

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6
ΣΥΡΟΣ 2011

1. **(Θεωρία !)** Βρείτε τη σειρά Mc Laurin (δηλαδή σειρά Taylor γύρω από το 0) της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1-x}$ (Σημείωση: Η ισότητα της f με τη σειρά ισχύει για $x \in (-1, 1)$).
2. Χρησιμοποιώντας τη προηγούμενη άσκηση, βρείτε τη σειρά Mc Laurin της $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Για ποια x ισχύει η ισότητα που θα βρείτε;
3. Βρείτε το ανάπτυγμα Mc Laurin τάξης 3 (δηλαδή μέχρι την τρίτη παράγωγο) της συνάρτησης $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, με δύο τρόπους: (α) Από το γενικό τύπο της σειράς Mc Laurin για τυχαία συνάρτηση f υπολογίζοντας τις παραγώγους, και (β) από γνωστή σειρά συγκεκριμένης συνάρτησης που έγινε στο μάθημα.
4. Χρησιμοποιώντας τις σειρές McLaurin των συναρτήσεων $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, e^x που διδάχθηκαν στο μάθημα, να ευρεθούν οι σειρές Mc Laurin των συναρτήσεων: $\cos(-x^2)$, $\ln(1+x^2)$, $e^x + \sin x$, $\sinh x$, $\cosh x$, $(1+x)^3$, $\sin^2 x$, $x \sin x^2$. Για ποια x ισχύει το καθένα από αυτά;
5. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor, γράψτε το πολυώνυμο $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 1$ σε μορφή πολυωνύμου ως προς $x - 1$ (δηλαδή με δυνάμεις του $x - 1$).
6. Υπολογίστε τις παραγώγους: $f^{(99)}(0)$, $g^{(10)}(0)$ αν $f(x) = \cos(-x^2)$, $g(x) = \ln(1-x^2)$. (Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα τις σειρές McLaurin των δοσμένων συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τις σειρές McLaurin άλλων γνωστών συναρτήσεων, και μετά συγκρίνετε με το γενικό τύπο της σειράς McLaurin).
7. Δώστε μια εκτίμηση του σφάλματος που γίνεται όταν υπολογίζουμε το $\sqrt[3]{e}$ χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Mc Laurin της e^x τάξης 4.
8. Υπολογίστε το $\sin 1$ με ακρίβεια 0.0001. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το πεπερασμένο ανάπτυγμα με το υπόλοιπο Lagrange).