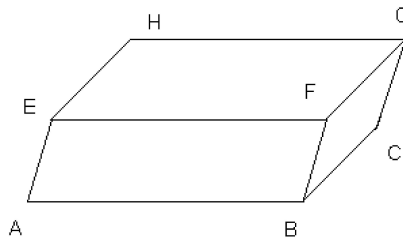


ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3  
ΣΥΡΟΣ - 2012

1. Να ευρεθεί ο όγκος του παραλληλεπιπέδου  $ABCDEFGH$  αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των σημείων  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(0, -2, 1)$ ,  $D(2, 4, 6)$  και  $F(0, 0, 2)$ . Βρείτε επίσης τις συντεταγμένες του σημείου τομής των διαγωνίων, καθώς και το ύψος του ως προς τη βάση  $ABCD$ . Ποια γωνία σχηματίζει η διαγώνιος  $AG$  με την  $AB$ ;



2. Δίνονται τα σημεία  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(1, -1, 2)$  και το διάνυσμα  $\vec{a} = (1, 2, 3)$ . Βρείτε το σημείο τομής της ευθείας που περνά από το  $A$  και είναι παράλληλη στο  $\vec{a}$  και του επιπέδου που περνά από το  $B$  και είναι κάθετο στο  $\vec{a}$ .
3. Γράψτε μια διανυσματική εξίσωση για το επίπεδο  $x - 5y + 13z = 9$ .
4. Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που περνά από τα σημεία  $A(1, 1, -1)$  και  $B(-2, 1, 3)$ .
5. Να ευρεθεί η απόσταση της αρχής από την ευθεία

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+3}{-5}. \quad (1)$$

(Αν  $A$  είναι η προβολή της αρχής  $O$  στην ευθεία, τότε το  $A(x, y, z)$  ανήκει στην ευθεία και επί πλέον το  $\vec{OA}$  είναι κάθετο στο διάνυσμα  $(3, 4, -5)$ ).

6. Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας των επιπέδων  $2x + y - z = 5$  και  $x - 3y + 3z = 0$  (από τη γεωμετρία, η γωνία δύο επιπέδων είναι η γωνία που σχηματίζουν δύο διανύσματα που το καθένα είναι κάθετο στο αντίστοιχο επίπεδο).
7. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνά από τα σημεία  $A(1, -1, 2)$ ,  $B(0, 1, 1)$  και  $\Gamma(2, 1, 3)$ .
8. **(ΘΕΩΡΙΑ)**. Δίνεται ένα επίπεδο με εξίσωση

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{v} = 0$$

και ένα σημείο  $A$ . Αν  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}$ , ναδειχθεί ότι η απόσταση  $d$  του  $A$  από το επίπεδο είναι

$$d = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}.$$

(Υπόδειξη: Πάρτε ένα τυχαίο σημείο  $B$  του επιπέδου. Τότε  $d$  είναι το μήκος της προβολής του  $\overrightarrow{AB}$  στο κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο).

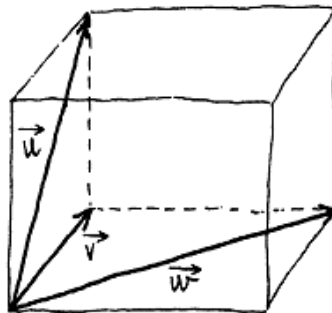
Εφαρμογή: Βρείτε την απόσταση του  $A(1, 2, 1)$  από το επίπεδο  $x + 2y - 2z = 1$ .

9. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνά από το  $A(1, 2, 3)$  και είναι παράλληλο προς στην ευθεία (1) και στην ευθεία με παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 2 \\ z &= 3 - 2t \end{aligned}$$

(Αρκεί να βρείτε ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο. Βρείτε διανύσματα παράλληλα προς τις ευθείες και μετά ένα κάθετο σ' αυτά.)

10. Να ευρεθεί η εξίσωση του επιπέδου  $xOz$ . Επίσης η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τον άξονα  $Oz$  και τη διχοτόμο της γωνίας που σχηματίζουν οι  $Ox, Oy$ .
11. Τα διανύσματα  $\vec{k} + \vec{i}, \vec{j}, \vec{i}$  (με αυτήν τη σειρά) αποτελούν δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο σύστημα διανυσμάτων; Ποιος είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που έχει αυτά τα διανύσματα ως ακμές;
12. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{u}, \vec{v}$  και  $\vec{w}$  του παρακάτω σχήματος. Το τριπλό γινόμενο  $\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})$  είναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν;



13. Βρείτε τις πολικές συντεταγμένες των σημείων του επιπέδου που έχουν καρτεσιανές συντεταγμένες αντίστοιχα  $(1, -1)$  και  $(-1, \sqrt{3})$ .