ορίζεται για $x \in [-2, 2]$ από καμπύλη K* λαμβάνοντας δειγματοληπτικά πέντε σημεία στην K για $x = -2, -1, 0, 1, 2$. Να χρησιμοποιηθεί ομοιόμορφη παραμετροποίηση με .. και $t_0 = 0$ και η μέθοδος FMILL με κανονικοποιημένα εφαπτόμενα διανύσματα. Επίσης δίνεται ότι $\mathbf{m}_0 = (-0.242, -0.970)$ και $\mathbf{m}_4 = (0.242, 0.970)$.

ΘΕΜΑ 4. (2.5/10) Έστω καμπύλη B-Splines που ορίζεται στο κομβικό διάνυσμα $U = \{0, 0, 0, 5, 6, 6, 7, 7, 7\}$. (α) Ποιος είναι ο βαθμός της καμπύλης; (β) Πόσα σημεία ελέγχου έχει η καμπύλη; (γ) Ποιος είναι ο βαθμός της παραμετρικής συνέχειας της καμπύλης; (δ) Να υπολογιστεί η συνάρτηση B-Splines $N_2^2(t)$.

Καλή Επιτυχία

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_y w_z - v_z w_y)\vec{i} + (v_z w_x - v_x w_z)\vec{j} + (v_x w_y - v_y w_x)\vec{k}$$

$$T(m,n)=\begin{bmatrix}1 & 0 & m\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ S(s_x,s_y)=\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0\\ 0 & s_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ R_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P(u)=\frac{b-u}{b-a}P_0+\frac{u-a}{b-a}P_1,\ \ u\in[a,b]$$

$$\mathbf{P}^n(t)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}\mathbf{P}_i=\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\mathbf{P}_i,\ t\in[0,1] \text{ και } \binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$\frac{d}{du}P^n(a)=\frac{n}{(b-a)}(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0),\ \frac{d}{du}P^n(b)=\frac{n}{(b-a)}(\mathbf{P}_n-\mathbf{P}_{n-1}),\ u\in[a,b]$$

$$\frac{d^2}{du^2}P^n(a)=\frac{n(n-1)}{(b-a)^2}(\mathbf{P}_2-2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_0),\ \frac{d^2}{du^2}P^n(b)=\frac{n(n-1)}{(b-a)^2}(\mathbf{P}_n-2\mathbf{P}_{n-1}+\mathbf{P}_{n-2}),\ u\in[a,b]$$

$$\frac{dP^n(t)}{dt}=n\sum_{i=0}^{n-1}B_i^{n-1}(t)[\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_i],\ t\in[0,1]$$

$$\left.\begin{aligned}H_0^3(t)&=2t^3-3t^2+1\\ H_1^3(t)&=t^3-2t^2+t\\ H_2^3(t)&=t^3-t^2\\ H_3^3(t)&=-2t^3+3t^2\end{aligned}\right\}t\in[0,1]\qquad \left.\begin{aligned}\hat{H}_0^3(u)&=H_0^3(t)\\ \hat{H}_1^3(u)&=(b-a)H_1^3(t)\\ \hat{H}_2^3(u)&=(b-a)H_2^3(t)\\ \hat{H}_3^3(u)&=H_3^3(t)\end{aligned}\right\}u\in[a,b],t\in[0,1],t=\frac{u-a}{b-a}$$

$$\mathbf{P}(t)=H_0^3(t)\mathbf{P}_0+H_1^3(t)\mathbf{m}_0+H_2^3(t)\mathbf{m}_1+H_3^3(t)\mathbf{P}_1,\ \ t\in[0,1]$$

$$\mathbf{P}_i(u)=\hat{H}_0^3(u)\mathbf{P}_i+\hat{H}_1^3(u)\mathbf{m}_i+\hat{H}_2^3(u)\mathbf{m}_{i+1}+\hat{H}_3^3(u)\mathbf{P}_{i+1},\ \ u\in[t_i,t_{i+1}]$$

$$\mathbf{m}_i=\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_{i-1}$$

$$\mathbf{P}^k(t)=\sum_{i=0}^{n}N_i^k(t)\mathbf{P}_i,\ t\in[a,b]$$

$$N_i^0(t)=\begin{cases}1, & t\in[t_i,t_{i+1})\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

$$N_i^r(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+r}-t_i}N_i^{r-1}(t)+\frac{t_{i+r+1}-t}{t_{i+r+1}-t_{i+1}}N_{i+1}^{r-1}(t),\quad \begin{aligned}&r=1,2,\ldots,k\\ &i=0,1,\ldots,n+k-r\end{aligned}$$