

Φυλλάδιο 4

Σύρος 2011-2012

Άσκηση 1: Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i)

$$y' + 2y = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0.$$

(ii)

$$y'' - 3y' + 2y = \begin{cases} e^{x-1}, & x \in [0, 1), \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Υπόδειξη: Να λύσετε τη δ.ε. κατά κλάδους και στη συνέχεια να απαιτήσετε η δίκλαδη λύση να είναι συνεχής για την δ.ε. 1ης τάξης, ενώ να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για τη δ.ε. 2ης τάξης.

Άσκηση 2: Να επιλυθούν τα παρακάτω Π.Α.Τ.:

$$(i) \begin{cases} x^2 y'' - 2y = \sin(\ln x), & x > 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x^2 y'' + 5xy' + 3y = e^{-3x}, & x > 0 \\ y(1) = -1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 3: Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $t = x^2$, να επιλυθεί η γραμμική Δ.Ε.

$$xy'' - y' + x^3y = 0, \quad x > 0.$$

Άσκηση 4: Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $t = \sin x$, να επιλυθεί η γραμμική Δ.Ε.

$$y'' + y' \tan x - y \cos^2 x = \cos^2 x \sin x e^{\sin x}.$$

Άσκηση 5: Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $t = \operatorname{Arctan} x$, να επιλυθεί η γραμμική Δ.Ε.

$$y'' + \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{1}{(1+x^2)^2}y = 0.$$

Άσκηση 6: Να επιλυθεί η γραμμική Δ.Ε.

$$x^2 y'' + 4xy' + (2+x^2)y = x^2, \quad x > 0$$

με τη βοήθεια της αντικατάστασης $z = x^2 y$.

Άσκηση 7: Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y = ze^{x^2}$, να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 1)y = e^{x^2}.$$