ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 9
ΣΥΡΟΣ - 2011

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα, χωρίς να υπολογιστεί το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα (δηλαδή μόνο με τη χρήση ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος):
$$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x+1} dx, \quad \int_0^1 \frac{8x^2+6x+4}{x+1} dx, \quad \int_1^e \cos(\ln x)\, dx, \quad \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx,$$
$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+3} dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-x+1} dx, \quad \int_1^2 \frac{x-1}{x^2(2+x)} dx.$$

2. Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$. Επειδή $\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = -\frac{1}{x-1} + c$, συμπεραίνουμε ότι
$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x-1} \right]_0^2 = -2.$$
Όπως γνωρίζουμε, το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$ μιας θετικής συνάρτησης f όπου $a < b$, δε μπορεί να είναι αρνητικό. Πού είναι το λάθος;

3. Αν για μια συνάρτηση f είναι γνωστό ότι $\int_1^7 f(x)\, dx = \int_1^9 f(x)\, dx$ και $\int_9^{10} f(x)\, dx = 3$, βρείτε το $\int_7^{10} f(x)\, dx$.

4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x) = x+1$, $g(x) = x^2 - x$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$.

5. Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x) = 4x^2 - 5x + 2$ και $g(x) = -x^2 + 3x - 1$.

6. Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες $y = e^x$, $y = 4 - e^x$, $y = 3$.

7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^9 \cos x - e^{x^2} \sin x}{\sin x^2 + 1} dx.$$
Υπόδειξη: Μη προσπαθήσετε να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα.

8. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο T (δηλαδή ισχύει $f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$) να δειχθεί ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$,
$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx.$$
(Υπόδειξη: κάνετε κατάλληλη αντικατάσταση)

9. Δείξτε ότι
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$
Σχεδιάστε μαζί τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f και της $g(x) = f(a+b-x)$, και δώστε γεωμετρική εξήγηση του παραπάνω τύπου.

10. Αν η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = c, \forall x \in [0,1]$, να δειχθεί ότι $f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$.

11. Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:
$$f(x) = \int_{\pi/6}^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt$$
(υπόδειξη: εκφράστε την f ως σύνθετη συνάρτηση) καθώς και της:
$$g(x) = \int_x^2 e^{-t^2} dt.$$

12. Δείξτε ότι η τιμή της παράστασης
$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$$
δεν εξαρτάται από το x.

13. Αν η f'' είναι συνεχής, $f(\pi) = 1$ και
$$\int_0^\pi \left[f(x) + f''(x)\right] \sin x\,dx = 2,$$
υπολογίστε το $f(0)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{\cos t + 2}dt, \quad x \in [-1,1].$$
   (α΄) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση είναι άρτια.
   (β΄) Να ευρεθούν τα σημεία όπου παρουσιάζει ακρότατα η f, καθώς και τα σημεία όπου παρουσιάζει ολικό ακρότατο (αν υπάρχουν).

   (Δεν συνιστάται να γίνει προσπάθεια υπολογισμού του ολοκληρώματος).

15. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, $t \in \mathbb{R}$.
   (α΄) Δείξτε ότι η συνάρτηση είναι περιττή.
   (β΄) Θεωρώντας ως δεδομένο ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, μελετήστε τη συνάρτηση και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.