

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων και Συστημάτων
Εξέταση στο Μάθημα “Διακριτά Μαθηματικά”

Σύρος, 03/02/2012

Ομάδα Β

Θέμα 1 Έστω A, B, C τυχαία υποσύνολα ενός βασικού συνόλου Ω . Να δείξετε ότι :

1. εάν $A \cap C = B \cap C$ και $A \cap C^c = B \cap C^c$, τότε $A = B$. (1 μ.)

2. εάν $A \oplus C = B \oplus C$ τότε $A = B$.

(Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε το ερώτημα 1.) (1.5 μ.)

Θέμα 2

1. Δίνεται η ακολουθία a_0, a_1, a_2, \dots , που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$a_0 = 0, a_1 = 3, \quad a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}, \quad \text{για κάθε } n \geq 2.$$

Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 5^n - 2^n.$$

(Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε ισχυρή μαθηματική επαγωγή.) (1.5 μ.)

2. Πόσοι ακέραιοι από το σύνολο $\{1, \dots, 500\}$ διαιρούνται με το 3 ή το 5 ; (1 μ.)

Θέμα 3

(i) Να βρεθεί κατά πόσους τρόπους μπορούν να τακτοποιηθούν 9 άτομα: (a) σε σειρά με 9 καθίσματα, (b) γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι. (1 μ.)

(ii) Ένας σύλλογος έχει στο Δ.Σ. 6 άνδρες μέλη και 8 γυναίκες μέλη. (a) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια εξαμελής επιτροπή που να περιέχει 2 άνδρες και 4 γυναίκες; (b) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια εξαμελής επιτροπή που να περιέχει τουλάχιστον έναν άνδρα; (1.5 μ.)

(Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.)

Θέμα 4

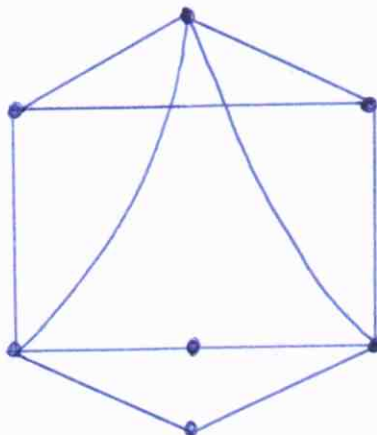
1. Να δείξετε ότι η σχέση R στο \mathbb{R} , $xRy \Leftrightarrow xe^y = ye^x$ είναι σχέση ισοδυναμίας. (1 μ.)

2. Για το διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ με $A = \{1, 2, 3\}$ να κατασκευάσετε ένα διάγραμμα Hasse, να εντοπίσετε τα maximal και τα minimal στοιχεία, να εξετάσετε εάν είναι δικτυωτό και να επαληθεύσετε το θεώρημα του Dilworth (με “ \subseteq ” συμβολίζουμε τη διάταξη του υποσυνόλου).

(1.5 μ.)

Θέμα 5

- (i) Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό $n \geq 1$ το πλήρες γράφημα με n κορυφές Π_n έχει στο πλήθος $\frac{n(n-1)}{2}$ ακμές και να σχεδιάσετε το Π_5 . (1.5 μ.)
- (ii) Για το παρακάτω γράφημα να εξετάσετε εάν έχει μονοπάτι ή κύκλωμα Hamilton (Euler) και εάν ναι, να το εντοπίσετε (να αιτιολογήσετε την απάντησή σας) (1 μ.)



Να επιλέξετε 4 από τα 5 θέματα

Διάρκεια Εξέτασης 2.5 ώρες - Καλή Επιτυχία!