ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΓΡΑΜΜΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΡΟΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

ΤΟΥ

ΔΙΑΜΑΝΤΙΔΗ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ

Διατριβή υποβληθείσα
στο Τμήμα Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων και Συστημάτων
του Πανεπιστημίου του Αιγαίου
για την απόκτηση του τίτλου του

Διδάκτορα της Φιλοσοφίας

Μέλη τριμελούς Επιτροπής

Δαρζέντας Ιωάννης:	Καθηγητής του τμήματος Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων και Συστημάτων του Πανεπιστημίου Αιγαίου
Παπαδόπουλος Χρυσολέων:	Καθηγητής του τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης
Σπύρου Θωμάς:	Επίκουρος Καθηγητής του τμήματος Μηχανικών Σχεδίασης Προϊόντων και Συστημάτων του Πανεπιστημίου Αιγαίου, (Επιβλέπων Καθηγητής)

Ευχαριστίες

Αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες σε όλους, όσους με παρότρυναν, συμβούλεψαν και βοήθησαν στην δημιουργία αυτής της εργασίας.

Κατ΄ αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Παπαδόπουλο Χρυσολέοντα, τόσο για την γνωστική βοήθεια, όσο και για την καθοδήγηση και υποστήριξη την οποία προσέφερε καθ΄ όλη την διάρκεια εκπόνησης της διατριβής αυτής. Κοντά του απέκτησα την αίσθηση της συστηματικής εργασίας, τον σχολαστικό και ακριβή έλεγχο, απαραίτητα στοιχεία της επιστημονικής εγκυρότητας καθώς και την αταλάντευτη εμμονή προς τον τεθέντα στόχο. Πέρα από τις ευχαριστίες μου απέναντι του ως προς το επιστημονικό μέρος της διατριβής, θα ήθελα να επίσης να τον ευχαριστήσω θερμά για τις αμέτρητες φορές που με βοήθησε σε προσωπικό επίπεδο.
Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω το μέλος της εξεταστικής επιτροπής, Λέκτορα κ. Βιδάλη Μιχαήλ για τη συνεργασία και τις συμβουλές του που βοήθησαν στην ολοκλήρωση της εργασίας αυτής.

Ευχαριστώ πολύ τους γονείς μου, που μου συμπαραστάθηκαν και με παρότρυναν συνεχώς σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής.

Επίσης θα επιθυμούσα να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής Καθηγητή κ. Δαρζέντα Ιωάννη και Επίκουρο Καθηγητή κ. Σπύρου Θωμά για την σταθερή καθοδήγηση και την συνεχή υποστήριξη και ενθάρρυνση της όλης προσπάθειας.

Τέλος ευχαριστώ τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής Καθηγητές κ.. Αγγελή Βασίλειο και κ. Μίνη Ιωάννη και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Δούνια Γεώργιο οι οποίοι με τις παρατηρήσεις και τα σχόλιά τους συνετέλεσαν στην βελτίωση της εργασίας αυτής.

ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1:	Ο πίνακας μετάβασης για N=5	Σελίδα 55
Πίνακας 2:	Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{3,5}$	Σελίδα 55
Πίνακας 3:	Υποπίνακας $S_{0,5}S_{0,5}$	Σελίδα 56
Πίνακας 4:	Ο πίνακας μετάβασης για N=6	Σελίδα 58
Πίνακας 5:	Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 5 για N=6, 7,…,20	Σελίδα 61
Πίνακας 6:	Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 5 για N=25, 30,…,100	Σελίδα 61
Πίνακας 7:	Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 5 για N=110,120,130,140,150	Σελίδα 62
Πίνακας 8:	Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 5 για N=200,250,300	Σελίδα 62
Πίνακας 9:	Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 5 για p_1=0.02,…0,1 με βήμα 0,01, $p_2=p_3$=0.01 and r_i=0.1, i=1,2,3	Σελίδα 62
Πίνακας 10:	Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 5 για p_2=0.02,…0,1 με βήμα 0,01, $p_1=p_3$=0.01 and r_i=0.1, i=1,2,3	Σελίδα 62
Πίνακας 11:	Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 5 για p_3=0.02,…0,1 με βήμα 0,01, $p_2=p_3$=0.01 and r_i=0.1, i=1,2,3	Σελίδα 63
Πίνακας 12:	Περιπτώσεις για τις οποίες η μηχανή M_d(3,4) μπορεί να βρεθεί up τη χρονική στιγμή t+1	Σελίδα 83
Πίνακας 13:	Ο πίνακας μετάβασης όταν N=5	Σελίδα 128
Πίνακας 14:	Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{1,5}$	Σελίδα 128
Πίνακας 15:	Απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 για N=5, 10, 15, 20, 30, 40	Σελίδα 135

Πίνακας 16: Απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 για N=50,60,…,100,150,200,250 Σελίδα 135

Πίνακας 17: Απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 για p_1=0.02(0.01)0.06, p_2=p_3=v_i=0.01, i=1,2,3 Σελίδα 135

Πίνακας 18: Απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 για p_2=0.02(0.01)0.06 p_1=p_3=v_i=0.01, i=1,2,3 Σελίδα 136

Πίνακας 19: Απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 για p_3=0.02(0.01)0.06 p_1=p_2=v_i=0.01, i=1,2,3 Σελίδα 136

Πίνακας 20: Απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 για v_1=0.02(0.01)0.06 p_i=v_2=v_3=0.01, i=1,2,3 Σελίδα 136

Πίνακας 21: Απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 για v_2=0.02(0.01)0.06 p_i=v_1=v_3=0.01, i=1,2,3 Σελίδα 136

Πίνακας 22: Απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 για v_3=0.02(0.01)0.06 p_i=v_1=v_3=0.01, i=1,2,3 Σελίδα 137

Πίνακας 23: Ο πίνακας μετάβασης του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης για S_1=3, S_2=4 και C=2 Σελίδα 182

Πίνακας 24: Περιγραφή των καταστάσεων του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης για S_1=3, S_2=4 και C=2. Σελίδα 183

Πίνακας 25: Η απόδοση του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης Σελίδα 186

Πίνακας 26: Εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με 5 σταθμούς εργασίας, B_i=0,i=1,…,4 Σελίδα 194

Πίνακας 27: Εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με 3, 5 και 7 σταθμούς εργασίας Σελίδα 195

Πίνακας 28: Εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με 3 σταθμούς εργασίας Σελίδα 196

Πίνακας 29: Εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με 4 σταθμούς εργασίας Σελίδα 197

Πίνακας 30: Εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με 5 σταθμούς εργασίας Σελίδα 198

Πίνακας 31: Εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με 6 και 7 σταθμούς εργασίας Σελίδα 198

Πίνακας 32: Εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με 10(10),…,100 σταθμούς εργασίας Σελίδα 203

Πίνακας 33: Εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με 100(100),…,1000 σταθμούς εργασίας Σελίδα 204

ΠΙΝΑΚΕΣ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ Α

Πίνακας Α1: Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{0,5}$ Σελίδα 215

Πίνακας Α2: Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{1,5}$ Σελίδα 216

Πίνακας Α3: Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{2,5}$ Σελίδα 216

Πίνακας Α4: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{0,5}$ Σελίδα 217

Πίνακας Α5: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{1,5}$ Σελίδα 217

Πίνακας Α6: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{2,5}$ Σελίδα 218

Πίνακας Α7: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{3,5}$ Σελίδα 218

Πίνακας Α8: Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{1,5}$ Σελίδα 219

Πίνακας Α9: Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{2,5}$ Σελίδα 219

Πίνακας Α10: Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{3,5}$ Σελίδα 220

Πίνακας Α11: Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{4,5}$ Σελίδα 220

Πίνακας Α12: Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{2,5}$ Σελίδα 221

Πίνακας Α13: Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{3,5}$ Σελίδα 221

Πίνακας Α14: Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{4,5}$ Σελίδα 222

Πίνακας Α15: Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{5,5}$ Σελίδα 222

Πίνακας Α16: Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{3,5}$ Σελίδα 223

Πίνακας A17: Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{4,5}$ Σελίδα 223

Πίνακας A18: Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{5,5}$ Σελίδα 224

Πίνακας A19: Ο υποπίνακας $S_{5,5}S_{4,5}$ Σελίδα 224

Πίνακας A20: Ο υποπίνακας $S_{5,5}S_{5,5}$ Σελίδα 224

ΠΙΝΑΚΕΣ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ Β

Πίνακας B1: Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{0,5}$ Σελίδα 225

Πίνακας B2: Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{1,5}$ Σελίδα 225

Πίνακας B3: Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{2,5}$ Σελίδα 226

Πίνακας B4: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{0,5}$ Σελίδα 226

Πίνακας B5: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{1,5}$ Σελίδα 227

Πίνακας B6: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{2,5}$ Σελίδα 227

Πίνακας B7: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{3,5}$ Σελίδα 228

Πίνακας B8: Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{1,5}$ Σελίδα 228

Πίνακας B9: Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{2,5}$ Σελίδα 229

Πίνακας B10: Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{3,5}$ Σελίδα 229

Πίνακας B11: Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{4,5}$ Σελίδα 230

Πίνακας B12: Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{2,5}$ Σελίδα 231

Πίνακας B13: Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{3,5}$ Σελίδα 231

Πίνακας B14: Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{4,5}$ Σελίδα 232

Πίνακας B15: Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{5,5}$ Σελίδα 232

Πίνακας B16: Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{3,5}$ Σελίδα 233

Πίνακας B17: Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{4,5}$ Σελίδα 234

Πίνακας Β18: Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{5,5}$ Σελίδα 234

Πίνακας Β19: Ο υποπίνακας $S_{5,5}S_{4,5}$ Σελίδα 235

Πίνακας Β20: Ο υποπίνακας $S_{5,5}S_{5,5}$ Σελίδα 235

ΛΙΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1 : Σειριακή γραμμή παραγωγής με Ν σταθμούς εργασίας και Ν-1 ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους Σελίδα 10

Σχήμα 2 : Γραμμή συναρμολόγησης με επτά σταθμούς εργασίας και έξη ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους Σελίδα 11

Σχήμα 3 : Γραμμή αποσυναρμολόγησης με τέσσερις σταθμούς επεξεργασίας και τρεις ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους Σελίδα 11

Σχήμα 4 : Σύστημα συγχώνευσης εργασιών με τρεις μηχανές και δυο αποθηκευτικούς χώρους Σελίδα 12

Σχήμα 5 : Σύστημα συγχώνευσης με τρεις μηχανές και ένα αποθηκευτικό χώρο Σελίδα 13

Σχήμα 6 : Γραμμή διάσπασης με τέσσερις μηχανές και τρεις αποθηκευτικούς χώρους Σελίδα 14

Σχήμα 7 : Γραμμή παραγωγής με βρόγχο επαναπεξεργασίας Σελίδα 15

Σχήμα 8 : Γραμμή παραγωγής με σταθμούς εργασίας που αποτελούνται από παράλληλες μηχανές εξυπηρέτησης Σελίδα 16

Σχήμα 9 : Αλληλεξάρτηση εκτιμητικών και γενετικών μεθόδων Σελίδα 21

Σχήμα 10 : Πιθανότητες μετάβασης από τη μια κατάσταση στην άλλη Σελίδα 23

Σχήμα 11 : Το Δομικό Στοιχείο της Μεθόδου της Αποσύνθεσης της κλασσικής μεθόδου της αποσύνθεσης (ΔΣΜΑ) Σελίδα 25

Σχήμα 12 : Σειριακή γραμμή παραγωγής με τέσσερις μηχανές και τρεις αποθηκευτικούς χώρους Σελίδα 26

Σχήμα 13 : Η μέθοδος της αποσύνθεσης για τη γραμμή παραγωγής του σχήματος 12 Σελίδα 26

Σχήμα 14 : Γραμμή παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης αποτελούμενη από έξη μηχανές και τέσσερις αποθηκευτικούς χώρους Σελίδα 35

Σχήμα 15 : Η κλασσική μέθοδος της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης που μοντελοποιούνται με βάση το σχήμα 4 Σελίδα 39

Σχήμα 16 : Η τροποποιημένη μέθοδος της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης που μοντελοποιούνται με βάση το σχήμα 5 Σελίδα 42

Σχήμα 17 : Διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης από την κατάσταση (n,0,0,0) Σελίδα 47

Σχήμα 18 : Μια γραμμή παραγωγής με έξη μηχανές, οκτώ αποθηκευτικούς χώρους, εργασίες συγχώνευσης και παραγωγής δυο διαφορετικών τύπων προϊόντων. Σελίδα 106

Σχήμα 19 : Η μέθοδος της αποσύνθεσης για τα προϊόντα τύπου Α Σελίδα 115

Σχήμα 20 : Η μέθοδος της αποσύνθεσης για τα προϊόντα τύπου Β Σελίδα 116

Σχήμα 21 : Το νέο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης Σελίδα 117

Σχήμα 22 : Γραμμή παραγωγής με Μ σταθμούς εργασίας που αποτελούνται από παράλληλες μηχανές επεξεργασίας και Μ-1 ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους πεπερασμένης χωρητικότητας Σελίδα 172

Σχήμα 23 : Η μέθοδος της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με παράλληλους εξυπηρετητές ανά σταθμό εργασίας Σελίδα 175

Σχήμα 24 : Το δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης Σελίδα 177

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Άρθρα δημοσιευμένα ή υπό δημοσίευση
σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά με κριτές Σελίδα 1

Άρθρα δημοσιευμένα σε διεθνή επιστημονικά
συνέδρια με κριτές Σελίδα 2

Κίνητρο και περίγραμμα της εργασίας Σελίδα 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1 Εισαγωγή Σελίδα 7
1.2 Εισαγωγή στα βιομηχανικά συστήματα Σελίδα 7
1.3 Κατηγοριοποίηση Βιομηχανικών συστημάτων Σελίδα 8
1.3.1 Σειριακές Γραμμές Παραγωγής Σελίδα 9
1.3.2 Μη σειριακές γραμμές παραγωγής Σελίδα 10
1.3.3 Συστήματα συναρμολόγησης Σελίδα 10
1.3.4 Συστήματα αποσυναρμολόγησης Σελίδα 11
1.3.5 Γραμμές Συγχώνευσης Σελίδα 12
1.3.6 Γραμμές Διάσπασης Σελίδα 13
1.3.7 Γραμμές παραγωγής με σταθμούς εργασίας
που αποτελούνται από πολλές παράλληλες
μηχανές επεξεργασίας Σελίδα 16
1.3.8 Γραμμές Παραγωγής διακριτού τύπου και
συνεχούς τύπου προϊόντων Σελίδα 17
1.3.9 Αξιόπιστες και μη αξιόπιστες γραμμές παραγωγής Σελίδα 17
1.3.10 Συγχρονισμένες και μη συγχρονισμένες
γραμμές παραγωγής Σελίδα 17
1.3.11 Ευέλικτα βιομηχανικά συστήματα και job shops Σελίδα 18
1.3.12 Μέτρα απόδοσης Σελίδα 18
Βιβλιογραφία Σελίδα 19

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

2.1 Εισαγωγή Σελίδα 20
2.2 Μέθοδοι εκτίμησης και βελτιστοποίησης
γραμμών παραγωγής Σελίδα 20
2.3 Μαρκοβιανή Ανάλυση Σελίδα 22
2.4 Αναλυτικές μέθοδοι και προσομοίωση Σελίδα 23
2.5 Η μέθοδος της αποσύνθεσης (Decomposition method) Σελίδα 25
2.6 Η μέθοδος της συνάθροισης (Aggregation method) Σελίδα 28
Βιβλιογραφία Σελίδα 29

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΣΥΓΧΩΝΕΥΣΗΣ (MERGE OPERATIONS) ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

3.1	Εισαγωγή	Σελίδα 31
3.2	Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	Σελίδα 32
3.3	Ορισμός του προβλήματος	Σελίδα 35
3.4	Μοντελοποίηση συστημάτων με εργασίες συγχώνευσης	Σελίδα 36
3.5	Η κλασική μέθοδος της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης	Σελίδα 37
3.6	Γραφική απεικόνιση της τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης	Σελίδα 40
3.7	Επίλυση του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης	Σελίδα 43
3.7.1	Προϋποθέσεις του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης	Σελίδα 43
3.7.2	Δημιουργία των εξισώσεων μετάβασης	Σελίδα 45
3.8	Ο αλγόριθμος για τη δημιουργία του πίνακα μετάβασης	Σελίδα 53
3.8.1	Ο αριθμός των πιθανών καταστάσεων	Σελίδα 53
3.8.2	Ο πίνακας μετάβασης για N=5	Σελίδα 54
3.8.3	Ο αλγόριθμος για τη γένεση του πίνακα μετάβασης P_N	Σελίδα 56
3.9	Αριθμητικό παράδειγμα	Σελίδα 58
3.10	Μέτρα απόδοσης	Σελίδα 59
3.11	Αριθμητικά αποτελέσματα για το δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης	Σελίδα 60
3.12	Η τροποποιημένη μέθοδος της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης	Σελίδα 64
3.12.1	Χαρακτηριστικά της πραγματικής γραμμής παραγωγής L	Σελίδα 65
3.12.2	Χαρακτηριστικά των δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης	Σελίδα 66
3.13	Δημιουργία των εξισώσεων της τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης	Σελίδα 67
3.13.1	Τα σύνολα των εξισώσεων της τροποποιημένης Μεθόδου της αποσύνθεσης	Σελίδα 68
3.13.2	Οι νέες εξισώσεις για τη τροποποιημένη μέθοδο της αποσύνθεσης	Σελίδα 69
3.13.3	Οι εξισώσεις διατήρησης της ροής	Σελίδα 71
3.13.4	Οι εξισώσεις ροής για την μηχανή $M_u(5,6)$	Σελίδα 72
3.13.5	Οι εξισώσεις ροής για την μηχανή $M_d(1,2)$	Σελίδα 73

3.13.6 Οι εξισώσεις ροής για την μηχανή $M_d(3,4)$ Σελίδα 74

3.13.7 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,6)$ Σελίδα 75
3.13.8 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(1,2)$ Σελίδα 79
3.13.9 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(1,2)$ Σελίδα 82
3.14 Ταυτόχρονη επίλυση του συστήματος των εξισώσεων της αποσύνθεσης Σελίδα 90
3.15 Ο Αλγόριθμος της αποσύνθεσης Σελίδα 91
3.16 Αριθμητικά Αποτελέσματα Σελίδα 94
3.17 Συμπεράσματα και περαιτέρω έρευνα Σελίδα 95
Βιβλιογραφία Σελίδα 97

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΣΥΓΧΩΝΕΥΣΗΣ (MERGE OPERATIONS) ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΥΟ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΤΥΠΟΥ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

4.1 Εισαγωγή Σελίδα 100
4.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση Σελίδα 101
4.3 Ορισμός του προβλήματος Σελίδα 106
4.4 Χαρακτηριστικά του μοντέλου Σελίδα 106
4.5 Η μέθοδος της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής Με εργασίες συγχώνευσης και δυνατότητα παραγωγής δυο τύπου προϊόντων Σελίδα 108
4.6 Το νέο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης Σελίδα 117
4.6.1 Χαρακτηριστικά του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης Σελίδα 117
4.7 Οι εξισώσεις μετάβασης Σελίδα 120
4.8 Ο Αλγόριθμος για τη δημιουργία του πίνακα μετάβασης Σελίδα 126
4.8.1 Ο αριθμός των πιθανών καταστάσεων Σελίδα 126
4.8.2 Ο πίνακας μετάβασης για N=5 Σελίδα 127
4.8.3 Ο αλγόριθμος για τη γένεση του πίνακα μετάβασης P_N Σελίδα 128
4.9 Μέτρα απόδοσης Σελίδα 131
4.10 Αριθμητικά αποτελέσματα Σελίδα 134
4.11 Τα σύνολα των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης Σελίδα 137
4.12 Οι εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης Σελίδα 140
4.12.1 Οι εξισώσεις διατήρησης της ροής Σελίδα 141
4.12.2 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,A)$ Σελίδα 141

4.12.3 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_u(5,B)$ Σελίδα 142
4.12.4 Εξίσωση διακοπής της ροής για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_u(5,A)$ Σελίδα 143
4.12.5 Εξίσωση ροής για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_u(5,B)$ Σελίδα 143
4.12.6 Η εξίσωση της βλάβης αδράνειας για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_u(5,A)$ Σελίδα 144
4.12.7 Η εξίσωση της βλάβης αδράνειας για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_u(5,B)$ Σελίδα 144
4.12.8 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_d(1,A)$ Σελίδα 145
4.12.9 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_d(1,B)$ Σελίδα 145
4.12.10 Εξίσωση διακοπής της ροής για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_d(1,A)$ Σελίδα 147
4.12.11 Εξίσωση ροής για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_d(1,B)$ Σελίδα 147
4.12.12 Εξίσωση βλάβης αδράνειας για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_d(1,A)$ Σελίδα 148
4.12.13 Εξίσωση βλάβης αδράνειας για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_d(1,B)$ Σελίδα 148
4.12.14 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_d(2,A)$ Σελίδα 148
4.12.15 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_d(2,B)$ Σελίδα 149
4.12.16 Εξίσωση διακοπής της ροής για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_d(2,A)$ Σελίδα 151
4.12.17 Εξίσωση ροής για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_d(2,B)$ Σελίδα 152
4.12.18 Εξίσωση βλάβης αδράνειας για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_d(2,A)$ Σελίδα 153
4.12.18 Εξίσωση βλάβης αδράνειας για την ΄΄εικονική΄΄
μηχανή $M_d(2,B)$ Σελίδα 153
4.13 Ο Αλγόριθμος της αποσύνθεσης Σελίδα 153
4.14 Αριθμητικά Αποτελέσματα Σελίδα 159
4.15 Συμπεράσματα και περαιτέρω έρευνα Σελίδα 160
Βιβλιογραφία Σελίδα 162

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΜΟΥΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΟΥ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ ΠΟΛΛΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ

5.1	Εισαγωγή	Σελίδα 165
5.2	Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	Σελίδα 166
5.3	Ορισμός του προβλήματος	Σελίδα 172
5.4	Το μοντέλο	Σελίδα 173
5.5	Η μέθοδος της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με Παράλληλες μηχανές επεξεργασίας ανά σταθμό εργασίας	Σελίδα 173
5.6	Το δομικό στοιχείο της μεθόδου της μεθόδου της αποσύνθεσης	Σελίδα 176
5.7	Οι εξισώσεις μετάβασης	Σελίδα 179
5.8	Αλγόριθμος για τη δημιουργία του πίνακα μετάβασης	Σελίδα 180
5.9	Αριθμητικό παράδειγμα εφαρμογής του αλγόριθμου	Σελίδα 181
5.10	Μέτρα απόδοσης του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης	Σελίδα 183
5.11	Αριθμητικά αποτελέσματα για το δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης	Σελίδα 186
5.12	Τα σύνολα των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης	Σελίδα 187
5.13	Οι εξισώσεις διατήρησης της ροής	Σελίδα 187
5.14	Οι εξισώσεις ροής	Σελίδα 188
5.15	Οριακές συνθήκες	Σελίδα 191
5.16	Ο αλγόριθμος για την επίλυση των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης	Σελίδα 192
5.17	Αριθμητικά αποτελέσματα	Σελίδα 193
5.17.1	Αριθμητικά αποτελέσματα για μικρές γραμμές παραγωγής	Σελίδα 194
5.17.2	Αριθμητικά αποτελέσματα για μεγάλες γραμμές παραγωγής	Σελίδα 199
5.18	Συμπεράσματα και περαιτέρω έρευνα	Σελίδα 205
	Βιβλιογραφία	Σελίδα 207
	Γενικά Συμπεράσματα και συνεισφορά της εργασίας	Σελίδα 211

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α
ΟΙ ΥΠΟΠΙΝΑΚΕΣ $S_{i,5}S_{j,5}$, i,j=1,…,5 ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ P_5 ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3 Σελίδα 215

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β
ΟΙ ΥΠΟΠΙΝΑΚΕΣ $S_{i,5}S_{j,5}$, i,j=1,…,5 ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ P_5 ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4 Σελίδα 225

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ
ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΗΣ ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗΣ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΣΥΓΧΩΝΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΥΟ ΤΥΠΩΝ ΠΡΟΙΟΝΤΩΝ Σελίδα 236

Άρθρα δημοσιευμένα ή υπό δημοσίευση σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά με κριτές

[1] Diamantidis, A.C. and Papadopoulos, C.T., (2004), "A dynamic programming algorithm for the buffer allocation problem in homogeneous asymptotically reliable serial production lines", *Mathematical problems in Engineering* 2004:3, pp. 209—223.
(το άρθρο αυτό έχει ήδη δημοσιευτεί πριν την εκπόνηση της παρούσας διατριβής)

[2] Diamantidis, A.C., Papadopoulos, C.T., and Vidalis, M.I., (2004), "Exact analysis of a discrete material three station one buffer merge system with unreliable machines", *International Journal of Production Research,* 42(4), pp. 651—675. (το άρθρο αυτό έχει ήδη δημοσιευτεί)

[3] Diamantidis, A.C. and Papadopoulos, C.T., (2005), "Markovian analysis of a discrete material manufacturing system with merge operations, operational dependent and idleness failures'', *Computers and Industrial Engineering*.
(το άρθρο αυτό έχει γίνει ήδη δεκτό για δημοσίευση)

[4] Diamantidis, A.C., Papadopoulos, C.T., and Heavey, Cathal., " Approximate analysis of serial flow lines with multiple parallel machine stations", *IIE Transactions*.
(το άρθρο αυτό έχει γίνει ήδη δεκτό για δημοσίευση)

Άρθρα δημοσιευμένα σε διεθνή επιστημονικά συνέδρια με κριτές

[1] Diamantidis, A.C., Papadopoulos, C.T., and Vidalis, M.I., (2002), "Exact Analysis of discrete material merge system with limited buffer capacity and three stations", *Proceedings of the 30th Computers & Industrial Engineering International Conference*: held on Tinos Island, Greece, June 28 – July 2, 2002, pp. 173-176.

[2] Diamantidis, A.C. and Papadopoulos, C.T., (2003), "Analysis of a discrete material unreliable merge system with a finite intermediate buffer and three stations with operational-dependent and idleness failures", *Proceedings of the 4th Aegean International Conference on "Analysis of Manufacturing Systems", July 1-4 2003 Doryssa Bay Hotel, Pythagorion, Samos Island Greece,* pp. 103-111

[3] Diamantidis, A.C. and Papadopoulos, C.T., (2003), "Analysis of a tandem system with two work stations parallel machines and an intermediate buffer", *Proceedings of the 32nd International Conference on Computers and Industrial Engineering, August 11-13 2003, Limerick Ireland,*. pp. 815-820

[4] Diamantidis, A.C. and Papadopoulos, C.T., (2005), "On the server allocation in large reliable production lines with exponential processing times", *Proceedings of the* 5th *Aegean International Conference* on *"Analysis of Manufacturing Systems-Production Management", May 20-25, 2005, Zakynthos Island, Greece*, pp. 273-280

Κίνητρο, συνεισφορά και περίγραμμα της εργασίας

Η ανάλυση των βιομηχανικών συστημάτων παραγωγής παίζει αναμφισβήτητα πολύ σημαντικό ρόλο τόσο στην εξέλιξή τους όσο και στη σωστή εκμετάλλευσή τους από τον άνθρωπο με αντικειμενικό στόχο την ταυτόχρονη μεγιστοποίηση του κέρδους και ελαχιστοποίηση του κόστους των επιχειρήσεων που τα χρησιμοποιούν επενδύοντας σημαντικά κεφάλαια. Η ολοένα και αυξανόμενη ανάγκη για τη μαζική παραγωγή ποιοτικών προϊόντων, ως άμεση συνέπεια της παγκόσμιας αύξησης του πληθυσμού καθιστά επιτακτική την ανάγκη της μελέτης και ανάλυσης βιομηχανικών συστημάτων παραγωγής.

Τα βιομηχανικά συστήματα παραγωγής ως ένας τομέας του ευρύτερου χώρου της μηχανικής υπόκειται σε μεγάλο βαθμό σε αβεβαιότητα, λόγω του ότι οι εμπλεκόμενες παράμετροι που το προσδιορίζουν είναι συνήθως στοχαστικές. Ένα από τα ζητήματα που σχετίζονται με την ανάλυση των βιομηχανικών συστημάτων παραγωγής είναι ο προσδιορισμός του ρυθμού παραγωγής ή απόδοσης του συστήματος καθώς και άλλων μέτρων απόδοσης. Είναι γεγονός ότι ο προσδιορισμός της απόδοσης ενός βιομηχανικού συστήματος είναι σημαντικό ζήτημα για πάρα πολλούς λόγους. Ένας από τους λόγους αυτούς είναι ότι γνωρίζοντας την απόδοση ενός βιομηχανικού συστήματος μπορεί να γίνει σωστή διαχείριση και προγραμματισμός των παραγγελιών που έχουν δοθεί από τους πελάτες, με άμεση συνέπεια οι παραγγελίες να είναι έτοιμες για τους πελάτες την στιγμή που τους είχε υποσχεθεί. Σε αντίθετη περίπτωση υπάρχει δυσαρέσκεια των πελατών με άμεση δυσμενή οικονομική επίπτωση. Άλλος λόγος που κάνει τον προσδιορισμό της απόδοσης ιδιαίτερα σημαντικό θέμα για την ανάλυση των βιομηχανικών συστημάτων είναι ότι μπορεί να βρεθεί η επίπτωση (οικονομική και όχι μόνο) που θα έχουν στο σύστημα τυχόν αλλαγές τόσο στις παραμέτρους που προσδιορίζουν το σύστημα (ρυθμοί εμφάνισης βλαβών, επιδιορθώσεων των μηχανών κ.α.) όσο κα στις οντότητες που απαρτίζουν το ίδιο το σύστημα (προσθήκη αποθηκευτικού χώρου ανάμεσα στις μηχανές, αλλαγή μιας μηχανής με κάποια άλλη ενδεχομένως γρηγορότερη κ.α.).

Η πολυπλοκότητα των προβλημάτων που εμφανίζονται στη σχεδίαση, ανάπτυξη και λειτουργία ενός βιομηχανικού συστήματος, και η αδυναμία της επιστήμης να δώσει ακριβείς λύσεις στα προβλήματα αυτά είχε οδηγήσει στο παρελθόν στην εφαρμογή τεχνικών οι οποίες βασίζονταν κυρίως στην κοινή πρακτική, στη διαίσθηση και στην εμπειρία των άμεσα εμπλεκομένων. Αρκετές φορές σημαντικά εργαλεία όπως οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές χρησιμοποιούνταν μόνο για την υλοποίηση τέτοιου είδους διαισθητικών και πρακτικών τεχνικών.

Ωστόσο τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρήθηκε μια ιδιαίτερη ενασχόληση της επιστημονικής κοινότητας με τα προβλήματα αυτά, γεγονός που είχε ως άμεση συνέπεια τη δημιουργία θεωριών, τεχνικών και αλγορίθμων οι οποίοι συνέβαλαν στην επίλυση των προβλημάτων που προκύπτουν κατά τη λειτουργία των βιομηχανικών συστημάτων.

Η εργασία αυτή ασχολείται κυρίως με την ανάπτυξη αλγορίθμων οι οποίοι θα συμβάλουν στην ανάλυση των βιομηχανικών συστημάτων στα οποία η ροή των προϊόντων μπορεί να είναι είτε γραμμική είτε μη γραμμική. Πιο συγκεκριμένα η εργασία αυτή αποτελείται από πέντε κεφάλαια:

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια εισαγωγή στα βιομηχανικά συστήματα στην οποία περιγράφονται οι κατηγορίες των βιομηχανικών συστημάτων που συναντώνται στην πράξη και στις αναλύσεις στη διεθνή βιβλιογραφία.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι μέθοδοι ανάλυσης των βιομηχανικών συστημάτων που χρησιμοποιούνται στη σχεδίαση, ανάλυση και βελτιστοποίησή τους.

Στο τρίτο κεφάλαιο δίνεται ένας αλγόριθμος για τον προσδιορισμό της απόδοσης ενός βιομηχανικού συστήματος στο οποίο πραγματοποιούνται εργασίες συγχώνευσης, γεγονός που οδηγεί σε μη γραμμική ροή των υλικών και προϊόντων, τα οποία είναι ενός τύπου μόνον.

Στο τέταρτο κεφάλαιο εξετάζεται ένα βιομηχανικό σύστημα παρόμοιο με αυτό του τρίτου κεφαλαίου (δηλαδή πραγματοποιούνται πάλι εργασίες συγχώνευσης), αλλά με τη σημαντική διαφορά ότι το σύστημα αυτό μπορεί να παράγει περισσότερα του ενός τύπου προϊόντα. Η τελευταία αυτή υπόθεση αυξάνει κατά πολύ την πολυπλοκότητα του συστήματος.

Το πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας ασχολείται με την εύρεση ενός αλγόριθμου για τον προσδιορισμό της απόδοσης ενός βιομηχανικού συστήματος στο οποίο κάθε σταθμός εργασίας αποτελείται από παράλληλες μηχανές επεξεργασίας.

Η ανάλυση των βιομηχανικών συστημάτων που εξετάζονται και στα τρία μέρη της εργασίας με σκοπό τον προσδιορισμό της απόδοσής τους, γίνεται επεκτείνοντας τη μέθοδο της αποσύνθεσης (decomposition method) που αρχικά είχε χρησιμοποιηθεί για απλούστερα βιομηχανικά συστήματα.

Η συνεισφορά της παρούσας εργασίας σε κάθε κεφάλαιο ξεχωριστά είναι η ακόλουθη:
Στο κεφάλαιο 3 όπου εξετάζονται βιομηχανικά συστήματα στα οποία πραγματοποιούνται εργασίες συγχώνευσης και τα παραγόμενα προϊόντα είναι μόνον ενός τύπου η συνεισφορά της εργασίας συνοπτικά είναι:

1. Η επίλυση με χρήση Μαρκοβιανής Αλυσίδας ενός νέου συστήματος που αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο το οποίο μοντελοποιεί τις εργασίες συγχώνευσης. Η επίλυση του συστήματος αυτού γίνεται σε τρία στάδια. Στο πρώτο στάδιο προσδιορίζονται όλες οι πιθανές καταστάσεις του συστήματος ενώ στο δεύτερο στάδιο δημιουργούνται όλες οι εξισώσεις μετάβασης μεταξύ των πιθανών καταστάσεων. Τέλος στο τρίτο στάδιο κατασκευάζεται ένας αλγόριθμος ο οποίος γεννά τον πίνακα μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή της χωρητικότητας του συστήματος και χρησιμοποιείται για την εύρεση των στάσιμων πιθανοτήτων και των μέτρων απόδοσης του συστήματος

2. Το προαναφερθέν σύστημα χρησιμοποιείται στη συνέχεια σαν νέο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης παράλληλα με το κλασικό δομικό στοιχείο της ίδιας μεθόδου για την ανάλυση γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης. Δημιουργούνται όλες οι απαραίτητες νέες εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιούνται για την ενσωμάτωση του νέου δομικού στοιχείου ενώ κατασκευάζεται και ο αλγόριθμος της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιείται για την ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων αυτών.

Στο κεφάλαιο 4 στο οποίο εξετάζονται βιομηχανικά συστήματα με εργασίες συγχώνευσης παραγωγής δυο διαφορετικών τύπων προϊόντων η συνεισφορά της εργασίας συνοπτικά είναι:

1. Η επίλυση με χρήση Μαρκοβιανής Αλυσίδας ενός συστήματος το οποίο αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο παρόμοιο με αυτό του κεφαλαίου 3 αλλά με μια σημαντική διαφορά η οποία μοντελοποιεί την ύπαρξη των δυο διαφορετικών τύπων προϊόντων. Η ουσιώδης αυτή διαφορά αφορά στην εισαγωγή ενός νέου τρόπου εμφάνισης βλαβών των μηχανών (βλάβες αδράνειας) οι οποίες έχουν άμεση επίπτωση στη συμπεριφορά του συστήματος. Η επίλυση του συστήματος αυτού γίνεται σε τρία βήματα. Στο πρώτο βήμα προσδιορίζονται όλες οι πιθανές καταστάσεις του συστήματος ενώ στο δεύτερο βήμα δημιουργούνται όλες οι εξισώσεις μετάβασης μεταξύ των πιθανών καταστάσεων. Τέλος στο τρίτο βήμα κατασκευάζεται ένας αλγόριθμος ο οποίος γεννά τον πίνακα μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή της χωρητικότητας του συστήματος και χρησιμοποιείται για την εύρεση των στάσιμων πιθανοτήτων και των μέτρων απόδοσης του συστήματος.

2. Το νέο αυτό σύστημα χρησιμοποιείται στη συνέχεια σαν νέο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης για την ανάλυση γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης & παραγωγής δυο διαφορετικών τύπων προϊόντων. Δημιουργούνται όλες οι απαραίτητες νέες εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιούνται για την ενσωμάτωση του νέου δομικού στοιχείου. Επιπλέον λόγω της ύπαρξης των βλαβών αδράνειας δημιουργείται ένα νέο σύνολο εξισώσεων (εξισώσεις βλαβών αδράνειας) ενώ επίσης κατασκευάζεται και ο αλγόριθμος της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιείται για την ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων αυτών.

Στο κεφάλαιο 5 εξετάζονται βιομηχανικά συστήματα με σταθμούς εργασίας οι οποίοι αποτελούνται από αξιόπιστες παράλληλες μηχανές επεξεργασίας. Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές εργασίες ερευνητών οι οποίες ασχολούνται με την ανάλυση αυτής της κατηγορίας γραμμών παραγωγής χρησιμοποιώντας διάφορες τεχνικές αντικατάστασης (replacement techniques). Σύμφωνα με τις τεχνικές αυτές, κάθε σταθμός εργασίας που αποτελείται από παράλληλες μηχανές επεξεργασίας αντικαθίστανται από ένα ισοδύναμο σταθμό εργασίας που αποτελείται από μόνο μια μηχανή επεξεργασίας και στη συνέχεια το ισοδύναμο σύστημα αναλύεται σαν μια απλή σειριακή γραμμή παραγωγής στην οποία κάθε σταθμός εργασίας αποτελείται

από μόνο μια μηχανή επεξεργασίας. Η συνεισφορά της εργασίας αυτής είναι η επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης ώστε να εφαρμόζεται απευθείας στην ανάλυση αυτής της κατηγορίας γραμμών παραγωγής χωρίς να χρησιμοποιείται καμιά τεχνική αντικατάστασης. Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται αυτό είναι συνοπτικά ο εξής:

1. Επίλυση με χρήση Μαρκοβιανής Αλυσίδας ενός συστήματος που αποτελείται από δυο σταθμούς εργασίας και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο. Κάθε σταθμός αποτελείται από αξιόπιστες παράλληλες μηχανές επεξεργασίας. Η επίλυση του συστήματος αυτού γίνεται σε τρεις φάσεις. Στην πρώτη φάση προσδιορίζονται όλες οι πιθανές καταστάσεις του συστήματος ενώ στη δεύτερη φάση δημιουργούνται όλες οι εξισώσεις μετάβασης μεταξύ των πιθανών καταστάσεων. Τέλος στη τρίτη φάση κατασκευάζεται ένας αλγόριθμος ο οποίος γεννά τον πίνακα μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή της χωρητικότητας του συστήματος και χρησιμοποιείται για την εύρεση των στάσιμων πιθανοτήτων και των μέτρων απόδοσης του συστήματος

2. Το νέο αυτό σύστημα χρησιμοποιείται στη συνέχεια σαν νέο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης για την ανάλυση γραμμών παραγωγής με παράλληλες μηχανές επεξεργασίας σε κάθε σταθμό εργασίας. Δημιουργούνται όλες οι απαραίτητες νέες εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιούνται για την ενσωμάτωση του νέου δομικού στοιχείου ενώ κατασκευάζεται και ο αλγόριθμος της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιείται για την ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων αυτών. Ο αλγόριθμος αυτός χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της απόδοσης γραμμών παραγωγής που αποτελούνται από τέσσερις έως και χίλιους σταθμούς εργασίας. Από την εξέταση όλων των αριθμητικών αποτελεσμάτων τόσο για μικρές όσο και για πολύ μεγάλες γραμμές παραγωγής, προκύπτει ότι ο προτεινόμενος αλγόριθμος υπολογίζει γρήγορα και με αρκετά μεγάλη ακρίβεια (η μέγιστη απόκλιση που παρατηρήθηκε ήταν 2.5%) την απόδοση αυτής της κατηγορίας γραμμών παραγωγής.

Αρχικό κίνητρο της εργασίας αυτής ήταν η επίλυση ανοιχτών προβλημάτων από τη διεθνή βιβλιογραφία. Σε αυτό προστέθηκε και η ύπαρξη παρόμοιων συστημάτων σε διάφορες βιομηχανίες και πιο συγκεκριμένα στην ελληνική βιομηχανία FITCO στην οποία πραγματοποιήθηκε επίσκεψη και διαπιστώθηκε ότι βιομηχανικά συστήματα σαν και αυτά που εξετάζονται στα κεφάλαια 3, 4 και 5 της εργασίας αυτής είναι ρεαλιστικά και συναντώνται στη πράξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μια γενική εισαγωγή στα βιομηχανικά συστήματα, στην οποία περιλαμβάνονται η ορολογία που χρησιμοποιείται και οι βασικές κατηγορίες βιομηχανικών συστημάτων που υπάρχουν και έχουν μελετηθεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Η εισαγωγή αυτή στα βιομηχανικά συστήματα έχει σαν σκοπό να κάνει όσο το δυνατόν ευκολότερη την ανάγνωση τον επόμενων κεφαλαίων από τον αναγνώστη φέροντας τον σε μια πρώτη επαφή με το αντικείμενο της διατριβής αυτής.. Πιο συγκεκριμένα στην ενότητα 1.2, παρουσιάζονται τα βασικά στοιχεία από τα οποία αποτελείται ένα βιομηχανικό σύστημα ενώ παράλληλα γίνεται και μια πρώτη αναφορά στα προβλήματα που σχετίζονται με τα βιομηχανικά συστήματα και με τα οποία ασχολούνται οι ερευνητές στη διεθνή βιβλιογραφία.
Στην ενότητα 1.3 παρουσιάζονται οι κατηγορίες των βιομηχανικών συστημάτων που υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία ανάλογα με τα κριτήρια με τα οποία εξετάζονται.

1.2 Εισαγωγή στα Βιομηχανικά συστήματα

Βιομηχανικά συστήματα τα οποία παράγουν διάφορα είδη προϊόντων σε μεγάλες ποσότητες, συνήθως αποτελούνται από ένα σύνολο σειριακά ή μη διατεταγμένων σταθμών επεξεργασίας (μηχανών). Κάθε μονάδα προϊόντος κινείται μέσα στο σύστημα κατά μήκος ενός προαποφασισμένου μονοπατιού και κάθε σταθμός επεξεργασίας εκτελεί τις ίδιες εργασίες κάθε φορά καθώς ένα συγκεκριμένο προϊόν φτάνει σε αυτόν για επεξεργασία.

Ιδιαίτερα σημαντικό είναι το γεγονός ότι προβλήματα τα οποία παρουσιάζονται σε κάποιο σημείο ενός βιομηχανικού συστήματος μπορούν να έχουν αρνητική επίδραση σε άλλα σημεία του συστήματος. Αυτά τα προβλήματα μπορούν να οδηγήσουν σε δυσλειτουργία της ροής των προϊόντων, διότι η ποσότητα του προϊόντος που είναι αποθηκευμένη μεταξύ δυο γειτονικών σταθμών επεξεργασίας είναι περιορισμένη.
Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι ένα προϊόν πρέπει να επεξεργαστεί από δυο διαδοχικές μηχανές πριν θεωρηθεί ότι είναι έτοιμο. Αν μια από τις δυο μηχανές βρεθεί εκτός λειτουργίας (down, failed) για κάποιο λόγο, τότε αυτόματα η άλλη μηχανή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί έστω και αν λειτουργεί κανονικά και έτσι αναγκαστικά πρέπει να περιμένει μέχρι την ολοκλήρωση της επιδιόρθωσης της ήδη χαλασμένης μηχανής Δηλαδή η βλάβη μιας μηχανής επηρεάζει άμεσα τις ΄΄γειτονικές΄΄ της μηχανές με άμεση συνέπεια η δυσλειτουργία αυτή να μεταδίδεται από ένα σημείο του συστήματος στο άλλο. Ένας τρόπος για να περιορίσουμε το φαινόμενο αυτό είναι να αυξήσουμε τον ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο (buffer) μεταξύ των διαδοχικών μηχανών. Ωστόσο οι αποθηκευτικοί χώροι συνήθως κοστίζουν ακριβά και συνήθως δεν είναι προφανής ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να τους κατανείμουμε.
Η κατανομή του αποθηκευτικού χώρου ανάμεσα στις γειτονικές μηχανές πρέπει να γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να πετυχαίνουμε ταυτόχρονα μεγιστοποίηση της απόδοσης. Έτσι αν κάποιος ενδιαφέρεται για τον βέλτιστο σχεδιασμό ενός βιομηχανικού συστήματος θα πρέπει να κατανείμει με ένα βέλτιστο τρόπο ταυτόχρονα τόσο τους σταθμούς επεξεργασίας (Server Allocation Problem (SAP)) όσο και τους ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους (BAP) με σκοπό ταυτόχρονα τη μεγιστοποίηση της απόδοσης.

Βέβαια αυτό προϋποθέτει ότι πρέπει πρώτα να είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε την απόδοση του συστήματος και μετά να αποφασίσουμε για τη βέλτιστη κατανομή τόσο του αποθηκευτικού χώρου ανάμεσα στις μηχανές, όσο και των μηχανών. Αυτό αποδεικνύει γιατί ο προσδιορισμός της απόδοσης ενός βιομηχανικού συστήματος είναι ιδιαίτερα σημαντικό θέμα, η λύση του οποίου βοηθά σημαντικά την επίλυση και άλλων προβλημάτων (π.χ. BAP, SAP κ.α.).

Έτσι λοιπόν πρέπει να βλέπουμε το βιομηχανικό σύστημα σαν σύνολο όταν χρειάζεται να πάρουμε αποφάσεις σχετικά με το σχεδιασμό αλλά και τον έλεγχό του.
Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με τα προβλήματα εκείνα τα οποία οδηγούν σε ΄΄τυχαίες΄΄ δυσλειτουργίες στη ροή των προϊόντων. Αυτές οι δυσλειτουργίες μπορεί να οφείλονται στους τυχαίους χρόνους επεξεργασίας κάθε προϊόντος από τους σταθμούς επεξεργασίας, στις βλάβες που μπορεί να παρουσιαστούν στους σταθμούς επεξεργασίας καθώς επίσης και σε προβλήματα ποιότητας (παραγωγή ελαττωματικών προϊόντων) που είναι πιθανόν να παρουσιαστούν κατά την παραγωγική διαδικασία.
Η μέθοδος που συνήθως χρησιμοποιείται για να προβλέψουμε την απόδοση ενός προσχεδιασμένου βιομηχανικού συστήματος είναι αυτή της προσομοίωσης. Ωστόσο η προσομοίωση είναι συνήθως ιδιαίτερα χρονοβόρα ιδίως όταν πρέπει να εξετασθούν συστήματα με πολλούς σταθμούς επεξεργασίας.
Για αυτό το λόγο τις τελευταίες δεκαετίες έχουν αναπτυχθεί διάφορες αναλυτικές μέθοδοι που αφορούν τα βιομηχανικά συστήματα. Οι μέθοδοι αυτοί μας επιτρέπουν να κάνουμε με ένα ιδιαίτερα ταχύ τρόπο προσεγγιστικές αναλύσεις για την απόδοση ενός προσχεδιασμένου βιομηχανικού συστήματος.
Χρησιμοποιώντας αυτές τις μεθόδους μπορούμε να εντοπίσουμε με ένα εύκολο τρόπο ποιές είναι οι ΄΄ελκυστικές΄΄ λύσεις για το σύστημά μας, ενώ μπορούμε να απορρίψουμε εξ αρχής τις μη ΄΄ελκυστικές΄΄ λύσεις. Ύστερα από αυτό θα μπορούσαμε και πάλι να χρησιμοποιήσουμε προσομοίωση για να βρούμε την βέλτιστη λύση ανάμεσα στις ΄΄ελκυστικές΄΄ λύσεις.
Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με αναλυτικές μεθόδους για τον προσδιορισμό της απόδοσης συγκεκριμένου τύπου βιομηχανικών συστημάτων με γραμμική και μη γραμμική ροή των υλικών τους, συγκρίνοντάς τες με μοντέλα προσομοίωσης με σκοπό να αναδείξουμε τόσο τα πλεονεκτήματά τους αλλά και τους περιορισμούς τους σε σχέση με την προσομοίωση.

1.3 Κατηγοριοποίηση Βιομηχανικών Συστημάτων

Τα βιομηχανικά συστήματα που συναντώνται στην διεθνή βιβλιογραφία, διακρίνονται σε δυο βασικές κατηγορίες. Οι δύο αυτές κατηγορίες είναι οι *γραμμές παραγωγής (flow lines ή production lines)* και τα *job shops*. Το βασικό χαρακτηριστικό των γραμμών παραγωγής είναι ότι όλα τα παραγόμενα προϊόντα πρέπει υποχρεωτικά να ΄΄επισκεφθούν΄΄ τις μηχανές για επεξεργασία με την ίδια σειρά. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι γραμμές παραγωγής να μην παράγουν μεγάλη ποικιλία διαφορετικών προϊόντων. Λόγω όμως του ότι όλα τα προϊόντα επισκέπτονται τις μηχανές για επεξεργασία με την ίδια σειρά, μπορεί να επιτευχθεί σχετικά εύκολα έλεγχος της ροής των προϊόντων με αποτέλεσμα τη δυνατότητα παραγωγής μεγάλου όγκου προϊόντων. Τα job shops αποτελούνται από διαφορετικού τύπου μηχανές που μπορούν να παράγουν διαφορετικά προϊόντα η κάθε μια. Το βασικό χαρακτηριστικό των job shops είναι ότι κάθε προϊόν μπορεί επισκεφθεί τις μηχανές για επεξεργασία με διαφορετική σειρά. Αν μια μηχανή παράγει μια

συγκεκριμένη χρονική στιγμή ένα προϊόν, τότε για την παραγωγή ενός άλλου τύπου προϊόντος από την ίδια μηχανή χρειάζεται κάποιος χρόνος για την προετοιμασία της αλλαγής αυτής. Όλα αυτά έχουν σαν αποτέλεσμα τα job shops να μην παράγουν μεγάλο όγκο προϊόντων. Το σημαντικό τους όμως πλεονέκτημα σε σχέση με τις γραμμές παραγωγής είναι ότι μπορούν να παράγουν μεγάλη ποικιλία διαφορετικού τύπου προϊόντων .

Οι γραμμές παραγωγής ανάλογα με τα κριτήρια με τα οποία εξετάζονται διακρίνονται στις παρακάτω κατηγορίες.

Αν το κριτήριο είναι η διάταξη και η τοπολογία των μηχανών διακρίνουμε τις εξής κατηγορίες βιομηχανικών συστημάτων

Σειριακές γραμμές παραγωγής (Serial Production Lines)
Μη σειριακές γραμμές παραγωγής (Non-Serial Production Lines)
Γραμμές παραγωγής με σταθμούς εργασίας που αποτελούνται από πολλές παράλληλες μηχανές επεξεργασίας

Αν το κριτήριο είναι ο τύπος των παραγόμενων προϊόντων έχουμε:

Γραμμές παραγωγής διακριτού τύπου προϊόντων (πχ βίδες κτλ.)
Γραμμές παραγωγής συνεχούς τύπου προϊόντων (πχ υγρά, καύσιμα κτλ)

Αν το κριτήριο είναι η αξιοπιστία των μηχανών έχουμε:

Αξιόπιστες γραμμές παραγωγής (Reliable Production Lines)
Μη αξιόπιστες γραμμές παραγωγής (Unreliable Production Lines)

Αν το κριτήριο είναι η συγχρονισμένη η όχι κίνηση των προϊόντων από τη μια μηχανή στην άλλη έχουμε:

Συγχρονισμένες γραμμές παραγωγής (Synchronous production lines)
Μη συγχρονισμένες γραμμές παραγωγής (Asynchronous production lines)

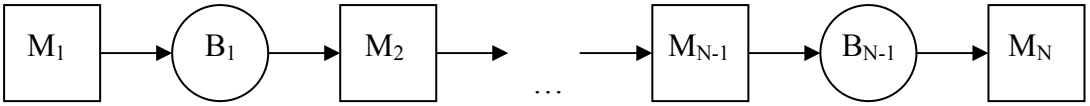
Αν το κριτήριο είναι η διαφορετικότητα στην επεξεργασία και ο όγκος των παραγόμενων προϊόντων έχουμε:

Ευέλικτα Βιομηχανικά Συστήματα (FMS)
Job shops

1.3.1 Σειριακές Γραμμές Παραγωγής

Στο σχήμα 1 απεικονίζεται μια σειριακή γραμμή παραγωγής. Τα τετράγωνα αναπαριστούν τους σταθμούς επεξεργασίας ή μηχανές M_i, i =1,…,N ενώ οι κύκλοι αναπαριστούν τους αποθηκευτικούς χώρους (buffers) B_j, j =1,…N-1 περιορισμένης χωρητικότητας C_j μεταξύ δυο γειτονικών μηχανών M_j και M_{j+1}. Η ροή των υλικών καθορίζεται από την κατεύθυνση των βελών όπως φαίνεται στο σχήμα 1.
Επίσης συνήθως υποθέτουμε ότι πάντοτε η πρώτη μηχανή του συστήματος (input machine) έχει διαθέσιμο υλικό για επεξεργασία, ενώ η τελευταία μηχανή του συστήματος μας (output machine) πάντοτε έχει ελεύθερο χώρο έπειτα από αυτήν (στα

δεξιά της), για να εναποθέσει τα προϊόντα που έχει επεξεργαστεί. Η ροή των προϊόντων σε γραμμές παραγωγής σαν αυτή του σχήματος 1 είναι γραμμική.



Σχήμα 1: Σειριακή γραμμή παραγωγής με N σταθμούς επεξεργασίας και N-1 ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους

Μια μηχανή παραλαμβάνει ένα προϊόν για επεξεργασία από τον αμέσως προηγούμενο αποθηκευτικό χώρο. Αν ο αποθηκευτικός χώρος είναι άδειος τότε η μηχανή δεν έχει κάποιο προϊόν για επεξεργασία και λέμε ότι είναι άδεια (starved). Όταν μια μηχανή έχει επεξεργαστεί ένα προϊόν τότε το προϊόν αυτό εναποτίθεται στον αποθηκευτικό χώρο που βρίσκεται μετά από αυτήν (εκτός αν η μηχανή αυτή είναι η τελευταία οπότε το προϊόν εγκαταλείπει το σύστημα). Αν ο αποθηκευτικός χώρος είναι γεμάτος τότε η εν λόγω μηχανή δεν μπορεί να εναποθέσει το επεξεργασμένο προϊόν στον αποθηκευτικό χώρο με αποτέλεσμα να μην μπορεί να απελευθερωθεί για να επεξεργαστεί το επόμενο προϊόν. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι η μηχανή είναι μπλοκαρισμένη (blocked).

1.3.2 Μη σειριακές γραμμές παραγωγής

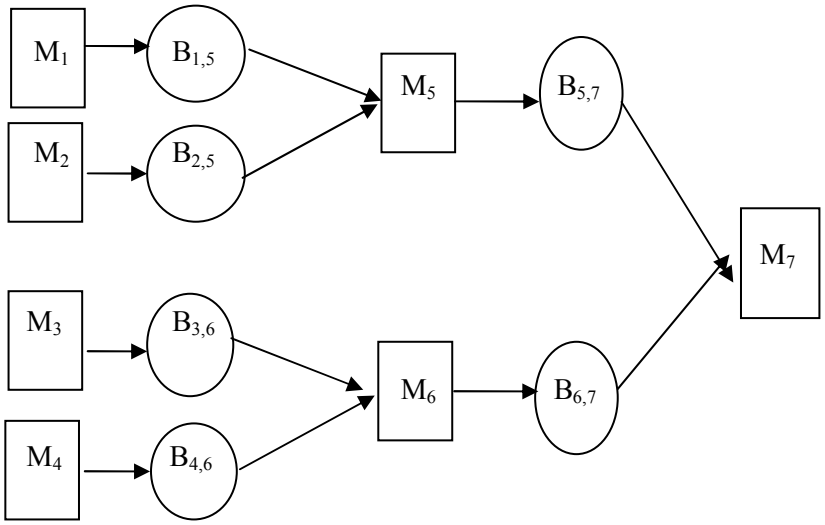
Οι μη σειριακές γραμμές παραγωγής διακρίνονται περαιτέρω στις παρακάτω υποκατηγορίες:

Γραμμές/ Συστήματα Συναρμολόγησης (Assembly Lines/Systems)
Γραμμές Αποσυναρμολόγησης (Disassembly Lines)
Γραμμές Συγχώνευσης (Merge Lines)
Γραμμές Διάσπασης (Split Lines)

Αυτό που παρατηρείται στις μη σειριακές γραμμές παραγωγής είναι ότι η ροή των προϊόντων δεν είναι γραμμική. Στην εργασία αυτή θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας κυρίως σε μη σειριακές γραμμές παραγωγής. Τα μοντέλα και οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την βελτιστοποίηση των συστημάτων αυτών μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην ειδική περίπτωση όπου η ροή των προϊόντων είναι γραμμική όπως στο σχήμα 1.

1.3.3 Συστήματα Συναρμολόγησης (Assembly Lines/Systems)

Μια περίπτωση στην οποία υπάρχει μη γραμμική ροή των προϊόντων είναι όταν το βιομηχανικό σύστημα έχει διαδικασίες συναρμολόγησης προϊόντων. Ένα παράδειγμα είναι η παραγωγή αυτοκινήτων στις αυτοκινητοβιομηχανίες όπου διαφορετικά εξαρτήματα ενός αυτοκινήτου συναρμολογούνται έτσι ώστε να σχηματιστεί το τελικό προϊόν.
Ένα παράδειγμα γραμμής συναρμολόγησης με 7 μηχανές φαίνεται στο σχήμα 2.

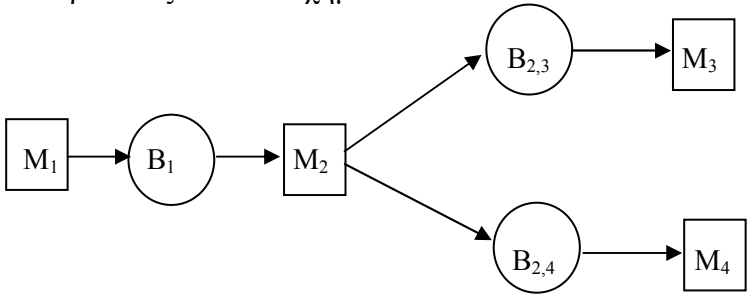


Σχήμα 2: Γραμμή συναρμολόγησης με επτά σταθμούς εργασίας και έξη ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους

Με $B_{i,j}$, i=1,2,3,4,5,6, j=5,6,7 συμβολίζουμε τον αποθηκευτικό χώρο που βρίσκεται ανάμεσα στις μηχανές M_i και M_j.
Στο σχήμα 2 οι μηχανές M_5,M_6,M_7 λειτουργούν ως μηχανές συναρμολόγησης, αυτό σημαίνει για παράδειγμα ότι η μηχανή M_5 πρέπει να πάρει μια μονάδα προϊόντος από τον αποθηκευτικό χώρο $B_{1,5}$ και μια μονάδα προϊόντος από τον αποθηκευτικό χώρο $B_{2,5}$, εν συνεχεία να συνδυάσει αυτά τα δυο προϊόντα έτσι ώστε να παραχθεί ένα συναρμολογημένο προϊόν. Η μηχανή 6 λειτουργεί με εντελώς παρόμοιο τρόπο. Τα προϊόντα που έχουν παραχθεί από τις μηχανές 5 και 6 στην συνέχεια συναρμολογούνται από την μηχανή 7.
Κάθε εργασία συναρμολόγησης εκτελείται μόνο αν τα απαιτούμενα προϊόντα είναι διαθέσιμα.
Αυτό αυτόματα σημαίνει ότι αν για οποιοδήποτε λόγο στον αποθηκευτικό χώρο $B_{3,6}$ δεν υπάρχει καμία μονάδα προϊόντος ενώ στον αποθηκευτικό χώρο $B_{4,6}$ υπάρχει ποσότητα προϊόντος τότε η μηχανή M_6 δεν μπορεί να λειτουργήσει καθώς θα πρέπει να περιμένει την εμφάνιση προϊόντος και στον αποθηκευτικό χώρο $B_{3,6}$.

1.3.4 Συστήματα Αποσυναρμολόγησης (Disassembly Lines/Systems)

Αρκετά παρόμοια συστήματα με τα συστήματα συναρμολόγησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουμε τη διαδικασία της αποσυναρμολόγησης.
Ένα τέτοιο σύστημα παρουσιάζεται στο σχήμα 3.

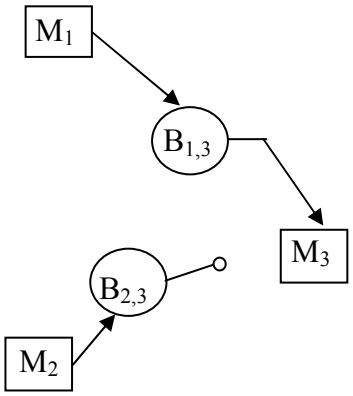


Σχήμα 3: Γραμμή αποσυναρμολόγησης με τέσσερις σταθμούς επεξεργασίας και τρεις ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους

Στο σύστημα που περιγράφεται στο σχήμα 3 η μηχανή M_2 λειτουργεί ως μηχανή αποσυναρμολόγησης. Έτσι λοιπόν η μηχανή M_2 στέλνει μια μονάδα προϊόντος στη μηχανή M_3 και μια μονάδα προϊόντος στη μηχανή M_4. Επίσης η μηχανή M_2 δεν μπορεί να λειτουργήσει όταν κάποιος από τους δυο αποθηκευτικούς χώρους $B_{2,3}$ η $B_{2,4}$ είναι γεμάτα
Είναι επίσης δυνατόν να έχουμε στο ίδιο σύστημα και μηχανές συναρμολόγησης και μηχανές αποσυναρμολόγησης.

1.3.5 Γραμμές συγχώνευσης (Merge Lines)

Ένα σύστημα στο οποίο συμβαίνουν εργασίες συγχώνευσης (merge operations) περιγράφεται στο σχήμα 4. Το σύστημα αυτό χρησιμοποιήθηκε από τον Helber (1999) για την ανάλυση μεγάλων γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης και βρόγχους επανεπεξεργασίας.



Σχήμα 4: Σύστημα συγχώνευσης εργασιών με τρεις μηχανές και δυο αποθηκευτικούς χώρους

Στο σχήμα 4 η μηχανή M_3 έχει δυο άμεσους προγόνους, τις μηχανές M_1 και M_2. Την χρονική στιγμή κατά την οποία η μηχανή M_3 θα επεξεργαστεί κάποιο προϊόν αναγκαστικά θα το παραλάβει από τον αποθηκευτικό χώρο $B_{1,3}$ ή από τον αποθηκευτικό χώρο $B_{2,3}$. Η μηχανή M_3 είναι άδεια (starved) αν και οι δυο αυτοί αποθηκευτικοί χώροι είναι άδειοι.

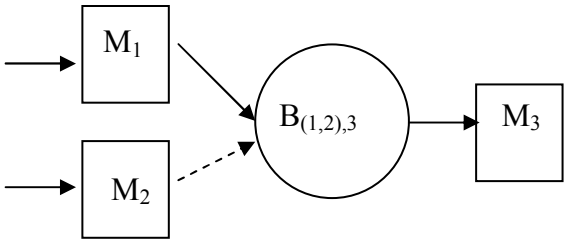
Επίσης υποθέτουμε ότι τα προϊόντα τα οποία προέρχονται από τους δυο αυτούς αποθηκευτικούς χώρους είναι ταυτόσημα. Πρέπει στο σημείο αυτό να επισημάνουμε ότι η μηχανή M_3, μηχανή συγχώνευσης (merging machine), ΄΄διαλέγει΄΄ τα προϊόντα από τους δυο αυτούς αποθηκευτικούς χώρους. Για λόγους ευκολίας υποθέτουμε ότι η μηχανή M_3 χρησιμοποιεί κάποιον κανόνα ΄΄προτεραιότητας΄΄ για την επιλογή του αποθηκευτικού χώρου από το οποίο θα παραλάβει το προϊόν.

Στο σχήμα 4 λοιπόν ο πρώτος σε προτεραιότητα αποθηκευτικός χώρος είναι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{1,3}$ από τον οποίο παραλαμβάνεται πάντοτε το προϊόν εκτός εάν είναι άδειος.
Εάν ο αποθηκευτικός χώρος $B_{1,3}$ είναι άδειος τότε μόνο το προϊόν παραλαμβάνεται από τον αποθηκευτικό χώρο $B_{2,3}$ (εάν ο αποθηκευτικός χώρος $B_{2,3}$ δεν είναι άδειος).

Στο σχήμα 4 ο αποθηκευτικός χώρος $B_{1,3}$ (πρώτης προτεραιότητας) αναπαριστάται συνδεδεμένος με το υπόλοιπο τμήμα του συστήματος, ενώ ο αποθηκευτικός χώρος $B_{2,3}$ (δεύτερης προτεραιότητας) αναπαριστάται στο σχήμα να μην είναι συνδεδεμένο με το υπόλοιπο τμήμα του συστήματος.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ιδιαίτερα το γεγονός ότι η μηχανή M_3 δεν λειτουργεί ως μηχανή συναρμολόγησης, διότι υπάρχει η δυνατότητα επιλογής αποθηκευτικού χώρου για την παραλαβή του προϊόντος, κάτι που δεν ισχύει στην περίπτωση όπου έχουμε μηχανή συναρμολόγησης καθώς τότε η μηχανή M_2 θα έπρεπε να παραλάβει και από τους δυο αποθηκευτικούς χώρους (τα διαφορετικά τύπου) προϊόντα τα οποία στη συνέχεια συναρμολογούνται από την μηχανή M_2.

Επειδή η χρήση του παραπάνω συστήματος για την ανάλυση μεγάλων γραμμών με εργασίες συγχώνευσης και βρόγχους επαναπεξεργασίας δεν αποδείχθηκε ιδιαίτερα αποτελεσματική (διότι παρουσιάζονταν κατά τον προσδιορισμό της απόδοσης μεγάλες αποκλίσεις από τη πραγματική απόδοση τέτοιων συστημάτων), ένα νέο σύστημα που μοντελοποιεί τις εργασίες συγχώνευσης εξετάστηκε από τους Helber και Merthens (1999) και Diamantidis, Papadopoulos and Vidalis (2004). Η χρήση του νέου αυτού συστήματος αποδείχθηκε σαφώς πιο αποτελεσματική από τη χρήση του συστήματος του σχήματος 4, προσδιορίζοντας με μεγαλύτερη ακρίβεια την απόδοση γραμμών με εργασίες συγχώνευσης και βρόγχους επαναπεξεργασίας. Το νέο αυτό σύστημα παρουσιάζεται στο σχήμα 5.



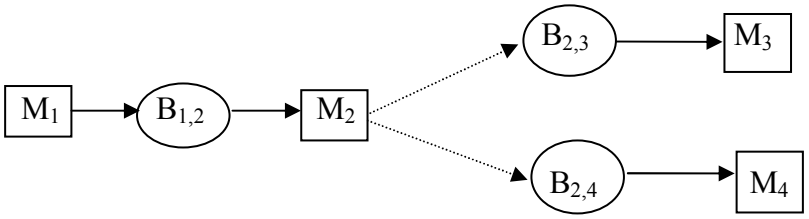
Σχήμα 5: Σύστημα συγχώνευσης με τρεις μηχανές και ένα αποθηκευτικό χώρο

Το σύστημα που παρουσιάζεται στο σχήμα 5 έχει αρκετές διαφορές από αυτό του σχήματος 4. Η πρώτη βασική διαφορά είναι ότι πριν τη μηχανή συγχώνευσης M_3 δεν υπάρχουν δυο αποθηκευτικοί χώροι όπως στο σχήμα 4. Υπάρχει μόνο ένας αποθηκευτικός χώρος ο $B_{(1,2),3}$ στο οποίο εναποθέτουν τα παραγόμενα προϊόντα οι μηχανές M_1 και M_2. Οι μηχανές M_1 και M_2 λειτουργούν παράλληλα παράγοντας ταυτόσημα προϊόντα και δεν δίνεται προτεραιότητα σε καμιά από τις δυο όπως συνέβαινε στο σύστημα του σχήματος 4. Έτσι η μηχανή M_3 επεξεργάζεται τα προϊόντα ανεξάρτητα από ποια μηχανή προέρχονται. Ο μοναδικός κανόνας που ισχύει είναι ότι όταν ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(1,2),3}$ γεμίσει τότε η μηχανή M_1 έχει προτεραιότητα σε σχέση με τη μηχανή M_2 να είναι η επόμενη που θα αποθέσει προϊόν στον αποθηκευτικό χώρο $B_{(1,2),3}$.

1.3.6 Γραμμές Διάσπασης (Split Lines)

Μια ακόμη κατηγορία συστημάτων στα οποία παρουσιάζεται μη γραμμική ροή των προϊόντων προκύπτει όταν εμφανίζονται προβλήματα ποιότητας κατά την

παραγωγική διαδικασία (δηλαδή κάποια προϊόντα σε κάποιο στάδιο της παραγωγής δεν πληρούν τις προδιαγραφές ποιότητας που έχουν τεθεί από τη διοίκηση του εργοστασίου). Αυτά τα προϊόντα λοιπόν χρειάζονται μια ειδική μεταχείριση (επανεπεξεργασία) η μερικές φορές απορρίπτονται απευθείας από το σύστημα χωρίς επανεπεξεργασία. Τέτοιου είδους γραμμές παραγωγής μοντελοποιούνται χρησιμοποιώντας συστήματα με εργασίες διάσπασης. Μια περίπτωση τέτοιου συστήματος φαίνεται στο σχήμα 6.



Σχήμα 6: Γραμμή διάσπασης με τέσσερις μηχανές και τρεις αποθηκευτικούς χώρους

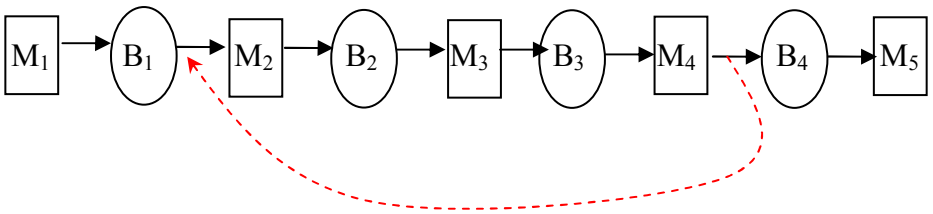
Στο σύστημα αυτό υπάρχει μια μηχανή η M_2 η οποία έχει δυο δυνατές επιλογές για εναποθέσει το προϊόν το οποίο έχει ήδη επεξεργαστεί.
Μετά την επεξεργασία ενός προϊόντος από τη μηχανή M_2 το προϊόν μπορεί να πάει είτε στη μηχανή M_3 είτε στη μηχανή M_4. Έτσι λοιπόν αν ένα προϊόν σε μια χρονική στιγμή t από τη μηχανή M_2 σταλεί στη μηχανή M_3 τότε την ίδια χρονική στιγμή t η μηχανή 4 δεν θα λάβει κανένα προϊόν.
Με την μέθοδο αυτή της διάσπασης (split) μοντελοποιούμε φαινόμενα στα οποία η πορεία των προϊόντων στο σύστημα εξαρτάται από την ποιότητά τους ανάλογα με το αν είναι ΄΄καλή΄΄ η ΄΄ελαττωματική΄΄.
Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να πούμε όλα τα ΄΄καλά΄΄ προϊόντα που παράγει η μηχανή M_2 θα στέλνονται στον αποθηκευτικό χώρο $B_{2,3}$ ενώ όλα τα ΄΄ελαττωματικά΄΄ προϊόντα που παράγει η μηχανή M_2, στέλνονται στον αποθηκευτικό χώρο $B_{2,4}$.
Προσπαθώντας να μοντελοποιήσουμε αυτή την κατάσταση θεωρούμε τα εξής:
Έστω ότι με D(i) συμβολίζουμε το σύνολο των αποθηκευτικών χώρων οι οποίοι βρίσκονται μετά τη μηχανή M_i.
Κάποιο προϊόν το οποίο έχει ήδη επεξεργαστεί από την μηχανή M_i στέλνεται στην μηχανή M_q με πιθανότητα $d_{i,q}$ ενώ προφανώς πρέπει να ισχύει ότι $\sum_{(i,q)\in D(i)} d_{i,q} = 1$.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να γίνει σαφές ότι υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ των εννοιών της αποσυναρμολόγησης (disassembly) και διάσπασης (split).

Όταν έχουμε εργασίες αποσυναρμολόγησης όπως για παράδειγμα η εργασία που εκτελεί η μηχανή M_2 στο σχήμα 3 τότε δεν υπάρχει επιλογή ανάμεσα στους διαφορετικούς αποθηκευτικούς χώρους που υπάρχουν αμέσως μετά την μηχανή M_2 και κάθε αποθηκευτικός χώρος παραλαμβάνει υποχρεωτικά μια μονάδα προϊόντος από την μηχανή M_2.

Όταν έχουμε εργασίες διάσπασης τότε υπάρχει μια επιλογή για τις εναλλακτικές πορείες που μπορεί να ακολουθήσει το προϊόν μόλις τελειώσει η επεξεργασία του από

την μηχανή M_2 του σχήματος 6 έπειτα από την οποία υπάρχουν οι εναλλακτικές επιλογές.
Έτσι για παράδειγμα αν θεωρήσουμε ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{2,3}$ είναι αυτός στον οποίο αποθηκεύονται τα ¨καλά¨ προϊόντα , ενώ στον αποθηκευτικό χώρο $B_{2,4}$ αποθηκεύονται τα ¨ελαττωματικά¨ προϊόντα και επίσης θεωρήσουμε ότι η μηχανή M_2 ολοκληρώνει την επεξεργασία ενός ¨καλού¨ προϊόντος και ο αποθηκευτικός χώρος $B_{2,3}$ είναι γεμάτος ενώ ο αποθηκευτικός χώρος $B_{2,4}$ δεν είναι γεμάτος τότε το προϊόν παραμένει στη μηχανή M_2 μέχρις ότου δημιουργηθεί χώρος για το προϊόν στον αποθηκευτικό χώρο $B_{2,3}$ μπλοκάροντας έτσι την λειτουργία όλου του συστήματος. Τα συστήματα διάσπασης (split) και συγχώνευσης (merge) χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση και ανάλυση γραμμών παραγωγής με βρόγχους επαναπεξεργασίας σαν αυτή του σχήματος 7

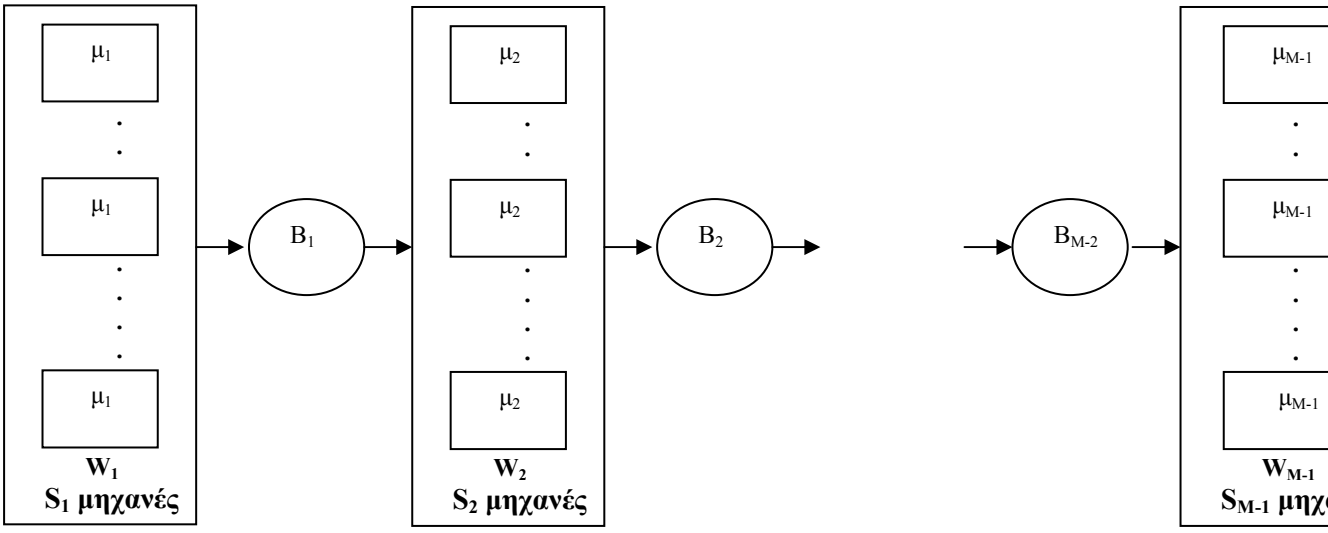


Σχήμα 7: Γραμμή παραγωγής με βρόγχο επαναπεξεργασίας

Στο σύστημα που απεικονίζεται στο σχήμα 7 ένα ποσοστό των προϊόντων που παράγει η μηχανή M_4 είναι ελαττωματικά. Όταν συμβαίνει αυτό τα ελαττωματικά προϊόντα στέλνονται στη μηχανή M_2 για επανεπεξεργασία. Τα προϊόντα που δεν είναι ελαττωματικά συνεχίζουν κανονικά τη ροή τους και πηγαίνουν για επεξεργασία στην μηχανή M_5. Η ανάλυση και βελτιστοποίηση της γραμμής παραγωγής του σχήματος 7 μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας συστήματα διάσπασης (split) και συγχώνευσης (merge) σαν αυτά που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες.

1.3.7 Γραμμές παραγωγής με σταθμούς εργασίας που αποτελούνται από πολλές παράλληλες μηχανές

Μια άλλη κατηγορία βιομηχανικών συστημάτων είναι εκείνη στην οποία κάθε σταθμός εργασίας αποτελείτα
επεξεργασίας. Ένα τέτοιο σύστημα παρουσιάζεται στο σχήμα 8.
Η γραμμή παραγωγής που απεικονίζεται στο σχήμα 8 αποτελείται από σταθμούς εργασίας W_i , i=1,…,
αποτελείται από S_i i=1,…,M παράλληλες μηχανές εξυπηρέτησης.
Οι κύκλοι αναπαριστούν τους αποθηκευτικούς χώρους (buffers) B_j, j =1,…M-1 περιορισμένης χωρητι
σταθμών εργασίας W_j και W_{j+1}. Κάθε μια από τις S_i παράλληλες μηχανές κάθε σταθμού εργασίας W_i
επεξεργασίας ή μπορεί επίσης όλες οι S_i παράλληλες μηχανές να έχουν τον ίδιο χρόνο επεξεργασίας.
ασχοληθούμε στο τρίτο μέρος της εργασίας.



Σχήμα 8: Γραμμή παραγωγής με σταθμούς εργασίας που αποτελούνται από παράλληλες μηχ

1.3.8 Γραμμές Παραγωγής διακριτού και συνεχούς τύπου προϊόντων

Όλες οι γραμμές παραγωγής που είδαμε στις προηγούμενες ενότητες μπορούν να παράγουν διάφορους τύπους προϊόντων . Αν τα προϊόντα που παράγει μια γραμμή παραγωγής είναι διακριτού τύπου (π.χ. καρέκλες, βίδες, ποτήρια κ.α.) τότε η γραμμή παραγωγής λέμε ότι είναι διακριτού τύπου προϊόντων. Αν τα προϊόντα που παράγονται είναι συνεχούς τύπου (π.χ. υγρά καύσιμα, χυτά κ.α.) τότε λέμε ότι η γραμμή παραγωγής είναι συνεχούς τύπου προϊόντων.

1.3.9 Αξιόπιστες και μη αξιόπιστες γραμμές παραγωγής

Οι γραμμές παραγωγής όπως είδαμε στις προηγούμενες ενότητες αποτελούνται από μηχανές και ενδεχομένως από αποθηκευτικούς χώρους. Αν οι μηχανές παθαίνουν βλάβες τότε οι μηχανές ονομάζονται μη αξιόπιστες και οι γραμμές παραγωγής επίσης μη αξιόπιστες (unreliable). Η εμφάνιση των βλαβών μπορεί να είναι σταθερή ή να ακολουθεί μια συγκεκριμένη κατανομή (π.χ. εκθετική, γεωμετρική κ.α.).
Η εμφάνιση των βλαβών μπορεί να εξαρτάται είτε από τον χρόνο (time dependent failures) που σημαίνει ότι οι βλάβες παρουσιάζονται ανά συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα, είτε από την συνεχή λειτουργία της μηχανής (operation dependent failures), δηλαδή οι βλάβες εμφανίζονται ανεξαρτήτως του χρόνου και μόνο όταν οι μηχανές βρίσκονται σε λειτουργία.
Αν οι μηχανές υποθέτουμε ότι δεν παθαίνουν ποτέ βλάβες τότε η γραμμή παραγωγής λέγεται πλήρως αξιόπιστη (perfectly reliable).

1.3.10 Συγχρονισμένες και μη συγχρονισμένες γραμμές παραγωγής

Αν σε μια γραμμή παραγωγής όλες οι μηχανές έχουν σταθερούς και ταυτόσημους χρόνους επεξεργασίας και επιπλέον είναι αξιόπιστες, τότε η κίνηση των προϊόντων μέσα στη γραμμή παραγωγής θα ήταν πλήρως συγχρονισμένη. Σε μια τέτοια γραμμή παραγωγής κανένα προϊόν δεν θα περίμενε για επεξεργασία σε κάποιο αποθηκευτικό χώρο μεταξύ δυο διαδοχικών μηχανών. Αυτό θα είχε σαν συνέπεια την μη αναγκαιότητα ύπαρξης αποθηκευτικών χώρων επειδή θα ήταν μονίμως άδειοι. Τέτοιου είδους γραμμές παραγωγής λέγονται συγχρονισμένες γραμμές παραγωγής.
Δυστυχώς όμως στην πραγματικότητα δεν είναι εφικτό να έχουμε πλήρως συγχρονισμένες γραμμές παραγωγής για αρκετούς λόγους για τους οποίους μπορεί να παρουσιαστούν δυσλειτουργίες στο βιομηχανικό σύστημα.

Για παράδειγμα αν ένας άνθρωπος εκτελεί κάποιες επαναλαμβανόμενες εργασίες, ο χρόνος που τις εκτελεί μπορεί να ποικίλει ανάλογα με τον αν είναι κουρασμένος η όχι, ανάλογα με την εμπειρία του κτλ.
Για το λόγο αυτό παρουσιάζονται πολλές φορές φαινόμενα όπως η μη γραμμική ροή των προϊόντων, ΄΄μπλοκάρισμα΄΄ των μηχανών κτλ
Ένας ακόμη λόγος είναι η ύπαρξη στο σύστημα μηχανών που έχουν διαφορετικούς χρόνους επεξεργασίας μεταξύ τους και είναι μη αξιόπιστες με διαφορετικούς χρόνους εμφάνισης και επιδιόρθωσης βλαβών. Γραμμές παραγωγής στις οποίες η κίνηση των προϊόντων δεν είναι συγχρονισμένη λέγονται ασύγχρονες γραμμές παραγωγής.

1.3.11 Ευέλικτα βιομηχανικά συστήματα και job shops

Ένα job shop συνήθως αποτελείται από αρκετές μηχανές διαφορετικού τύπου που εκτελούν συγκεκριμένες εργασίες. Η μορφή ενός job shop συνήθως είναι τέτοια ώστε οι μηχανές που εκτελούν τις ίδιες η παρόμοιες εργασίες να βρίσκονται συγκεντρωμένες κατά ομάδες στον ίδιο χώρο. Οι διαφορετικές ομάδες αυτές μηχανών μπορούν να βρίσκονται είτε στο ίδιο κτίριο είτε σε διαφορετικά κτίρια του εργοστασίου. Η βασική διαφορά ενός job shop και μιας γραμμής παραγωγής είναι ότι κάθε προϊόν σε ένα job shop μπορεί να ακολουθήσει διαφορετική πορεία μεταξύ των μηχανών πριν ολοκληρωθεί η επεξεργασία του, ενώ στις γραμμές παραγωγής η πορεία των προϊόντων είναι η ίδια για όλα τα προϊόντα. Επίσης σε ένα job shop ένα προϊόν μπορεί να επισκεφθεί την ίδια μηχανή παραπάνω από μια φορές κάτι που δεν μπορεί να συμβεί σε μια γραμμή παραγωγής.
Τα job shops μπορούν να παράγουν μεγάλη ποικιλία διαφορετικών προϊόντων αλλά δυστυχώς σε μικρή ποσότητα, ενώ οι γραμμές παραγωγής μπορούν να παράγουν μεγάλη ποσότητα ενός μόνο τύπου προϊόντων.
Το κύριο χαρακτηριστικό των ευέλικτων βιομηχανικών συστημάτων είναι ότι οι μηχανές από τις οποίες αποτελείται ελέγχονται μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή. Όλη η κίνηση των προϊόντων μέσα στο σύστημα ελέγχεται επίσης από ηλεκτρονικό υπολογιστή και οι μηχανές μπορούν να εκτελέσουν πιο πολύπλοκες διαδικασίες παράγοντας έτσι πολλά διαφορετικά προϊόντα, περισσότερα από ότι ένα job shop αλλά σε σχετικά μικρό όγκο. Ο όγκος των παραγόμενων προϊόντων από ένα ευέλικτο βιομηχανικό σύστημα είναι συνήθως μικρότερος από ότι σε ένα job shop.

1.3.12 Μέτρα απόδοσης

Η αξιολόγηση των βιομηχανικών συστημάτων γίνεται με βάση κάποιων μέτρων απόδοσης. Τα συνηθέστερα μέτρα απόδοσης που χρησιμοποιούνται στη διεθνή βιβλιογραφία είναι τα εξής:

- **Ρυθμός παραγωγής ή Απόδοση (Production Rate)**
  Είναι ο αριθμός των προϊόντων που παράγονται από το βιομηχανικό σύστημα ανά μονάδα χρόνου.

- **Αριθμός των ημιακατέργαστων προϊόντων (Work In Progress: WIP)**
  Είναι ο συνολικός αριθμός των προϊόντων που βρίσκονται στο βιομηχανικό σύστημα.

- **Μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα (Flow Time)**
  Είναι ο μέσος χρόνος που χρειάζεται ένα προϊόν από τη στιγμή που θα εισέλθει στο βιομηχανικό σύστημα μέχρι την στιγμή που θα εξέλθει από το σύστημα.

Βιβλιογραφία

[1] Diamantidis, A.C., Papadopoulos, C.T., and Vidalis, M.I., (2004), "Exact analysis of a discrete material three station one buffer merge system with unreliable machines", *International Journal of Production Research,*42(4), pp. 651—675.

[2] Helber, S. (1999), *Performance Analysis of Flow-Lines with Nonlinear Flow of Material*, Volume 473 of Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag.

[3] Helber, S. and Mehrtens, N. (1999), "Exact analysis of a continuous material merge system with limited buffer capacity and three stations", Technical Report, D-38678, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μια σύντομη ανασκόπηση των μεθόδων εκτίμησης και βελτιστοποίησης των βιομηχανικών συστημάτων που συναντώνται στη διεθνή βιβλιογραφία. Η ανασκόπηση αυτή έχει σαν κύριο στόχο να προϊδεάσει τον αναγνώστη σχετικά με τις μεθόδους που έχουν χρησιμοποιηθεί κατά καιρούς στην ανάλυση και μελέτη των βιομηχανικών συστημάτων.
Αν και σε κάθε ένα από τα μέρη της διατριβής που ακολουθούν παρουσιάζεται αναλυτικά η βιβλιογραφική ανασκόπηση του θέματος που εξετάζεται ανά κεφάλαιο, ωστόσο στο σημείο αυτό η ανασκόπηση που παρουσιάζεται αφορά το σύνολο των βιομηχανικών συστημάτων ανεξαρτήτως από τη κατηγορία στην οποία ανήκουν.

Στην ενότητα 2.2 παρουσιάζεται μια ανασκόπηση των μεθόδων εκτίμησης και βελτιστοποίησης που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των βιομηχανικών συστημάτων και παρουσιάζεται η σχέση αλληλεξάρτησης που υπάρχει μεταξύ τους. Στην ενότητα 2.3 παρουσιάζεται μια εκ των εκτιμητικών μεθόδων, η μέθοδος της Μαρκοβιανής ανάλυσης ενώ στην ενότητα 2.4 παρουσιάζονται κάποιες άλλες αναλυτικές μέθοδοι και η μέθοδος προσομοίωσης. Στη παράγραφο 2.5 παρουσιάζεται η κλασσική μέθοδος της αποσύνθεσης που χρησιμοποιείται σαν εκτιμητική μέθοδος για την εκτίμηση της απόδοσης όλων των γραμμών παραγωγής που εξετάζονται στα επόμενα κεφάλαια της διατριβής αυτής, ενώ τέλος στην ενότητα 2.6 παρουσιάζεται μια ακόμη εκτιμητική μέθοδος, η μέθοδος της συνάθροισης, η οποία επίσης χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της απόδοσης πολλών τύπων βιομηχανικών συστημάτων.

2.2 Μέθοδοι εκτίμησης και βελτιστοποίησης γραμμών παραγωγής

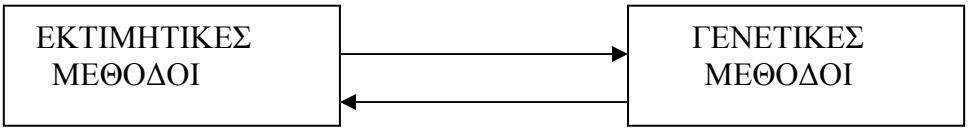
Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν αναπτυχθεί διάφορες αναλυτικές μέθοδοι για την ανάλυση, σχεδίαση και βελτιστοποίηση των βιομηχανικών συστημάτων. Οι μέθοδοι αυτές χωρίζονται σε δυο βασικές κατηγορίες:

- (1) Εκτιμητικές μέθοδοι
- (2) Γενετικές μέθοδοι ή μέθοδοι βελτιστοποίησης

Οι *εκτιμητικές μέθοδοι* στοχεύουν στην εκτίμηση διαφόρων μέτρων απόδοσης των βιομηχανικών συστημάτων (π.χ. ρυθμός παραγωγής, ενδιάμεσο απόθεμα, χρόνος παραγωγής, κ.α.), με τη χρήση είτε αναλυτικών μεθόδων είτε προσομοίωσης. Δυο βασικές αναλυτικές μέθοδοι που συναντώνται στη διεθνή βιβλιογραφία είναι: (i) Η Μαρκοβιανή ανάλυση (Hillier and Boling, 1967 και Heavey, Papadopoulos and Browne, 1993) και (ii) Η μέθοδος της αποσύνθεσης (decomposition method) η οποία αρχικά αναπτύχθηκε από τον Gershwin (1987) και στη συνέχεια βελτιώθηκε από τους Dallery, David and Xie (1988).
Οι δυο αυτές μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί και εφαρμοστεί κυρίως στη περίπτωση των σειριακών γραμμών παραγωγής.
Τα τελευταία χρόνια έχει παρατηρηθεί μια προσπάθεια επέκτασης της μεθόδου της αποσύνθεσης και στην περίπτωση γραμμών με μη-γραμμική ροή προϊόντων (γραμμές συναρμολόγησης/αποσυναρμολόγησης, Di Mascolo (1991), Gershwin (1991) αλλά και γραμμών με βρόγχους Helber (1999)).
Επίσης επέκταση και χρήση της μεθόδου της αποσύνθεσης έχει γίνει σε γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης/διάσπασης (merge/split operations) Helber

(1999), Helber and Jusic (2002) αλλά και σειριακές γραμμές που παράγουν περισσότερους του ενός τύπους προϊόντων Nemec (1999).

Οι *γενετικές μέθοδοι ή μέθοδοι βελτιστοποίησης* στοχεύουν στην εύρεση των κατάλληλων τιμών διαφόρων παραμέτρων του συστήματος οι οποίες αριστοποιούν ορισμένα μέτρα απόδοσης (π.χ. μεγιστοποίηση του μέσου ρυθμού παραγωγής ή ελαχιστοποίηση του μέσου αποθέματος των (ημί)ακατέργαστων υλικών, μεταξύ άλλων). Τέτοιες μέθοδοι μπορεί να είναι διάφορες στοχαστικές μέθοδοι αναζήτησης, γενετικοί αλγόριθμοι, προσομοιωτική ανόπτυση (simulated annealing), Tabu-Search κ.α.
Όπως αναφέρεται στο βιβλίο Papadopoulos et al. (1993) οι δυο αυτές κατηγορίες μεθόδων δεν είναι ασύνδετες μεταξύ τους. Υπάρχει μια σχέση αλληλεξάρτησης μεταξύ των δυο αυτών μεθόδων η οποία φαίνεται στο σχήμα 9.



Σχήμα 9: Αλληλεξάρτηση εκτιμητικών και γενετικών μεθόδων

Οι εκτιμητικές μέθοδοι αποτελούνται κυρίως από τις παρακάτω μεθόδους:

- Μαρκοβιανή Ανάλυση
- Μέθοδος της Αποσύνθεσης
- Προσομοίωση
- Μέθοδος της συνάθροισης
- Petri nets
- Προσεγγιστικές μέθοδοι

Από τις εκτιμητικές μεθόδους όλες οι παραπάνω μέθοδοι πλην της προσομοίωσης ονομάζονται επίσης και αναλυτικές μέθοδοι. Στην επόμενη παράγραφο δίνεται ένα παράδειγμα στο οποίο παρουσιάζονται οι διαφορές της μεθόδου της προσομοίωσης σε σχέση με τις υπόλοιπες αναλυτικές μεθόδους.

Οι γενετικές μέθοδοι αποτελούνται από τις παρακάτω μεθόδους:

- Μέθοδος της απαρίθμησης
- Ευρετικές μέθοδοι
- Μέθοδος της προσομοιωτικής ανόπτυσης
- Γενετικοί αλγόριθμοι
- Tabu-search
- Hooke-Jeeves

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με την μέθοδο της αποσύνθεσης (decomposition method) επεκτείνοντας την χρήση της σε γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης και σειριακές γραμμές με παράλληλες μηχανές επεξεργασίας σε κάθε σταθμό εργασίας.

2.3 Μαρκοβιανή Ανάλυση

Τα βιομηχανικά συστήματα ανήκουν στην ευρύτερη κατηγορία των δυναμικών συστημάτων. Με τον όρο δυναμικά συστήματα εννοούμε συστήματα των οποίων η συμπεριφορά μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου. Τα συστήματα αυτά συνήθως εξετάζονται κάτω από τις παρακάτω προϋποθέσεις.

- Ο χρόνος μπορεί να είναι διακριτού η συνεχούς τύπου
- Ο χώρος των δυνατών καταστάσεων μπορεί να είναι διακριτού, συνεχούς τύπου ή συνδυασμός και των δυο.
- Οι μεταβλητές του συστήματος μπορεί να είναι τυχαίες ή σταθερές

Με τον όρο διακριτού τύπου εννοούμε ότι οι μεταβλητές ή ποσότητες μπορούν να μετρηθούν με τη χρήση ακέραιων αριθμών, ενώ με τον όρο συνεχούς τύπου εννοούμε ότι οι μεταβλητές ή ποσότητες μπορούν να μετρηθούν με τη χρήση πραγματικών αριθμών

Μαρκοβιανή αλυσίδα ή διαδικασία, είναι ένα στοχαστικό δυναμικό σύστημα στο οποίο ισχύει η Μαρκοβιανή (αμνήμων) ιδιότητα. Δηλαδή η συμπεριφορά του συστήματος στο μέλλον (χρονική στιγμή t+1) εξαρτάται μόνο από την παρούσα κατάσταση (χρονική στιγμή t) και όχι από την κατάσταση στην οποία βρισκόταν στο παρελθόν (χρονική στιγμή t-1).
Το βασικό πλεονέκτημα της Μαρκοβιανής ανάλυσης είναι ότι δίνει ακριβή αποτελέσματα για τον προσδιορισμό των διαφόρων μέτρων απόδοσης για τα συστήματα στα οποία χρησιμοποιείται.

Δυστυχώς η μέθοδος της Μαρκοβιανής ανάλυσης δεν μπορεί να εφαρμοστεί για ΄΄μεγάλα΄΄ συστήματα, δηλαδή συστήματα με πολλές μηχανές και ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους διότι ο χώρος των πιθανών καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα γίνεται τεράστιος με αποτέλεσμα τη δημιουργία πολύ μεγάλου αριθμού εξισώσεων οι οποίες είναι πρακτικά αδύνατο να λυθούν.
Για παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι έχουμε μια σειριακή γραμμή παραγωγής με k μηχανές και k-1 ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους τότε ο αριθμός των πιθανών διακριτών καταστάσεων μπορεί να βρεθεί πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό των πιθανών καταστάσεων που μπορεί να βρεθεί η κάθε μια μηχανή επί τον αριθμό των δυνατών τιμών που μπορεί να πάρει η χωρητικότητα κάθε ενός αποθηκευτικού χώρου. Υποθέτοντας ότι κάθε μια μηχανή μπορεί να βρεθεί σε δυο πιθανές καταστάσεις (χαλασμένη ή σε λειτουργία) και ότι κάθε αποθηκευτικός χώρος μπορεί να βρεθεί σε C_i+1 καταστάσεις $n_i=0,\ldots,C_i$,όπου C_i είναι η χωρητικότητα του i-οστού αποθηκευτικού χώρου και n_i η τρέχουσα ποσότητα προιόντος που περιέχει ανά πάσα στιγμή, ο συνολικός αριθμός καταστάσεων δίνεται από τον τύπο

$$M = 2^k \prod_{i=0}^{k-1} (C_i + 1) \qquad (1)$$

Μια γραμμή παραγωγής με 20 μηχανές και 19 ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους χωρητικότητας 10 μονάδων προϊόντος ο καθένας, έχει περισσότερες από 6.41×10^{25} πιθανές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί. Ο παραπάνω αριθμός κάνει απαγορευτική την επίλυση του αντίστοιχου συστήματος γραμμικών εξισώσεων που προκύπτει με στόχο την εύρεση των στάσιμων πιθανοτήτων.

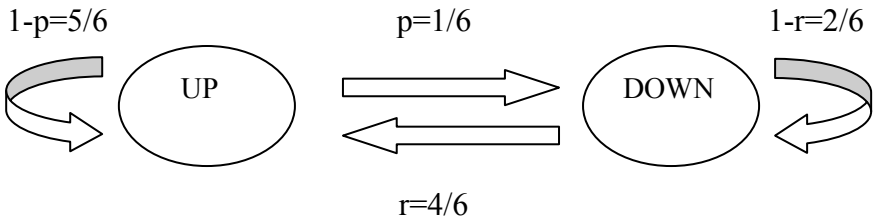
Ένα παράδειγμα Μαρκοβιανής ανάλυσης για ένα σύστημα που αποτελείται από μια μηχανή δίνεται στην επόμενη παράγραφο.

2.4 Αναλυτικές μέθοδοι και προσομοίωση

Η ανάλυση των γραμμών παραγωγής με στόχο των προσδιορισμό διαφόρων μέτρων απόδοσης μπορεί να γίνει με τη χρήση δυο μεθόδων.

α) Της προσομοίωσης
β) Αναλυτικών μεθόδων

Αρκετές φορές η προσομοίωση είναι η μοναδική μέθοδος η οποία χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των μέτρων απόδοσης μια γραμμής παραγωγής. Αυτό συμβαίνει όταν η υπό εξέταση γραμμή παραγωγής είναι αρκετά πολύπλοκη έτσι ώστε ή να μην υπάρχουν άλλες αναλυτικές μέθοδοι, ή αν υπάρχουν να μην δίνουν ιδιαίτερα καλά αποτελέσματα.
Ένα πολύ σημαντικό ερώτημα που προκύπτει κατά την μελέτη και ανάλυση των γραμμών παραγωγής είναι αν κατά πόσο η χρονοβόρος και απαιτητική διαδικασία της προσομοίωσης, μπορεί να αντικατασταθεί από αναλυτικές μεθόδους η οποίες είναι σαφώς γρηγορότερες παρέχοντας σχεδόν ίδια αποτελέσματα με αυτά της προσομοίωσης. Η διαφορά μεταξύ των δυο μεθόδων μπορεί να γίνει αισθητή χρησιμοποιώντας το παρακάτω παράδειγμα.
Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια μηχανή η οποία λειτουργεί απομονωμένη (δηλαδή δεν περιστοιχίζεται από αποθηκευτικούς χώρους και άλλες μηχανές). Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η μηχανή δεν είναι ποτέ μπλοκαρισμένη (blocked) ή άδεια (starved).
Υποθέτουμε επίσης ότι η πιθανότητα p εμφάνισης βλάβης τη χρονική στιγμή t δοθέντος ότι η μηχανή λειτουργούσε τη χρονική στιγμή t-1 είναι ίση με 1/6. Επίσης η πιθανότητα r επιδιόρθωσης της μηχανής τη χρονική στιγμή t δοθέντος ότι η μηχανή δεν λειτουργούσε τη χρονική στιγμή t-1 είναι ίση με 4/6. Δηλαδή οι πιθανές καταστάσεις που μπορεί να βρεθεί η μηχανή είναι δυο (χαλασμένη (up) και σε λειτουργία (down)) και οι πιθανότητες μετάβασης από τη μια κατάσταση στην άλλη δίνονται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 10: Πιθανότητες μετάβασης από τη μια κατάσταση στην άλλη

Για να προσομοιώσουμε τη συμπεριφορά του συστήματος για 30 λεπτά υποθέτοντας ότι αρχικά η μηχανή λειτουργεί κάνουμε τα εξής. Τις πιθανότητες εμφάνισης και επιδιόρθωσης βλαβών τις προσομοιώνουμε με τις ρίψεις ενός ζαριού.
Αν η μηχανή λειτουργεί και το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού είναι 1 (με πιθανότητα 1/6), τότε η μηχανή παθαίνει βλάβη. Αν η μηχανή είναι χαλασμένη και το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού είναι ένα νούμερο μικρότερο από 5 (με πιθανότητα 4/6), τότε η βλάβη της μηχανής επιδιορθώνεται. Κάνοντας λοιπόν 30 ρίψεις του ζαριού (κάθε ρίψη αντιστοιχεί σε ένα λεπτό χρόνου προσομοίωσης) και μετρώντας τα

αποτελέσματα διαπιστώνουμε ότι η μηχανή βρίσκεται σε λειτουργία στο 90% περίπου του συνολικού χρόνου.
Αν επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία ίσως πάρουμε λίγο διαφορετικά αποτελέσματα. Αν όμως προσομοιώσουμε το σύστημα για περισσότερο χρόνο τότε τα αποτελέσματα που θα πάρουμε όσες επαναλήψεις και αν κάνουμε θα είναι παρόμοια μεταξύ τους. Το συμπέρασμα που βγαίνει από όλα αυτά είναι ότι τα αποτελέσματα της προσομοίωσης είναι ένα σύνολο αριθμών οι οποίοι πρέπει να ερμηνευθούν κατάλληλα. Αν κάποια από τις παραμέτρους του συστήματος αλλάξει τότε όλη η παραπάνω διαδικασία πρέπει να επαναληφθεί με διαφορετικό ενδεχομένως τρόπο κάτι που είναι χρονοβόρο και αρκετά επίπονο.

Ένας άλλος τρόπος να εκτιμήσουμε την συμπεριφορά του παραπάνω συστήματος είναι χρησιμοποιώντας μια αναλυτική μέθοδο όπως για παράδειγμα τη μέθοδο της Μαρκοβιανής ανάλυσης. Η κατάσταση της μηχανής τη χρονική στιγμή t εξαρτάται μόνο από την κατάσταση της μηχανής τη χρονική στιγμή t-1 και τις πιθανότητες επιδιόρθωσης και εμφάνισης βλαβών r και p.
Δηλαδή η Μαρκοβιανή ιδιότητα ισχύει για το σύστημα αυτό, οπότε η συμπεριφορά του μπορεί να προβλεφθεί με τη βοήθεια της Μαρκοβιανής ανάλυσης.

Η πιθανότητα η μηχανή να λειτουργεί (up) τη χρονική στιγμή t υπολογίζεται ως εξής:

Prob[up τη στιγμή t] = (1-p) prob[up τη στιγμή t-1] + r prob[down τη στιγμή t-1]
Επειδή ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε τις στάσιμες πιθανότητες οι οποίες δεν μεταβάλλονται σε σχέση με το χρόνο μπορούμε να παραλείψουμε τον χρόνο οπότε έχουμε
prob[up] = (1-p) prob[up] + r prob[down]

Με ακριβώς παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

prob[down]= (1-r) prob[down]+ p prob[up]

προφανώς ισχύει ότι prob[up]+prob[down]=1
Λύνοντας τώρα το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων που προκύπτει βρίσκουμε ότι

prob[up]=$\frac{r}{r+p}$ και prob[down]=$\frac{p}{r+p}$

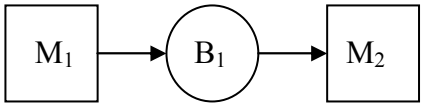
Για τι τιμές p=1/6 και r=4/6 των πιθανοτήτων εμφάνισης βλαβών και επιδιόρθωσης αντίστοιχα βρίσκουμε ότι η μηχανή λειτουργεί στο 80% του χρόνου. Προσομοιώνοντας το σύστημα για μεγάλο χρονικό διάστημα βρίσκουμε αποτέλεσμα πολύ κοντά στο 80%.
Από το παράδειγμα αυτό βλέπουμε ότι η αναλυτική μέθοδος οδηγεί σε ένα σύνολο από εξισώσεις η λύση των οποίων μας δίνει την απάντηση στο πρόβλημά μας. Βεβαίως η δημιουργία και ανάπτυξη των εξισώσεων αυτών μπορεί να είναι πιο πολύπλοκη διαδικασία από ότι η δημιουργία ενός μοντέλου προσομοίωσης. Η επίλυση των εξισώσεων όμως είναι σαφώς λιγότερο χρονοβόρα διαδικασία από το να κάνουμε τα πειράματα προσομοίωσης για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων.
Από τις παραπάνω εξισώσεις παρατηρούμε ότι αν αλλάξουν οι πιθανότητες p και r στο παραπάνω παράδειγμα τότε μπορούμε άμεσα να πάρουμε αποτελέσματα για το νέο μοντέλο, ενώ για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της προσομοίωσης θα πρέπει να κάνουμε την ίδια διαδικασία από την αρχή κάτι που απαιτεί αρκετό χρόνο.

2.5 Η μέθοδος της αποσύνθεσης (Decomposition method)

Επειδή όπως είδαμε στη παράγραφο 2.3 η Μαρκοβιανή ανάλυση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των μέτρων απόδοσης μιας ΄΄μεγάλης΄΄ γραμμής παραγωγής, η επιστημονική κοινότητα έστρεψε το ενδιαφέρον της στη δημιουργία άλλων προσεγγιστικών μεθόδων οι οποίες μπορούν εφαρμοστούν σε ΄΄μεγάλες΄΄ γραμμές παραγωγής, τα αποτελέσματα των οποίων είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικά .

Μια τέτοια προσεγγιστική μέθοδος είναι η μέθοδος της αποσύνθεσης (decomposition method) η οποία αρχικά αναπτύχθηκε από τον Gershwin (1987) και βελτιώθηκε αργότερα από τους Dallery, David and Xie (1988). Η μέθοδος αυτή αρχικά σχεδιάστηκε για τον υπολογισμό των μέτρων απόδοσης μιας σειριακής γραμμής παραγωγής διακριτού τύπου προϊόντων, αλλά στη συνέχεια επεκτάθηκε από πολλούς άλλους ερευνητές και σε μη σειριακές γραμμές παραγωγής τόσο διακριτού όσο και συνεχούς τύπου προϊόντων.

Η μέθοδος της αποσύνθεσης όπως αυτή παρουσιάστηκε από τον Gershwin (1987), στην ουσία αποσυνθέτει μια γραμμή παραγωγής σαν αυτή του σχήματος 1, σε υποσυστήματα (υπογραμμές) που αποτελούνται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο σαν και αυτό που παριστάνεται στο σχήμα 11. Κάθε ένα από αυτά τα συστήματα ονομάζεται Δομικό Στοιχείο της Μεθόδου της Αποσύνθεσης (ΔΣΜΑ), (decomposition block). Μια άλλη ονομασία για το δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης που συναντάται στη διεθνή βιβλιογραφία είναι ο όρος ΄΄εικονικά΄΄ υποσυστήματα.



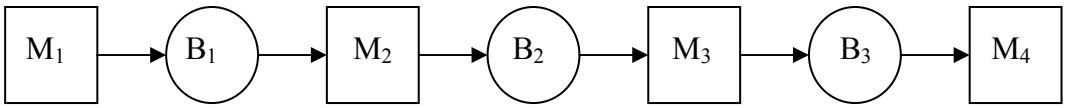
Σχήμα 11: Το Δομικό Στοιχείο της Μεθόδου της Αποσύνθεσης της κλασσικής μεθόδου της αποσύνθεσης (ΔΣΜΑ)

Ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούνται συστήματα σαν και αυτό του σχήματος 10 είναι ότι ο προσδιορισμός των μέτρων απόδοσης των συστημάτων αυτών, μπορεί αρκετά εύκολα να γίνει με απόλυτη ακρίβεια χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Μαρκοβιανής ανάλυσης.
Ο χώρος των πιθανών καταστάσεων του συστήματος αυτού μπορεί εύκολα να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον τύπο (1) για k=2 που δόθηκε στη παράγραφο 2.3. Έτσι αν υποθέσουμε ότι ο ενδιάμεσος αποθηκευτικός χώρος έχει χωρητικότητα C μονάδων προϊόντος και κάθε μια από τις δυο μηχανές μπορεί να βρεθεί σε δυο καταστάσεις (χαλασμένη-εν λειτουργία), ο συνολικός αριθμός των δυνατών καταστάσεων είναι

$$M = 2^2 \prod_{i=1}^{i=1} (C+1) = 4(C+1)$$

Επειδή ο αριθμός των δυνατών καταστάσεων είναι σχετικά μικρός, μπορεί με αρκετή ευκολία να υπολογιστούν όλες οι στάσιμες πιθανότητες του συστήματος και κατά συνέπεια τα μέτρα απόδοσής του.

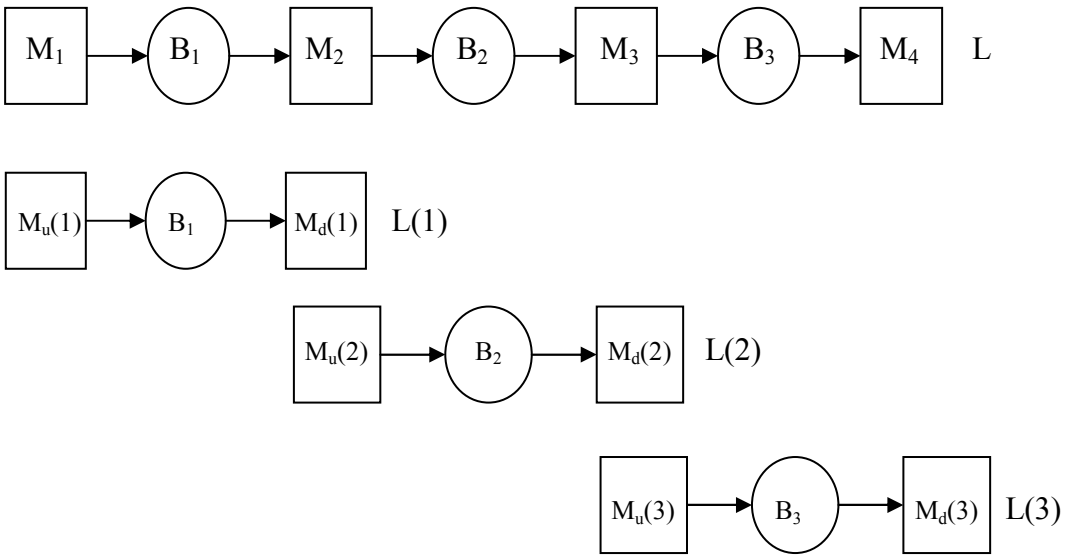
Στη συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα στο οποίο φαίνεται πως η μέθοδος της αποσύνθεσης εφαρμόζεται στη περίπτωση μιας σειριακής γραμμής παραγωγής η οποία παράγει μόνο ενός τύπου προϊόντα.
Έστω μια σειριακή γραμμή παραγωγής η οποία αποτελείται από 4 μηχανές και 3 ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους όπως αυτή του σχήματος 12. Αντικειμενικός στόχος είναι ο προσδιορισμός των μέτρων απόδοσης της γραμμής αυτής την οποία ονομάζουμε ΄΄πραγματική΄΄ γραμμή (original ή real line).
Η πιθανότητα εμφάνισης βλάβης για κάθε μια από τις 4 μηχανές συμβολίζεται με $p_ι$, ενώ η πιθανότητα επιδιόρθωσης των βλαβών συμβολίζεται με r_i, i=1,2,…,4 αντίστοιχα. Επίσης ο ρυθμός επεξεργασίας κάθε μιας μηχανής συμβολίζεται με μ_i, i=1,2…,4.



Σχήμα 12: Σειριακή γραμμή παραγωγής με τέσσερις μηχανές και τρεις αποθηκευτικούς χώρους

Η εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης σε μια γραμμή παραγωγής σαν και αυτή του σχήματος 12 παριστάνεται γραφικά στο σχήμα 13 και περιγράφεται ως εξής:

Για κάθε ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο B_i μεταξύ δυο διαδοχικών μηχανών M_i και M_{i+1}, της πραγματικής γραμμής παραγωγής L, ΄΄εισάγουμε΄΄ ένα δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης, L(i), i=1,2,3 σαν αυτό του σχήματος 11.



Σχήμα 13: Η μέθοδος της αποσύνθεσης για τη γραμμή παραγωγής του σχήματος 12

Οι αποθηκευτικοί χώροι των δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης L(i) έχουν την ίδια χωρητικότητα με τους αντίστοιχους αποθηκευτικούς χώρους B_i, i=1,2,3 της γραμμής L. Επίσης κάθε δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης L(i) αποτελείται από δυο ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές $M_u(i)$ και $M_d(i)$, i=1,2,3. Κάθε μηχανή $M_u(i)$ ονομάζεται upstream μηχανή και αναπαριστά το κομμάτι της γραμμής παραγωγής L που βρίσκεται πριν από τον αποθηκευτικό χώρο B_i, ενώ κάθε μηχανή

$M_d(i)$ ονομάζεται downstream μηχανή και αναπαριστά το κομμάτι της γραμμής παραγωγής L που βρίσκεται μετά από τον αποθηκευτικό χώρο B_i.
Κάθε μηχανή $M_u(i)$ και $M_d(i)$ έχει πιθανότητα εμφάνισης βλαβών $p_u(i)$ και $p_d(i)$, αντίστοιχα, i=1,2,3.
Οι πιθανότητες επιδιόρθωσης βλαβών καθώς και οι ρυθμοί επεξεργασίας των μηχανών $M_u(i)$ και $M_d(i)$ συμβολίζονται με $r_u(i)$, $r_d(i)$ και $\mu_u(i)$, $\mu_d(i)$ αντίστοιχα, i=1,2,3.

Βασικός σκοπός της μεθόδου αυτής είναι ο υπολογισμός των παραμέτρων όλων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(i)$ και $M_d(i)$, $p_u(i)$, $p_d(i)$, $r_u(i)$, $r_d(i)$, $\mu_u(i)$, $\mu_d(i)$, i=1,2,3 με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1. Ο ρυθμός της ροής των προϊόντων προς και από τον αποθηκευτικό χώρο B_i του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης L(i) είναι ίδιος με το ρυθμό ροής προς και από το αντίστοιχο αποθηκευτικό χώρο B_i της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής L, i=1,2,3.

2. Η πιθανότητα ο αποθηκευτικός χώρος B_i του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης L(i) να είναι γεμάτος η άδειος είναι ίδια με την αντίστοιχη πιθανότητα για τον αποθηκευτικό χώρο B_i της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής L, i=1,2,3.

3. Η πιθανότητα επαναφοράς της ροής των προϊόντων από και προς τον αποθηκευτικό χώρο B_i του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης L(i), ύστερα από μια χρονική περίοδο κατά την οποία υπήρχε διακοπή της ροής, είναι ίση με την πιθανότητα του αντίστοιχου γεγονότος για τον αποθηκευτικό χώρο B_i της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής L, i=1,2,3.

4. Ο μέσος αριθμός προϊόντων στον αποθηκευτικό χώρο B_i του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης L(i), είναι ίσος με τον μέσο αριθμό προϊόντων στον αποθηκευτικό χώρο B_i της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής L, i=1,2,3.

Για τον υπολογισμό των παραμέτρων όλων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(i)$ και $M_d(i)$ χρησιμοποιούνται τα παρακάτω σύνολα εξισώσεων

- **Εξισώσεις επαναφοράς της ροής (Resumption of flow equations)**
  Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων επιδιόρθωσης $r_u(i)$, $r_d(i)$ όλων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(i)$ και $M_d(i)$, αντίστοιχα, i=1,2,3.

- **Εξισώσεις διακοπής της ροής (Interruption of flow equations)**
  Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων εμφάνισης βλαβών $p_u(i)$, $p_d(i)$ όλων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(i)$ και $M_d(i)$, αντίστοιχα, i=1,2,3.

- **Εξισώσεις ροής (Flow rate idle time equations)**
  Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του ρυθμού εξυπηρέτησης $\mu_u(i)$, $\mu_d(i)$ όλων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(i)$ και $M_d(i)$, αντίστοιχα, i=1,2,3.

- **Εξισώσεις διατήρησης της ροής (Conservation of flow equations)**
  Οι εξισώσεις αυτές εκφράζουν την αρχή της διατήρησης της ροής των προϊόντων μεταξύ των αποθηκευτικών χώρων, λόγω του ότι δεν υπάρχει καταστροφή η δημιουργία νέου υλικού. Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται σαν κριτήριο τερματισμού του αλγόριθμου που χρησιμοποιείται για την ταυτόχρονη επίλυση όλων των παραπάνω εξισώσεων.

Όταν οι ρυθμοί επεξεργασίας μ_i είναι σταθεροί και ίσοι για όλες τις μηχανές της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής παραγωγής L, τότε οι παράμετροι $\mu_u(i)$ και $\mu_d(i)$ των δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης L(i) είναι ίσες με τις παραμέτρους των αντίστοιχων μηχανών της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής παραγωγής. Κατά συνέπεια οι μοναδικές παράμετροι των μηχανών όλων των ΄΄εικονικών΄΄ δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης L(i) που απομένει να υπολογιστούν είναι οι παράμετροι $p_u(i)$, $p_d(i)$, $r_u(i)$ και $r_d(i)$.
Στη περίπτωση αυτή για τον υπολογισμό των παραμέτρων $p_u(i)$, $p_d(i)$ χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις ροής αντί των εξισώσεων διακοπής της ροής, οπότε τα σύνολα των εξισώσεων που χρησιμοποιούνται είναι τρία (Resumption of flow, Flow rate idle time, Conservation of flow) αντί για τέσσερα.

Μετά την δημιουργία των παραπάνω εξισώσεων η δημιουργία ενός αλγόριθμου που θα επιλύει ταυτόχρονα τις εξισώσεις αυτές είναι αναγκαία. Ένας τέτοιος αλγόριθμος παρουσιάστηκε από τους Dallery, David and Xie (1988) για τη περίπτωση σειριακών γραμμών παραγωγής. Ο αλγόριθμος αυτός αποτελεί τη βάση για τους αλγόριθμους που χρησιμοποιούνται κατά την εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης σε μη σειριακές γραμμές παραγωγής.

Δυστυχώς δεν υπάρχει έως σήμερα κάποια απόδειξη για τη σύγκλιση της μεθόδου της αποσύνθεσης. Ωστόσο η εκτεταμένη εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης σε μεγάλη ποικιλία γραμμών παραγωγής έχει δείξει ότι η μέθοδος συγκλίνει σχεδόν πάντοτε και τα αποτελέσματα της για τον προσδιορισμό της απόδοσης είναι παρά πολύ καλά.

2.6 Η μέθοδος της συνάθροισης (aggregation method)

Μια άλλη μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των μέτρων απόδοσης μιας γραμμής παραγωγής είναι η μέθοδος τη συνάθροισης (aggregation method). Η μέθοδος αυτή που αρχικά χρησιμοποιήθηκε από τον de Koster (1989) βασίζεται στην διαδοχική συνάθροιση όλων των μηχανών μιας γραμμής παραγωγής μέχρις ότου το τελικό σύστημα που θα προκύπτει να αποτελείται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο (σχήμα 11) του οποίου η απόδοση προσδιορίζεται πολύ εύκολα. Πολλές φορές δεν είναι προφανές ποια θα είναι η σειρά με την οποία πρέπει να γίνει η συνάθροιση των μηχανών. Για παράδειγμα αν έχουμε μια γραμμή παραγωγής με τρεις μηχανές και δυο ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους
$M_1 \to B_1 \to M_2 \to B_2 \to M_3$, υπάρχουν δυο διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος της συνάθροισης. Ο πρώτος τρόπος είναι να γίνει η

συνάθροιση των δυο πρώτων μηχανών M_1 και M_2 σε μια νέα μηχανή που τη συμβολίζουμε με $M_{agg(1,2)}$. Μετά τη συνάθροιση αυτή η αρχική γραμμή παραγωγής μετασχηματίζεται σε μια γραμμή παραγωγής με δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο $M_{agg(1,2)} \rightarrow B_2 \rightarrow M_3$ της οποίας η απόδοση εύκολα υπολογίζεται με τη χρήση της Μαρκοβιανής ανάλυσης. Ο δεύτερος τρόπος με τον οποίο μπορεί να γίνει η συνάθροιση των μηχανών είναι να συναθροίσουμε την δεύτερη και τρίτη μηχανή M_2 και M_3 αντίστοιχα σε μια νέα μηχανή $M_{agg(2,3)}$, με αποτέλεσμα η αρχική γραμμή παραγωγής να μετασχηματίζεται και πάλι σε μια γραμμή παραγωγής με δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο $M_1 \rightarrow B_1 \rightarrow M_{agg(2,3)}$. Ένα σημαντικό θέμα που προκύπτει είναι οι αποδόσεις των δυο συστημάτων $M_{agg(1,2)} \rightarrow B_2 \rightarrow M_3$ και $M_1 \rightarrow B_1 \rightarrow M_{agg(2,3)}$ δεν είναι υποχρεωτικά ίσες, γεγονός που οδηγεί σε διαφορετικές εκτιμήσεις για την απόδοση μιας γραμμής παραγωγής οι οποίες εξαρτώνται από τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η συνάθροιση.

Οι Lim et al (1990) παρουσιάζουν μια νέα τροποποιημένη μέθοδο συνάθροισης σύμφωνα με την οποία η συνάθροιση γίνεται αρχικά ξεκινώντας από την πρώτη μηχανή και καταλήγοντας στην τελευταία (forward pass). Στη συνέχεια η συνάθροιση γίνεται με την αντίστροφη φορά, δηλαδή ξεκινώντας από την τελευταία μηχανή, καταλήγουμε στην πρώτη (backward pass). Η διαδικασία αυτή γίνεται επαναληπτικά έως ότου οι εκτιμήσεις για την απόδοση της γραμμής που προκύπτουν τόσο κατά την κανονική φορά (forward pass) όσο και κατά την αντίστροφη φορά (backward pass) γίνουν ταυτόσημες. Η κοινή αυτή εκτίμηση αποτελεί και την τελική απόδοση του συστήματος.

Βιβλιογραφία

[1] Dallery, Y., David, R. and Xie, X. (1988), "An efficient algorithm for the analysis of transfer lines with unreliable machines and finite buffers", *IIE Transactions,* 20(3), pp. 280–283.

[2] de Koster, M. (1989), *Capacity Oriented Analysis and Design of Production Systems,* volume 323 of Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin et al.

[3] Diamantidis, A.C., Papadopoulos, C.T., and Vidalis, M.I., (2004), "Exact analysis of a discrete material three station one buffer merge system with unreliable machines", *International Journal of Production Research,*42(4), pp. 651—675.

[4] Di Mascolo, M., David, R., and Dallery, Y., (1991), "Modeling and Analysis of assembly systemswith unreliable machines and finite buffers", *IIE Transactions*, 23(4), pp. 315–331.

[5] Gershwin, S.B. (1987), "An efficient decomposition algorithm for the approximate evaluation of tandem queues with finite storage space and blocking", *Operations Research,* 35, pp. 291–305.

[6] Gershwin S. B., (1991), "Assembly/disassembly systems: An efficient decomposition Algorithm for tree structured networks", *IIE Transactions,* 23(4), pp. 302–314.

[7] Helber, S. (1999), *Performance Analysis of Flow-Lines with Nonlinear Flow of Material*, Volume 473 of Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag.

[8] Helber, S. and Jusic, H. (2002), "A new decomposition approach for non-cyclic continuous material flow lines with a merging flow of material", Technical Report, Clausthal-Zellerfeld, Germany

[9] Hillier, F.S. and Boling, R.W. (1967), "Finite queues in series, with exponential or Erlang service times -- a numerical approach", *Operations Research*, 15, pp. 286—303.

[10] Lim, J.-T., Meerkov, S.M. and Top, F. (1990), "Homogeneous, asymptotically reliable serial production lines: Theory and a case study'', *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 5, pp. 525—533.

[11] Nemec, Joseph E., February, (1999), "Diffusion and Decomposition Approximations of Stochastic Models of Multiclass Processing Networks", Ph.D. Thesis, Operations Research Center, M.I.T., USA

[12] Papadopoulos, H. T., Heavey, C., and Browne, J., (1993), *Queueing Theory in Manufacturing Systems Analysis and Design*. (Chapman & Hall, London).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΣΥΓΧΩΝΕΥΣΗΣ (MERGE OPERATIONS) ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με γραμμές παραγωγής στις οποίες εμφανίζονται εργασίες συγχώνευσης (merge operations) και παράγονται διακριτού τύπου προϊόντα. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι για την πλειοψηφία των γραμμών παραγωγής που έχουν εξεταστεί στη διεθνή βιβλιογραφία υποτίθεται ότι έχουν τη δυνατότητα παραγωγής ενός μόνο τύπου προϊόντων εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά. Έτσι και για την υπό εξέταση γραμμή παραγωγής που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό υποθέτουμε ότι παράγονται ενός τύπου προϊόντα. Η ανάλυση και μοντελοποίηση των εργασιών συγχώνευσης είναι ιδιαίτερα σημαντική διότι με τη χρήση τους σε συνδυασμό με τις εργασίες διάσπασης (split operations) μπορούμε να μοντελοποιήσουμε και αναλύσουμε γραμμές παραγωγής με βρόγχους επανεπεξεργασίας.
Οι βρόγχοι επαναπεξεργασίας παρουσιάζονται σε γραμμές παραγωγής στις οποίες διαπιστώνεται η ύπαρξη ελαττωματικών προϊόντων σαν και αυτή του σχήματος 7.
Αν για παράδειγμα κατά τη διάρκεια της παραγωγής, διαπιστωθεί σε κάποια μηχανή στη οποία γίνεται έλεγχος ποιότητας η ύπαρξη ελαττωματικού προϊόντος, τότε το προϊόν αυτό στέλνεται σε κάποια άλλη μηχανή σε άλλο σημείο της παραγωγής για επιδιόρθωση, με αποτέλεσμα τη δημιουργία βρόγχου. Πιο συγκεκριμένα στη γραμμή παραγωγής του σχήματος 7 ένα ποσοστό των προϊόντων που παράγει η μηχανή M_4 είναι ελαττωματικά. Όταν συμβαίνει αυτό τα ελαττωματικά προϊόντα στέλνονται στη μηχανή M_2 για επανεπεξεργασία. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να γίνονται εργασίες συγχώνευσης στον αποθηκευτικό χώρο B_1, ενώ παράλληλα δημιουργούνται εργασίες διάσπασης μετά τη μηχανή M_4. Τα προϊόντα που δεν είναι ελαττωματικά συνεχίζουν κανονικά τη ροή τους και πηγαίνουν για επεξεργασία στην μηχανή M_5.

Τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρείται στη βιομηχανία η ύπαρξη ολοένα και περισσότερων γραμμών παραγωγής στις οποίες γίνεται έλεγχος ποιότητας των προϊόντων προς αποφυγή παραγωγής όσο το δυνατόν λιγότερων ελαττωματικών προϊόντων. Το γεγονός αυτό κάνει ιδιαίτερα σημαντική τη μελέτη συστημάτων με εργασίες συγχώνευσης.

Η δομή του κεφαλαίου αυτού έχει ως εξής:
Στην ενότητα 3.2 παρουσιάζεται μια ανασκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας σχετικά με την ανάλυση γραμμών παραγωγής στις οποίες η ροή των προϊόντων μπορεί να είναι γραμμική ή μη γραμμική. Επίσης παρουσιάζεται το πώς εξελίχθηκε η μέθοδος της αποσύνθεσης από το 1987 (όταν σχεδιάστηκε αρχικά ώστε να είναι εφαρμόσιμη σε σειριακά συστήματα), έως και σήμερα ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της απόδοσης πολύπλοκων μη σειριακών συστημάτων. Στην ενότητα 3.3 ορίζεται το πρόβλημα που εξετάζεται στο κεφάλαιο αυτό και δίνεται η γραφική απεικόνιση της υπό εξέταση γραμμής παραγωγής. Στην ενότητα 3.4 παρουσιάζονται οι δυο διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μοντελοποιούνται οι εργασίες συγχώνευσης, ενώ στην ενότητα 3.5 παρουσιάζεται το πώς εφαρμόζονταν μέχρι τώρα η κλασσική μέθοδος της αποσύνθεσης- χρησιμοποιώντας σαν δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης συστήματα με δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο- για την ανάλυση γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης. Ο τρόπος με τον οποίο τροποποιείται η κλασική μέθοδος της αποσύνθεσης χρησιμοποιώντας παράλληλα δυο διαφορετικού τύπου δομικά στοιχεία της μεθόδου της αποσύνθεσης για την ανάλυση γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης παρουσιάζεται στην ενότητα 3.6. Στην ενότητα

3.7, παρουσιάζεται και επιλύνεται το νέο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιείται από τη προτεινόμενη τροποποιημένη μέθοδο της αποσύνθεσης, στην ενότητα 3.8 παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για τη γένεση του πίνακα μετάβασης του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης ενώ στην ενότητα 3.9 παρουσιάζεται ένα αριθμητικό παράδειγμα από την εφαρμογή του αλγόριθμου. Στην ενότητα 3.10 παρουσιάζονται κάποιοι τύποι με τους οποίους μπορεί να υπολογισθεί η απόδοση του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης και στην ενότητα 3.11 παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα από τη εφαρμογή του αλγόριθμου της ενότητας 3.8 με τα οποία πιστοποιείται η ορθότητα και η ακρίβεια του αλγόριθμου ως προς την εκτίμηση της απόδοσης του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης. Στην ενότητα 3.12, παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η αποσύνθεση της υπό εξέταση γραμμής παραγωγής ενώ παράλληλα παρουσιάζονται οι παράμετροι της υπό εξέταση γραμμής παραγωγής και των εμπλεκομένων δομικών στοιχείων της αποσύνθεσης που χρησιμοποιούνται. Στην ενότητα 3.13 παρουσιάζονται οι εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης, στην ενότητα 3.14 δίνεται η τελική μορφή των εξισώσεων αυτών ύστερα από την ταυτόχρονη επίλυση τους, ενώ στην ενότητα 3.15 παρουσιάζεται ο αλγόριθμος της μεθόδου της αποσύνθεσης που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την της απόδοσης γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης. Τέλος στην ενότητα 3.16 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα του κεφαλαίου αυτού και προτείνονται κάποιες περιοχές για περαιτέρω έρευνα.

3.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχει τεράστιος όγκος εργασιών οι οποίες ασχολούνται με την ανάλυση γραμμών παραγωγής στις οποίες οι διάταξη των μηχανών είναι σειριακή στις οποίες παρατηρείται γραμμική ροή των προϊόντων.

Δίκτυα ουρών αναμονής στα οποία παρουσιάζεται το φαινόμενο του μπλοκαρίσματος έχουν ευρέως χρησιμοποιηθεί στη διεθνή βιβλιογραφία για την ανάλυση πολλών συστημάτων όπως συστήματα υπολογιστών, συστήματα τηλεπικοινωνιών, βιομηχανικά συστήματα και γενικά συστήματα εξυπηρέτησης.
Ένα δίκτυο ουρών αναμονής εν γένει αποτελείται από ένα σύνολο ουρών οι οποίες έχουν μια συγκεκριμένη τοπολογία (σειριακή, παράλληλη, με εργασίες συγχώνευσης, διάσπασης κ.α.). Οι ουρές μπορεί να είναι πεπερασμένης ή άπειρης χωρητικότητας και τοποθετούνται ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς σταθμούς εξυπηρέτησης. Στη περίπτωση που οι ουρές είναι πεπερασμένης χωρητικότητας το φαινόμενο του μπλοκαρίσματος (blocking) παρουσιάζεται όταν ένας πελάτης δεν μπορεί να εξυπηρετηθεί λόγω του ότι η ουρά αναμονής που βρίσκεται μετά από αυτόν είναι γεμάτη. Υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τύποι μπλοκαρίσματος οι οποίοι περιγράφονται με μεγάλη λεπτομέρεια από τον Perros (1994), μεταξύ άλλων.

Τα δίκτυα ουρών αναμονής στα παρουσιάζεται το φαινόμενο του μπλοκαρίσματος είναι δύσκολο να αναλυθούν και η μέθοδος της Μαρκοβιανής ανάλυσης που συνήθως χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις αυτές είναι εφαρμόσιμη μόνο σε μικρά δίκτυα. Αυτό συμβαίνει διότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των σταθμών εξυπηρέτησης και η χωρητικότητα των ενδιάμεσων ουρών αναμονής, τόσο αυξάνεται εκθετικά ο χώρος των πιθανών καταστάσεων του δικτύου, γεγονός που κάνει αδύνατη την ανάλυσή του. Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές εργασίες στις οποίες γίνεται ανάλυση μικρών δικτύων ουρών αναμονής με χρήση Μαρκοβιανής ανάλυσης.

Οι Hillier και Boling, 1967, Papadopoulos, O'Kelly και Heavey, 1989 και οι Heavey, Papadopoulos και Browne, 1993, μεταξύ πολλών άλλων ασχολούνται με την ανάλυη σειριακών δικτύων ουρών αναμονής με χρήση Μαρκοβιανής ανάλυσης.

Δυστυχώς όμως στη πραγματικότητα τα περισσότερα δίκτυα είναι αρκετά μεγάλα και ως εκ τούτου πρέπει να βρεθούν άλλοι τρόποι για την ανάλυσή τους. Ένας τρόπος για να αποφύγουμε τον περιορισμό στον αριθμό των σταθμών εξυπηρέτησης που προκύπτει από τη χρήση της Μαρκοβιανής ανάλυσης είναι η εφαρμογή άλλων μεθόδων, προσεγγιστικών με χρήση των οποίων μπορούμε να εκτιμήσουμε την απόδοση μεγάλων δικτύων ουρών αναμονής.
Μια από τις πιο γνωστές και ευρέως χρησιμοποιούμενες προσεγγιστικές μεθόδους είναι η μέθοδος της αποσύνθεσης που αρχικά δημιουργήθηκε από τον Gershwin (1987) και βελτιώθηκε από τους Dallery, David and Xie (1988).
Η μέθοδος αυτή όπως παρουσιάστηκε από τον Gershwin (1987), χρησιμοποιήθηκε αρχικά για την ανάλυση σειριακών συστημάτων. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή το αρχικό σύστημα αποσυντίθεται σε συστήματα που αποτελούνται από δυο σταθμούς εξυπηρέτησης και μια ενδιάμεση ουρά σαν και αυτό του σχήματος 11. Τα συστήματα αυτά που ονομάζονται δομικά στοιχεία της μεθόδου της αποσύνθεσης, αναλύονται με χρήση Μαρκοβιανής ανάλυσης. Η απόδοση του αρχικού συστήματος υπολογίζεται χρησιμοποιώντας κάποιες σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων των δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης και των παραμέτρων των σταθμών εξυπηρέτησης του αρχικού συστήματος.
Μια άλλη προσεγγιστική μέθοδος που χρησιμοποιείται για την ανάλυση μεγάλων δικτύων ουρών αναμονής είναι η μέθοδος της συνάθροισης (aggregation method) η οποία παρουσιάστηκε από τους Lim, Meerkov and Top, (1990). Η μέθοδος αυτή ξεκινώντας από τον πρώτο σταθμό, συναθροίζει δυο διαδοχικούς σταθμούς εξυπηρέτησης του αρχικού συστήματος σε ένα νέο ισοδύναμο σταθμό και συνεχίζει μέχρις ότου φτάσει στον τελευταίο σταθμό. Στο τέλος η αρχική γραμμή έχει μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο σταθμό του οποίου υπολογίζεται η απόδοση.
Στη συνέχεια γίνεται ακριβώς η ίδια διαδικασία με την αντίθετη φορά, δηλαδή ξεκινώντας από τον τελευταίο σταθμό συναθροίζονται οι διαδοχικοί σταθμοί μέχρις ότου φτάσουμε στον πρώτο σταθμό. Στο τέλος η αρχική γραμμή έχει μετατραπεί σε ένα άλλο ισοδύναμο σταθμό του οποίου υπολογίζεται η απόδοση.
Όταν αυτές οι δυο αποδόσεις των ισοδύναμων σταθμών συμπέσουν τότε η τιμή αυτή είναι και η τελική εκτίμηση της απόδοσης του αρχικού συστήματος.
Ενώ στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχει τεράστιος όγκος εργασιών οι οποίες ασχολούνται με την ανάλυση σειριακών δικτύων ουρών αναμονής στις οποίες η ροή των οντοτήτων είναι γραμμική, ο αριθμός των εργασιών που ασχολούνται με την ανάλυση μη σειριακών δικτύων ουρών αναμονής στις οποίες η ροή των οντοτήτων είναι μη γραμμική είναι περιορισμένος.

Οι Cheah και Smith (1994) παρουσίασαν μια προσεγγιστική τεχνική η οποία βασιζόταν στη μέθοδο της διεύρυνσης (expansion method) των (Kerbache και Smith, 1987) για την ενσωμάτωση μοντέλων M/G/C/C ουρών σε δίκτυα όπου η τοπολογία μπορεί να είναι σειριακή, ή να υπάρχουν εργασίες συγχώνευσης ή διάσπασης.
Μια αναλυτική τεχνική για τον υπολογισμό της απόδοσης M/M/C/K δικτύων ουρών αναμονής παρουσιάζεται από τους Jain and Smith (1994). Στην εργασία αυτή εξετάζονται συστήματα με εργασίες συγχώνευσης και διάσπασης, ενώ επίσης εξετάζεται και η βέλτιστη σειρά των εξυπηρετητών στο σύστημα με στόχο τη μεγιστοποίηση της απόδοσης.

Μια τεχνική για τον υπολογισμό της απόδοσης ενός συστήματος που αποτελείται από δυο ουρές παρουσιάστηκε από τους Gosavi και Smith (1995). Οι ίδιοι συγγραφείς επέκτειναν την ανάλυση αυτή σε συστήματα με εργασίες συγχώνευσης και διάσπασης, ενώ ανέπτυξαν μια μέθοδο με την οποία υπολογίζονται άνω και κάτω φράγματα της απόδοσης συστημάτων στα οποία οι σειριακοί σταθμοί εργασίας αποτελούνται από παράλληλους εξυπηρετητές.

Η μέθοδος της αποσύνθεσης που όπως ήδη αναφέρθηκε αναπτύχθηκε αρχικά για την ανάλυση σειριακών γραμμών παραγωγής επεκτάθηκε από αρκετούς ερευνητές και για την ανάλυση μη σειριακών γραμμών παραγωγής.
Ο κύριος όγκος της βιβλιογραφίας ασχολείται με την εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης σε συστήματα συναρμολόγησης / αποσυναρμολόγησης.
Μια εργασία στην οποία η μέθοδος της αποσύνθεσης επεκτείνεται στην ανάλυση μη αξιόπιστων γραμμών συναρμολόγησης/ αποσυναρμολόγησης (assembly/disassembly) με ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους πεπερασμένης χωρητικότητας παρουσιάζεται από τους Gershwin (1991) και Di Mascolo et al. (1991).
Οι Dallery και Gershwin (1992) παρουσίασαν μια πολύ αναλυτική ανασκόπηση όλων των μοντέλων και των μεθόδων που χρησιμοποιούνταν μέχρι και το 1992, ενώ ο Gershwin (1994) στο βιβλίο του παρουσίασε πολύ αναλυτικά την εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης τόσο σε σειριακά συστήματα, όσο και σε συστήματα συναρμολόγησης/ αποσυναρμολόγησης.
Ο Helber (1998) παρουσίασε μια εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης για μη αξιόπιστα συστήματα συναρμολόγησης / αποσυναρμολόγησης στα οποία παράγονται προϊόντα διακριτού τύπου.
Μια επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης για την εκτίμηση της απόδοσης κλειστού τύπου κυκλικών δικτύων ουρών αναμονής παρουσιάσθηκε από τους Gershwin, Maggio, Matta, Tolio και Werner (2001).
Στο βιβλίο του Helber (1999) εκτός από μια πολύ αναλυτική παρουσίαση για την εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης σε συστήματα συναρμολόγησης / αποσυναρμολόγησης, παρουσιάζονται και αναλύονται με χρήση της μεθόδου της αποσύνθεσης συστήματα στα οποία οι εργασίες συγχώνευσης μοντελοποιούνται με ένα σύστημα που αποτελείται από τρεις εξυπηρετητές και δυο αποθηκευτικούς χώρους, σαν και αυτό του σχήματος 4. Οι σταθμοί εξυπηρέτησης είναι μη αξιόπιστοι και υποτίθεται ότι έχουν σταθερούς και ίσους μεταξύ τους χρόνους εξυπηρέτησης και τα προϊόντα που παράγονται είναι διακριτού τύπου.

Ένα θέμα που πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα είναι ότι σε όλες τις παραπάνω εργασίες που ασχολήθηκαν με την επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης σε μη σειριακά συστήματα, σαν δομικά στοιχεία της μεθόδου της αποσύνθεσης, χρησιμοποιήθηκαν μόνο συστήματα με δυο εξυπηρετητές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο σαν και αυτό του σχήματος 11.

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης σε συστήματα με εργασίες συγχώνευσης Helber (1999), παρουσιάστηκαν αρκετά προβλήματα σύγκλισης. Αυτό οδήγησε τους Helber και Mehrtens (1999) να ασχοληθούν με τη μοντελοποίηση των εργασιών συγχώνευσης από ένα διαφορετικό σύστημα που αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο σαν και αυτό του σχήματος 5. Οι μη αξιόπιστες μηχανές εξυπηρέτησης είχαν σταθερούς χρόνους εξυπηρέτησης οι οποίοι δεν ήταν ίσοι και για τις τρεις μηχανές. Δηλαδή κάθε μηχανή εξυπηρέτησης είχε

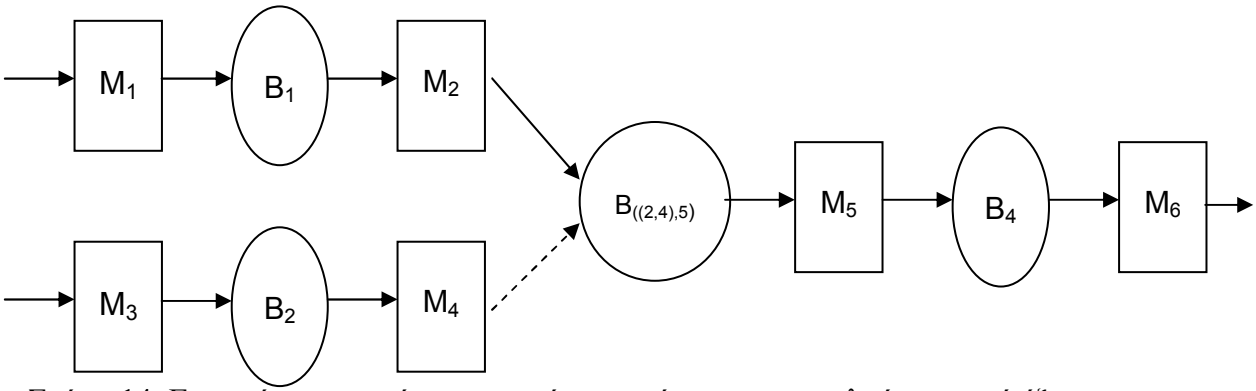
ξεχωριστό σταθερό χρόνο εξυπηρέτησης. Η υπόθεση αυτή έχει σαν αποτέλεσμα τα παραγόμενα προϊόντα να θεωρούνται ότι είναι συνεχούς τύπου. Το σύστημα αυτό αναλύθηκε διεξοδικά και η απόδοση του υπολογίστηκε με χρήση διαφορικών εξισώσεων.
Ένα παρόμοιο μοντέλο με αυτό των Helber και Mehrtens (1999) παρουσιάσθηκε από τον Tan (2001) στο οποίο επίσης τα προϊόντα είναι συνεχούς τύπου, ενώ οι μηχανές που βρίσκονται πριν τον αποθηκευτικό χώρο έχουν πάντοτε ρυθμό εξυπηρέτησης μικρότερο από εκείνο της μηχανής που βρίσκεται μετά τον αποθηκευτικό χώρο.

Οι Helber and Jusic (2002) επέκτειναν τη μέθοδο της αποσύνθεσης σε συστήματα τα οποία οι εργασίες συγχώνευσης μοντελοποιούνται με βάση το σχήμα 5. Χρησιμοποίησαν ταυτόχρονα για πρώτη φορά δυο διαφορετικού τύπου δομικά στοιχεία της μεθόδου της αποσύνθεσης. Ο ένας τύπος ήταν το κλασσικό δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης με δυο μηχανές εξυπηρέτησης και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο, σαν και αυτό του σχήματος 11, ενώ ο δεύτερος τύπος ήταν το σύστημα που εξετάστηκε από τους Helber και Mehrtens (1999) (σχήμα 5). Τα παραγόμενα προϊόντα ήταν συνεχούς τύπου και κάθε μηχανή εξυπηρέτησης είχε ξεχωριστό σταθερό χρόνο εξυπηρέτησης. Οι μηχανές εξυπηρέτησης ήταν μη αξιόπιστες και οι χρόνοι εμφάνισης βλαβών και επιδιόρθωσης ακολουθούσαν την εκθετική κατανομή.

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με την ανάλυση παρόμοιων συστημάτων με αυτά που ασχολήθηκαν οι Helber and Jusic (2002) αλλά κάτω από διαφορετικές προϋποθέσεις λειτουργίας. Πιο συγκεκριμένα στο κεφάλαιο αυτό υποθέτουμε ότι όλες οι μη αξιόπιστες μηχανές εξυπηρέτησης έχουν σταθερούς και ίσους χρόνους εξυπηρέτησης ενώ τα παραγόμενα προϊόντα είναι συνεχούς τύπου. Μια ακόμη διαφορά του συστήματος το οποίο αναλύεται στο κεφάλαιο αυτό σε σχέση με αυτό των Helber and Jusic (2002) είναι ότι οι χρόνοι εμφάνισης βλαβών και επιδιόρθωσης των αντίστοιχων βλαβών ακολουθούν την γεωμετρική κατανομή.

3.3 Ορισμός του προβλήματος

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται το πρόβλημα που εξετάζεται στο κεφάλαιο αυτό. Το πρόβλημα είναι η ανάλυση και μοντελοποίηση μιας γραμμής παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης σαν και αυτή του σχήματος 14.



Σχήμα 14: Γραμμή παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης αποτελούμενη από έξη μηχανές και τέσσερις αποθηκευτικούς χώρους

Η γραμμή παραγωγής που απεικονίζεται στο σχήμα 14 αποτελείται από έξι μηχανές και τέσσερις αποθηκευτικούς χώρους. Στον αποθηκευτικό χώρο $B_{((2,4),5)}$ που περιβάλλεται από τις μηχανές M_2, M_4 και M_5 αποθηκεύονται τα προϊόντα που παράλληλα παράγονται τόσο από την μηχανή M_2 όσο και από την μηχανή M_4. Η μηχανή M_5 που ονομάζεται και μηχανή συγχώνευσης (merging machine) τροφοδοτείται με προϊόντα για επεξεργασία από τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((2,4),5)}$.
Οι μηχανές συμβολίζονται με τετράγωνα ενώ οι αποθηκευτικοί χώροι συμβολίζονται με κύκλους. Τα βέλη που συνδέουν τους αποθηκευτικούς χώρους με τις μηχανές δείχνουν την ροή που ακολουθούν τα προϊόντα κατά τη παραγωγική διαδικασία στη γραμμή παραγωγής. Η μέθοδος που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση αυτής της κατηγορίας γραμμών παραγωγής είναι η μέθοδος της αποσύνθεσης (decomposition method). Η μέθοδος αυτή έως τώρα χρησιμοποιείτο για την ανάλυση σειριακών γραμμών ή γραμμών συναρμολόγησης / αποσυναρμολόγησης. Για να είναι δυνατή η χρήση της μεθόδου της αποσύνθεσης σε γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης σαν και αυτής που απεικονίζεται στο σχήμα 14 πρέπει να γίνουν αρκετές τροποποιήσεις τόσο στην μοντελοποίηση όσο και στις μαθηματικές εξισώσεις που την περιγράφουν. Οι τροποποιήσεις αυτές περιγράφονται και αναλύονται στις επόμενες ενότητες.

3.4 Μοντελοποίηση συστημάτων με εργασίες συγχώνευσης

Τα τελευταία χρόνια έχουν καταγραφεί στη διεθνή βιβλιογραφία σημαντικές προσπάθειες για την ανάλυση και μοντελοποίηση συστημάτων στα οποία εμφανίζονται εργασίες συγχώνευσης. Μια πολύ αναλυτική περιγραφή και ανάλυση ενός τέτοιου συστήματος παρουσιάζεται από τον Helber (1999) στο βιβλίο του.
Το σύστημα αυτό απεικονίζεται στο σχήμα 4.

Στο σύστημα του σχήματος 4 η μηχανή συγχώνευσης M_3 έχει δυο αποθηκευτικούς χώρους τους $B_{1,3}$ και $B_{2,3}$ που βρίσκονται πριν από αυτή και θα μπορούσαν να τροφοδοτήσουν την μηχανή M_3 με προϊόντα για επεξεργασία. Η τροφοδότηση της μηχανής M_3 με προϊόντα γίνεται ακολουθώντας ένα κανόνα προτεραιότητας (priority rule). Ο κανόνας αυτός έχει ως εξής: *Η μηχανή M_3 τροφοδοτείται αποκλειστικά από τον αποθηκευτικό χώρο $B_{1,3}$ εκτός και αν αυτός είναι άδειος. Στη περίπτωση αυτή και μόνο τότε η μηχανή M_3 μπορεί να τροφοδοτείται από τον αποθηκευτικό χώρο $B_{2,3}$.*

Αυτή η προτεραιότητα που έχει ο αποθηκευτικός χώρος $B_{1,3}$ έναντι του $B_{2,3}$ απεικονίζεται και στο σχήμα 4. Έτσι ο πρώτης προτεραιότητας αποθηκευτικός χώρος $B_{1,3}$ είναι συνδεδεμένος με τη μηχανή M_3 με ένα συνεχές βέλος, ενώ ο δεύτερης προτεραιότητας αποθηκευτικός χώρος $B_{2,3}$ είναι συνδεδεμένος με τη μηχανή M_3 με ένα διακεκομμένο βέλος..
Επίσης μια ακόμη υπόθεση είναι ότι οι μηχανές εισόδου (input machines) οι οποίες στη προκειμένη περίπτωση είναι οι M_1 και M_2 δεν είναι ποτέ άδειες και ότι η μηχανή εξόδου (output machine) η οποία στη προκειμένη περίπτωση είναι η μηχανή M_4 δεν είναι ποτέ μπλοκαρισμένη. Γραμμές παραγωγής που περιείχαν συστήματα με εργασίες συγχώνευσης σαν και αυτό του σχήματος 4 αναλύθηκαν με χρήση της μεθόδου της αποσύνθεσης χρησιμοποιώντας σαν δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης συστήματα με δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο

(σχήμα 11). Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα του σχήματος 4 δεν χρησιμοποιείται απευθείας, αλλά αποσυντίθεται σε συστήματα με δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο. Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται αυτό περιγράφεται στην επόμενη ενότητα.

Όπως αναφέρεται από τους Helber και Jussic (2002) τα αποτελέσματα από τη χρήση της μεθόδου της αποσύνθεσης ήταν αρκετά ικανοποιητικά ως προς την εκτίμηση της απόδοσης τέτοιων συστημάτων. Ωστόσο κατά την εφαρμογή της μεθόδου, διαπιστώθηκαν πάρα πολλές περιπτώσεις κατά τις οποίες ο αλγόριθμος της μεθόδου της αποσύνθεσης δεν συνέκλινε, με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατός ο προσδιορισμός της απόδοσης συστημάτων με εργασίες συγχώνευσης.
Αυτός είναι και ο λόγος που οδήγησε τους Helber και Mehrtens (1999), Tan (2001) και Diamantidis, Papadopoulos and Vidlais (2004) να προχωρήσουν στην μοντελοποίηση εργασιών συγχώνευσης με ένα διαφορετικό σύστημα από αυτό του σχήματος 4.
Το νέο αυτό σύστημα αποτελείται επίσης από τρεις μηχανές όπως και αυτό του σχήματος 4, αλλά από ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο. Το νέο αυτό σύστημα απεικονίζεται στο σχήμα 5.

Παρόλο που φαινομενικά τα συστήματα των σχημάτων 4 και 5 μοιάζουν μεταξύ τους στην πραγματικότητα έχουν αρκετά σημαντικές διαφορές. Η πρώτη βασική διαφορά όπως προαναφέρθηκε είναι ότι στο σύστημα του σχήματος 5 πριν την μηχανή συγχώνευσης υπάρχει ένας μόνο αποθηκευτικός χώρος ο $B_{(1,2),3}$ στον οποίο αποθέτουν τα παραγόμενα προϊόντα τους οι μηχανές M_1 και M_2. Οι μηχανές M_1 και M_2 λειτουργούν παράλληλα τροφοδοτώντας με ίδιου τύπου προϊόντα τον αποθηκευτικό χώρο $B_{(1,2),3}$ και δεν δίνεται προτεραιότητα σε καμιά από τις δυο όπως γίνεται στο σύστημα του σχήματος 4. Όταν ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(1,2),3}$ γεμίσει τότε δίνεται προτεραιότητα στη μηχανή M_1 έναντι της M_2 να είναι εκείνη που θα αποθέσει πρώτη προϊόν στον αποθηκευτικό χώρο $B_{(1,2),3}$ μόλις αυτός πάψει να είναι γεμάτος. Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού γίνεται λεπτομερής ανάλυση του συστήματος αυτού το οποίο πρόκειται να χρησιμοποιηθεί αυτούσιο σαν δομικό στοιχείο στη μέθοδο της αποσύνθεσης, για την εκτίμηση της απόδοσης μεγάλων γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης (merge operations).

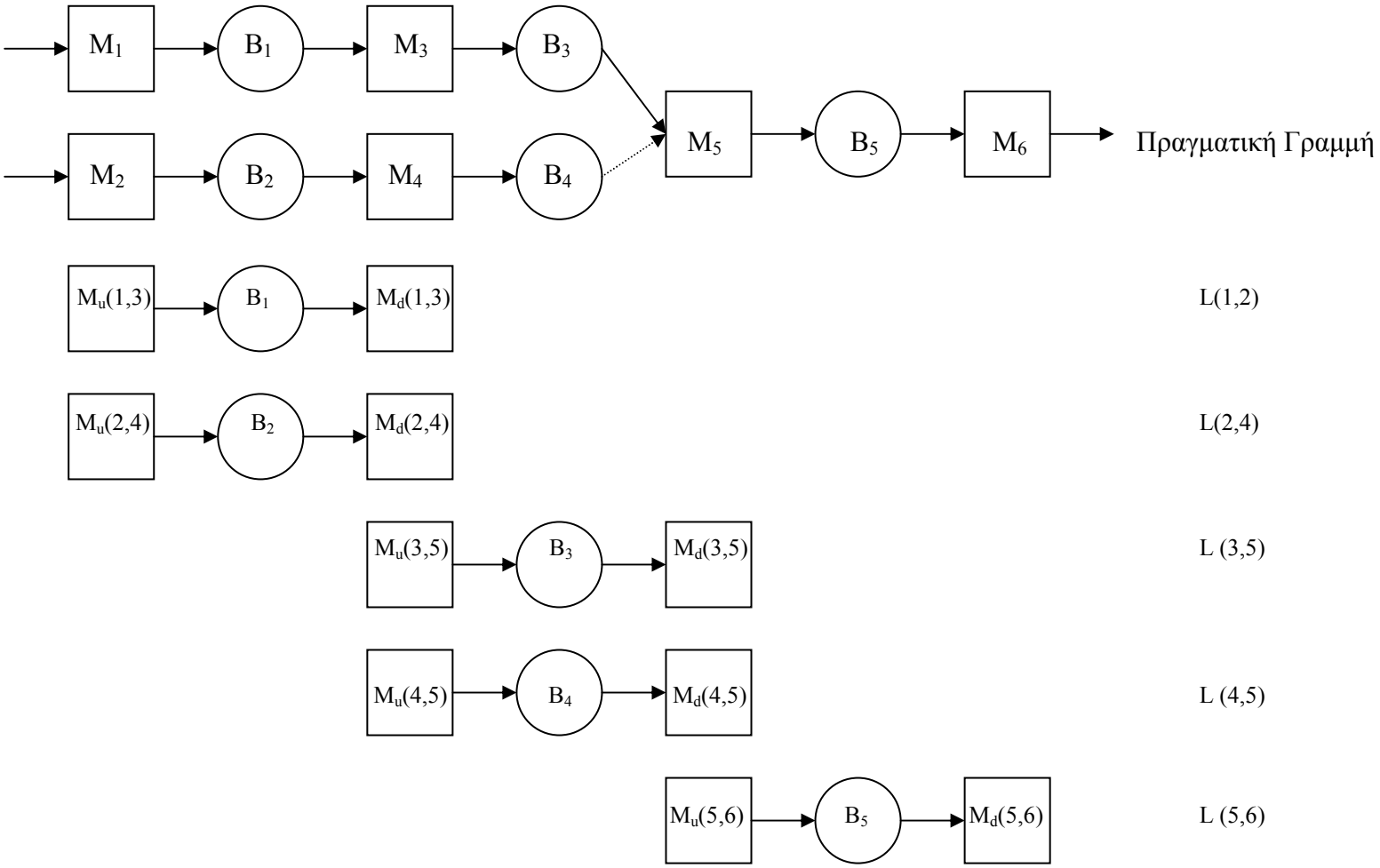
3.5 Η κλασική μέθοδος της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης

Η μέθοδος της αποσύνθεσης έχει χρησιμοποιηθεί από πάρα πολλούς ερευνητές για την εκτίμηση της απόδοσης πολλών τύπων γραμμών παραγωγής. Το βασικό χαρακτηριστικό όλων αυτών των κλασικών προσεγγίσεων είναι ότι αποσυνθέτουν τις πραγματικές γραμμές παραγωγής μόνο σε δομικά στοιχεία της μεθόδου της αποσύνθεσης που αποτελούνται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο (two machines one buffer systems), σαν και αυτό του σχήματος 11.
Ένα τέτοιο παράδειγμα παρουσιάζεται με όλες τις λεπτομέρειες (εξισώσεις που περιγράφουν τη μέθοδο της αποσύνθεσης, αλγόριθμος που επιλύει τις εξισώσεις αυτές καθώς και αριθμητικά παραδείγματα) στο βιβλίο του Helber (1999) όπου συστήματα με εργασίες συγχώνευσης σαν και αυτό του σχήματος 4 αναλύονται με τη βοήθεια της μεθόδου της αποσύνθεσης με χρήση αποκλειστικά και μόνο ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων που αποτελούνται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο

αποθηκευτικό χώρο. Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται αυτό παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 15, στο οποίο η πραγματική γραμμή παραγωγής στην οποία λαμβάνουν χώρα εργασίες συγχώνευσης αποτελείται από έξι (6) μηχανές και πέντε (5) ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους. Οι εργασίες συγχώνευσης λαμβάνουν χώρα στη μηχανή M_5 ενώ αμέσως πριν από αυτήν υπάρχουν δυο αποθηκευτικοί χώροι, οι B_3 και B_4. Αυτό υποδηλώνει ότι οι εργασίες συγχώνευσης μοντελοποιούνται με βάση το σύστημα που παρουσιάζεται στο σχήμα 4. Παρατηρούμε επίσης ότι **όλα** τα εικονικά υποσυστήματα που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση της μεθόδου της αποσύνθεσης αποτελούνται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο.

Για κάθε αποθηκευτικό χώρο της πραγματικής γραμμής παραγωγής εισάγεται ένα εικονικό υποσύστημα με δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο.
Έτσι, λόγω του ότι στη πραγματική γραμμή παραγωγής υπάρχουν πέντε (5) αποθηκευτικοί χώροι, εισάγονται πέντε (5) εικονικά υποσυστήματα που συμβολίζονται με L(α,β) όπου α και β είναι οι μηχανές της πραγματικής γραμμής παραγωγής στις οποίες βρίσκεται ανάμεσα ο αποθηκευτικός χώρος στον οποίο αντιστοιχεί το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα. Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι το κομμάτι της πραγματικής γραμμής παραγωγής στο οποίο λαμβάνουν χώρα οι εργασίες συγχώνευσης (είναι το ίδιο με αυτό που παρουσιάζεται στο σχήμα 4) και αποτελείται από τις μηχανές M_3, M_4, M_5 και τους ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους B_3 και B_4 αναλύεται μέσω της μεθόδου αποσύνθεσης σε δυο ΄΄εικονικές΄΄ υπογραμμές τις L(3,5) και L(4,5) και δεν χρησιμοποιείται αυτούσιο στη μέθοδο της αποσύνθεσης. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην είναι αναγκαία η επίλυσή του με χρήση Μαρκοβιανής ανάλυσης.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως η χρήση της μεθόδου της αποσύνθεσης με τον τρόπο που περιγράφεται στο σχήμα 15 οδήγησε στη δημιουργία ενός αλγόριθμου για τον υπολογισμό της απόδοσης τέτοιων γραμμών που ενώ ήταν αρκετά ακριβής ως προς τον προσδιορισμό της απόδοσής τους, εντούτοις παρουσιάστηκαν πολλές περιπτώσεις στις οποίες ο αλγόριθμος αυτός δεν συνέκλινε.
Αυτό οδήγησε ορισμένους ερευνητές όπως οι Helber και Mehrtens (1999), Tan (2001) και Diamantidis, Papadopoulos and Vidalis (2004) πρώτον να προχωρήσουν στην μοντελοποίηση εργασιών συγχώνευσης με ένα διαφορετικό σύστημα όπως αυτό του σχήματος 5 και δεύτερον να εφαρμόσουν με ένα διαφορετικό τρόπο τη μέθοδο της αποσύνθεσης χρησιμοποιώντας σαν δομικά στοιχεία ταυτόχρονα συστήματα με δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο, αλλά και συστήματα με τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο σαν αυτό του σχήματος 5.
Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται αυτό παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 16.



Σχήμα 15: Η κλασσική μέθοδος της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης που μοντελοποιούνται με βάση το σχήμα 4.

3.6 Γραφική απεικόνιση της τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης

Όπως αναφέρθηκε και στη προηγούμενη ενότητα το γεγονός της μη σύγκλισης του αλγόριθμου που προέκυψε από την εφαρμογή της κλασικής μεθόδου της αποσύνθεσης για αρκετές περιπτώσεις προβλημάτων, οδήγησε αρκετούς ερευνητές σε τροποποίηση της μεθόδου της αποσύνθεσης.

Ο πιθανότερος λόγος για τον οποίο η σύγκλιση του κλασικού αλγόριθμου δεν ήταν και τόσο καλή ήταν ότι (όπως φαίνεται και στο σχήμα 15) το κομμάτι της γραμμής παραγωγής στο οποίο εμφανίζονται οι εργασίες συγχώνευσης αναλύεται σε ΄΄εικονικά΄΄ υποσυστήματα που αποτελούνται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο. Μια εξήγηση για αυτό είναι η εξής:

Όταν εμφανίζονται εργασίες συγχώνευσης σε κάποιο τμήμα μιας γραμμής παραγωγής τότε στο σημείο αυτό η ροή των προϊόντων είναι μη-γραμμική. Επίσης σε κάθε σειριακή γραμμή παραγωγής, άρα και σε ένα σύστημα με δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο, η ροή των προϊόντων είναι γραμμική. Αντικαθιστώντας λοιπόν το κομμάτι της γραμμής παραγωγής στο οποίο εμφανίζονται οι εργασίες συγχώνευσης με ΄΄εικονικά΄΄ υποσυστήματα που αποτελούνται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο, είναι σαν να προσομοιώνουμε τη μη γραμμική ροή των προϊόντων με γραμμική ροή. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να παρουσιάζονται προβλήματα σύγκλισης του αλγόριθμου της μεθόδου της αποσύνθεσης.
Κατά συνέπεια το τμήμα της γραμμής στο οποίο εμφανίζονται οι εργασίες συγχώνευσης θα πρέπει να αναπαρασταθεί με ένα ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα που θα αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο (σαν και αυτό του σχήματος 5) και το οποίο θα μοντελοποιεί τις εργασίες συγχώνευσης. Τα υπόλοιπα τμήματα της γραμμής παραγωγής στα οποία η ροή των προϊόντων είναι γραμμική και δεν εμφανίζονται εργασίες συγχώνευσης αναπαρίστανται από ΄΄εικονικά΄΄ υποσυστήματα που αποτελούνται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο. Η γραφική αναπαράσταση της μεθόδου της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης με τον τρόπο που μόλις περιγράφηκε παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα 16.
Όπως φαίνεται και στο σχήμα 16 στη πραγματική γραμμή παραγωγής η μηχανή M_5 εκτελεί εργασίες συγχώνευσης. Πριν από αυτήν υπάρχει ένας αποθηκευτικός χώρος γεγονός που υποδηλώνει ότι οι εργασίες συγχώνευσης μοντελοποιούνται με βάση το σύστημα του σχήματος 5. Αυτό που διαφοροποιεί τη γραφική αναπαράσταση της μεθόδου της αποσύνθεσης του σχήματος 15 με αυτή του σχήματος 16 είναι ότι στη γραφική αναπαράσταση του σχήματος 16 χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα δυο διαφορετικοί τύποι ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων . Ο ένας τύπος αποτελείται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο και μοντελοποιεί τα τμήματα της γραμμής με γραμμική ροή των προϊόντων (σειριακά τμήματα), ενώ ο άλλος τύπος αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο και μοντελοποιεί τα τμήματα της γραμμής στα οποία λαμβάνουν χώρα οι εργασίες συγχώνευσης.

Συγκεκριμένα για κάθε αποθηκευτικό χώρο της πραγματικής γραμμής παραγωγής του σχήματος 16 που λαμβάνουν χώρα εργασίες συγχώνευσης εισάγεται ένα ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα που αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο, ενώ για κάθε άλλο αποθηκευτικό χώρο στον οποίο δεν γίνονται εργασίες συγχώνευσης εισάγεται ένα ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο.
Επειδή λοιπόν η πραγματική γραμμή παραγωγής αποτελείται από τέσσερις αποθηκευτικούς χώρους στον ένα εκ των οποίων γίνονται εργασίες συγχώνευσης, εισάγονται τέσσερα ΄΄εικονικά΄΄ υποσυστήματα εκ των οποίων το ένα αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο και τα υπόλοιπα αποτελούνται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο.

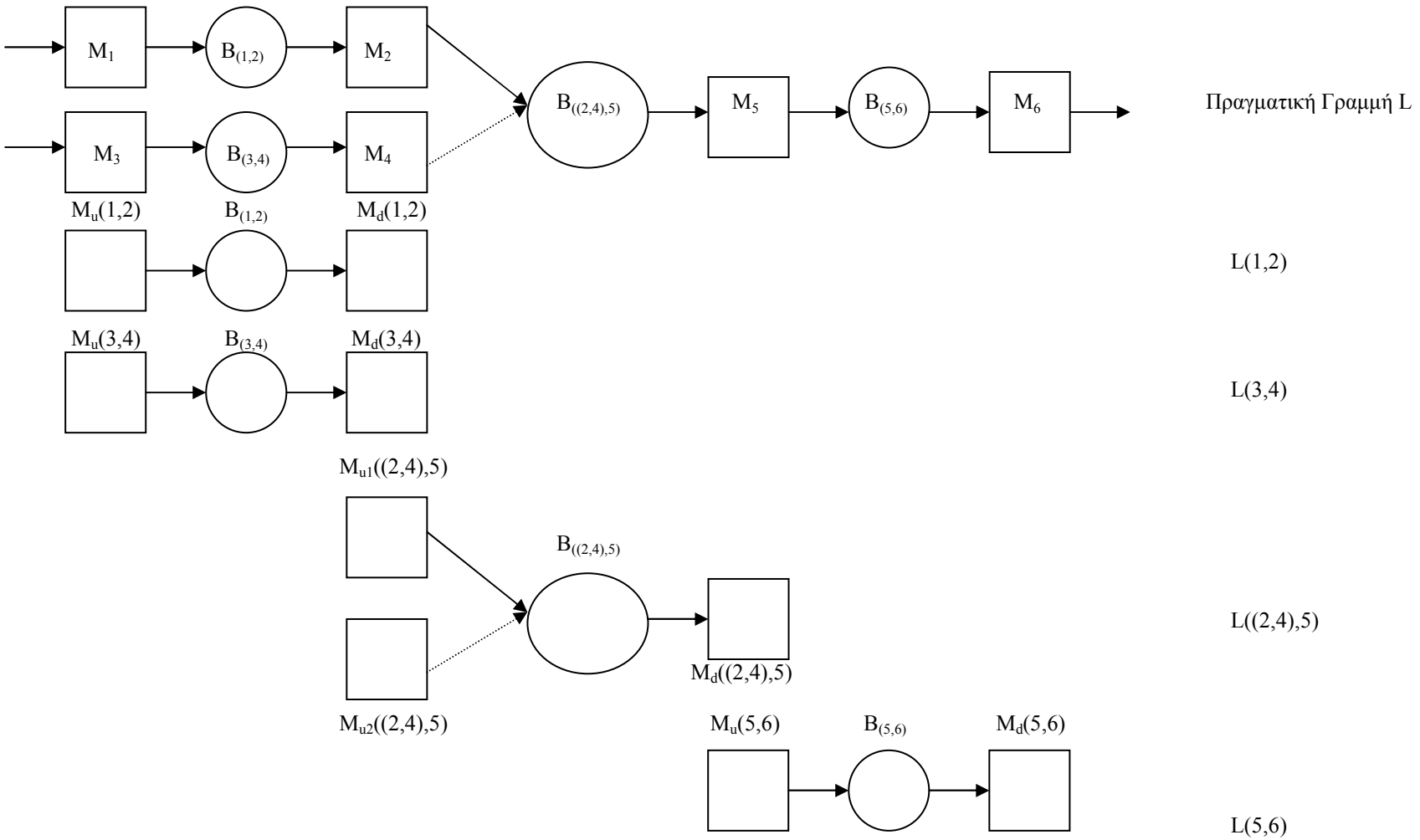
Η εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης απαιτεί την υλοποίηση τριών βημάτων:

ΒΗΜΑ 1^{Ο} : Επίλυση[*] δυο τύπων δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης (ΔΣΜΑ). Ο πρώτος τύπος αποτελείται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο (σχήμα 11) και έχει αναλυθεί με κάθε λεπτομέρεια από τον Gershwin (1994), ενώ ο δεύτερος τύπος αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο (σχήμα 5) και αναλύεται στην επόμενη ενότητα με χρήση Μαρκοβιανής ανάλυσης.

ΒΗΜΑ 2^{Ο} : Ανάπτυξη των τροποποιημένων εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης, οι οποίες θα συσχετίζουν τις παραμέτρους των μηχανών της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής παραγωγής με τις παραμέτρους των αντίστοιχων ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών των εμπλεκόμενων δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης.

ΒΗΜΑ 3^{Ο} : Δημιουργία ενός αλγόριθμου ο οποίος θα επιλύει ταυτόχρονα όλες τις εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης για τον υπολογισμό της απόδοσης της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής παραγωγής του σχήματος 16.

[*]Με τον όρο επίλυση του συστήματος εννοούμε τον ακριβή προσδιορισμό όλων των στάσιμων πιθανοτήτων του και κατά συνέπεια της απόδοσής του.



Σχήμα 16: Η τροποποιημένη μέθοδος της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης που μοντελοποιούνται με βάση το σχήμα 5

3.7 Επίλυση του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης

Στην ενότητα αυτή επιλύεται το σύστημα που παρουσιάζεται στο σχήμα 5 και χρησιμοποιείται σαν νέο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης στην τροποποιημένη μέθοδο της αποσύνθεσης με σκοπό τη μοντελοποίηση των εργασιών συγχώνευσης.
Η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του συστήματος αυτού είναι η Μαρκοβιανή ανάλυση. Πριν προχωρήσουμε όμως στην επίλυση του συστήματος, θα δώσουμε μια αναλυτική περιγραφή του καθώς και τις παραμέτρους και προϋποθέσεις που το προσδιορίζουν.

3.7.1 Προϋποθέσεις του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης

Στο σημείο αυτό παρουσιάζονται οι υποθέσεις, η ορολογία και ο συμβολισμός που χρησιμοποιούνται για το σύστημα του σχήματος 5 που αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο και χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση των εργασιών συγχώνευσης.

1. Τα προϊόντα κινούνται εξωτερικά από το σύστημα προς τις μηχανές M_1 και M_2, στη συνέχεια προς τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((1,2),3)}$ και τέλος προς την μηχανή M_3 όπου μετά τη επεξεργασία τους εξέρχονται του συστήματος.
2. Πριν τις μηχανές M_1 και M_2 υποθέτουμε ότι υπάρχει πάντοτε διαθέσιμο προϊόν για επεξεργασία (δηλαδή οι μηχανές M_1 και M_2 δεν είναι *πότε* άδειες). Επίσης υποθέτουμε ότι μετά τη μηχανή M_3 υπάρχει πάντοτε αποθηκευτικός χώρος για να αποθέσει η μηχανή M_3 τα προϊόντα που έχει ήδη επεξεργαστεί (δηλαδή η μηχανή M_3 δεν είναι *πότε* μπλοκαρισμένη).
3. Μια μηχανή λέμε ότι είναι άδεια (starved) αν ο αποθηκευτικός χώρος που βρίσκεται πριν από αυτήν είναι άδειος, ενώ λέγεται μπλοκαρισμένη (blocked) αν ο αποθηκευτικός χώρος που υπάρχει μετά από αυτήν είναι γεμάτος.
4. Η χωρητικότητα σε προϊόντα του ενδιάμεσου αποθηκευτικού χώρου $B_{((1,2),3)}$ συμβολίζεται με C.
5. Η χωρητικότητα όλου του συστήματος N είναι διαφορετική από τη χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου $B_{((1,2),3)}$, C. Η χωρητικότητα του συστήματος N είναι ίση με τη χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου $B_{((1,2),3)}$ προσθέτοντας τα προϊόντα που κάθε μια από τις τρεις μηχανές μπορούν να διατηρήσουν στη περιοχή εργασίας της. Κάθε μηχανή μπορεί να κρατήσει μέχρι ένα προϊόν στη περιοχή εργασίας της Λόγω του ότι υπάρχουν τρεις μηχανές στο σύστημα έχουμε ότι N=C+3. Ένα προϊόν λέμε ότι βρίσκεται στη περιοχή εργασίας των μηχανών M_1 ή M_2 αν έχει ήδη ολοκληρώσει την επεξεργασία του από την M_1 ή την M_2, αλλά ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((1,2),3)}$ είναι γεμάτος και ένα προϊόν ήδη βρίσκεται στη περιοχή εργασίας της M_3. Πρέπει να διευκρινιστεί ότι ένα προϊόν που βρίσκεται στη περιοχή εργασίας των M_1 ή M_2 χωρίς να έχει ολοκληρώσει την επεξεργασία του από την μηχανή M_1 ή M_2, ή περιμένει επιδιόρθωση μιας βλάβης, δεν υπολογίζεται στη συνολική χωρητικότητα του συστήματος διότι δεν είναι διαθέσιμο προς επεξεργασία από τη μηχανή M_3. Οι ακραίες τιμές της χωρητικότητας όλου του συστήματος είναι 0

όταν η μηχανή M_3 είναι άδεια και C+3 όταν οι M_1 και M_2 είναι μπλοκαρισμένες ταυτόχρονα.

6. Οι μηχανές M_1 και M_2 του συστήματος του σχήματος 5, βρίσκονται μπλοκαρισμένες μετά την ολοκλήρωση της επεξεργασίας του προϊόντος (Blocking After Service (BAS)). Αυτό σημαίνει ότι αν ένα προϊόν έχει ολοκληρώσει την επεξεργασία του αλλά εκείνη τη χρονική στιγμή ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((1,2),3)}$ είναι γεμάτος τότε το προϊόν παραμένει στη μηχανή μέχρις ότου ο αποθηκευτικός χώρος πάψει να είναι γεμάτος και η μηχανή θεωρείται μπλοκαρισμένη.
7. Όταν ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((1,2),3)}$ δεν είναι γεμάτος τότε οι μηχανές M_1 και M_2 λειτουργούν παράλληλα παράγοντας προϊόντα ίδιου τύπου. Όταν ο αποθηκευτικός χώρος είναι γεμάτος $B_{((1,2),3)}$ τότε η μηχανή M_1 έχει προτεραιότητα έναντι της M_2 να είναι εκείνη που θα αποθέσει πρώτη προϊόν στον αποθηκευτικό χώρο $B_{(1,2),3}$ μόλις αυτός πάψει να είναι γεμάτος..
8. Και οι τρεις μηχανές έχουν σταθερούς και ίσους μεταξύ τους χρόνους εξυπηρέτησης. Αυτό σημαίνει ότι οι χρόνοι επεξεργασίας και των τριών είναι σταθεροί και ταυτόσημοι μεταξύ τους και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι είναι ίσοι με μια μονάδα χρόνου.
9. Με $\alpha_i, i = 1,2,3$ συμβολίζουμε την κατάσταση στην οποία βρίσκεται η μηχανή M_i αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα αν $\alpha_i = 0$ τότε η μηχανή M_i είναι χαλασμένη (down), ενώ αν $\alpha_i = 1$ τότε η μηχανή M_i λειτουργεί κανονικά (up).
10. Και οι τρεις μηχανές μπορούν να παρουσιάσουν βλάβη μόνον όταν βρίσκονται σε λειτουργία και επεξεργάζονται κάποιο προϊόν (operational dependent failures (ODF's)). Αυτό σημαίνει ότι αν κάποια μηχανή λειτουργεί, αλλά είναι μπλοκαρισμένη ή άδεια τότε δεν μπορεί να παρουσιάσει βλάβη.
11. Οι μηχανές υποθέτουμε ότι έχουν γεωμετρικά κατανεμημένους χρόνους λειτουργίας μεταξύ των βλαβών τους. Εάν η μηχανή M_i, i=1,2 βρίσκεται σε λειτουργία και δεν είναι μπλοκαρισμένη στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε μπορεί να παρουσιάσει βλάβη στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα p_i, i=1,2, αντίστοιχα, η οποία ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή. Επίσης αν η μηχανή M_3 βρίσκεται σε λειτουργία και δεν είναι άδεια στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε μπορεί να παρουσιάσει βλάβη στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα p_3.Αυτό σημαίνει ότι οι μέσοι χρόνοι λειτουργίας (σε χρονικές περιόδους) της μηχανής M_i , i=1,2,3 μεταξύ των βλαβών είναι $\frac{1}{p_i}, i = 1,2,3$, αντίστοιχα ή ισοδύναμα ότι ο μέσος χρόνος εμφάνισης βλαβών για τη μηχανή M_i, i=1,2,3 είναι $\frac{1}{p_i}, i = 1,2,3$, αντίστοιχα.
12. Εάν μια μηχανή M_i, i=1,2,3 είναι χαλασμένη στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε επισκευάζεται στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα r_i, i=1,2,3, αντίστοιχα η οποία ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή. Αυτό σημαίνει ότι ο μέσος χρόνος επισκευής μιας βλάβης της μηχανής M_i, i=1,2,3, είναι $\frac{1}{r_i}, i = 1,2,3$, αντίστοιχα.

13. Ο αριθμός των προϊόντων που βρίσκονται στο σύστημα τη χρονική στιγμή t συμβολίζεται με n(t) και είναι προφανές ότι $0 \le n(t) \le N$.
14. Η κατάσταση στην οποία μπορεί να βρεθεί το σύστημα του σχήματος 5 περιγράφεται από το διάνυσμα $S = (n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, όπου $0 \le n \le N$ και $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{0,1\}$. Λόγω της υπόθεσης 7 εμφανίζονται δυο επιπλέον φαινόμενα που σχετίζονται με τη λειτουργία της μηχανής M_2. Τα φαινόμενα αυτά είναι τα φαινόμενα του *μερικού μπλοκαρίσματος (patial blocking)* και *πλήρους μπλοκαρίσματος (fully blocking)* της μηχανής M_2. Η μηχανή M_2 λέμε ότι είναι *μερικώς μπλοκαρισμένη* όταν n=N-1, a_2=1 και $a_1 \in \{0,1\}$, ενώ λέμε ότι είναι *πλήρως μπλοκαρισμένη* όταν n = N, a_2=1 και a_1=1. Επίσης η μηχανή M_1 είναι μπλοκαρισμένη όταν n = N, a_1=1 και a_2=1, ή όταν n=N-1, a_1=1 και a_2=0. Οι χρόνοι μετακίνησης των προϊόντων μεταξύ των μηχανών και των αποθηκευτικών χώρων θεωρούνται αμελητέοι σε σύγκριση με τους χρόνους επεξεργασίας.
15. Οι βλάβες και οι επιδιορθώσεις των μηχανών εμφανίζονται στο ξεκίνημα των χρονικών περιόδων, ενώ οι μεταβολές στον αριθμό των προϊόντων που βρίσκονται στον αποθηκευτικό χώρο γίνονται στο τέλος των χρονικών περιόδων.

Για την ανάλυση του συστήματος του σχήματος 5 με σκοπό τον υπολογισμό των στάσιμων πιθανοτήτων όλων των καταστάσεων και κατά συνέπεια των μέτρων απόδοσής του με χρήση Μαρκοβιανής ανάλυσης, τα ακόλουθα βήματα πρέπει να υλοποιηθούν:

Βήμα 1^{ο} : Δημιουργία όλων των εξισώσεων μετάβασης (εσωτερικών, κάτω οριακών και άνω οριακών) του Μαρκοβιανού μοντέλου.

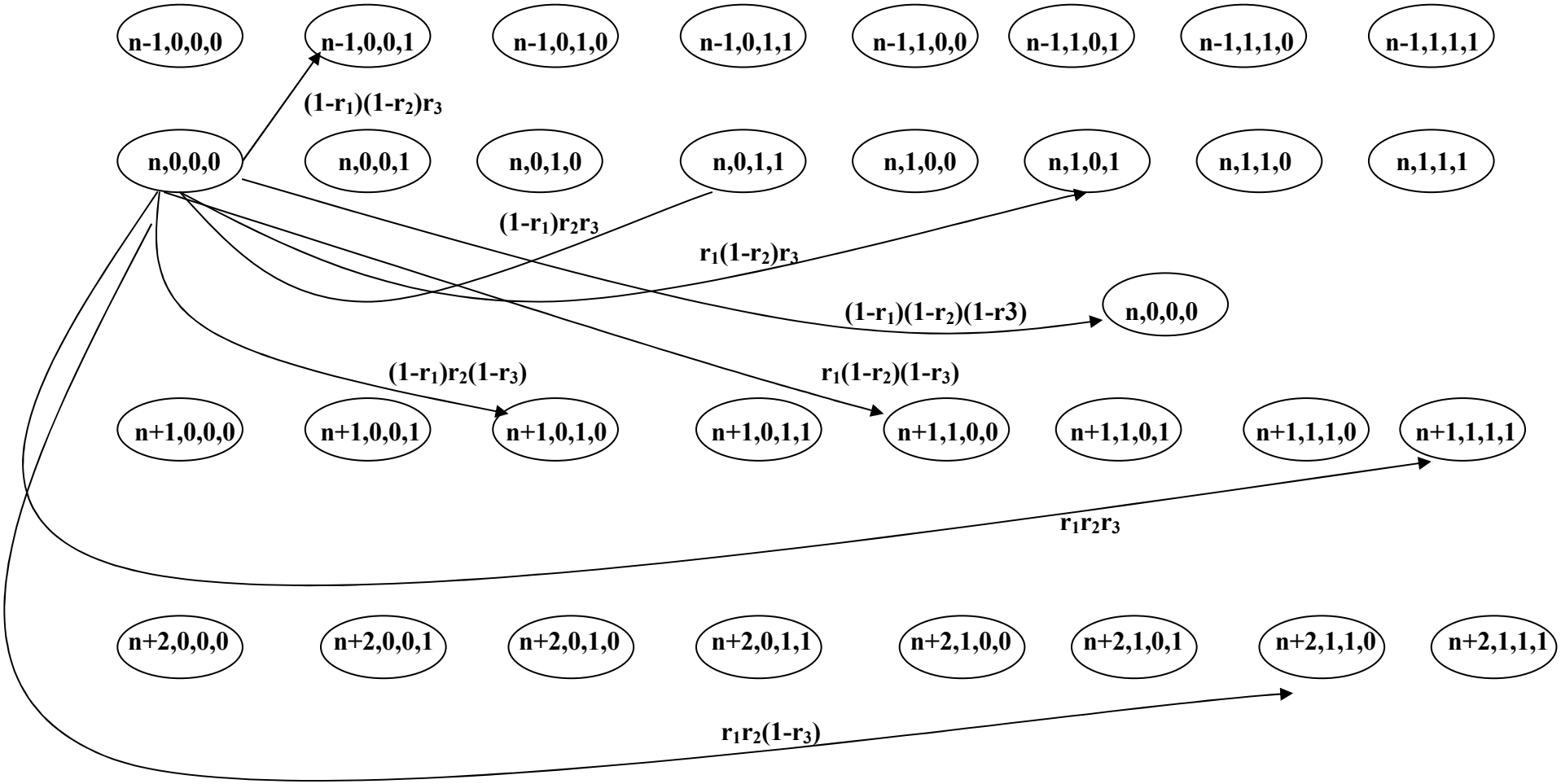
Βήμα 2^{ο} : Ανάπτυξη ενός αλγόριθμου για τη γέννηση του πίνακα μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή N (N=C+3) της συνολικής χωρητικότητας του συστήματος

Βήμα 3^{ο} : Αριθμητικός υπολογισμός όλων των στάσιμων πιθανοτήτων και των μέτρων απόδοσης του συστήματος όπως π.χ. η απόδοση και ο αριθμός των ημιακατέργαστων προϊόντων που υπάρχουν στο σύστημα, (Work-In-Progress: WIP).

3.7.2 Δημιουργία των εξισώσεων μετάβασης

Το σύστημα του σχήματος 5 μπορεί να μεταβαίνει από μια κατάσταση σε μια άλλη με μια πιθανότητα. Η πιθανότητα αυτή ονομάζεται πιθανότητα μετάβασης και οι εξισώσεις που περιέχουν τις πιθανότητες αυτές και περιγράφουν τις μεταβάσεις από κατάσταση σε κατάσταση λέγονται εξισώσεις μετάβασης.
Για την εύρεση των εξισώσεων μετάβασης του σχήματος 5 χρησιμοποιούνται διαγράμματα σαν και αυτά του σχήματος 17 τα οποία περιγράφουν τη μετάβαση από μια κατάσταση τη χρονική στιγμή t σε όλες τις πιθανές καταστάσεις που μπορεί να βρεθεί το σύστημα τη χρονική στιγμή t+1. Πιο συγκεκριμένα στο διάγραμμα του σχήματος 17 παρουσιάζονται όλες οι πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση (n,0,0,0) τη χρονική στιγμή t σε όλες τις πιθανές καταστάσεις τη χρονική στιγμή t+1.
Για παράδειγμα η μετάβαση από την κατάσταση (n,0,0,0) τη χρονική στιγμή t στη κατάσταση (n-1,0,0,1) τη χρονική στιγμή t+1 γίνεται ως εξής:

Τη χρονική στιγμή t και οι τρεις μηχανές του συστήματος είναι χαλασμένες. Τη χρονική στιγμή t+1 οι μηχανές M_1 και M_2 εξακολουθούν να είναι χαλασμένες (δηλαδή δεν πρέπει να επιδιορθωθούν) γεγονός που μπορεί να συμβεί με πιθανότητα $(1-r_1)$ και $(1-r_2)$ αντίστοιχα. Η μηχανή M_3 τη χρονική στιγμή t είναι χαλασμένη ενώ τη χρονική στιγμή t+1 έχει επιδιορθωθεί με πιθανότητα r_3 και έχει ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος, με αποτέλεσμα ο αριθμός των προϊόντων στον αποθηκευτικό χώρο να μειώνεται από n που ήταν τη χρονική στιγμή t σε n-1 τη χρονική στιγμή t+1.
Συνολικά η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση (n,0,0,0) τη χρονική στιγμή t στη κατάσταση (n-1,0,0,1) τη χρονική στιγμή t+1 είναι $(1-r_1)(1-r_2)r_3$. Η εξίσωση που περιγράφει τη μετάβαση αυτή είναι $p[n-1,0,0,1] = (1-r_1)(1-r_2)r_3\ p[n,0,0,0]$.



Σχήμα 17: Διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης από την κατάσταση (n,0,0,0)

Χρησιμοποιώντας διαγράμματα μετάβασης σαν και αυτό του σχήματος 17 για όλες τις καταστάσεις του συστήματος, βρίσκουμε όλες τις πιθανότητες μετάβασης από μια κατάσταση σε μια άλλη για το χρονικό διάστημα (t,t+1). Στη συνέχεια παρουσιάζονται όλες οι εξισώσεις μετάβασης από κατάσταση σε κατάσταση κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος (t,t+1) .
Με βάση τον αριθμό των προϊόντων που βρίσκονται στον ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο οι καταστάσεις του συστήματος διακρίνονται σε τρεις βασικές κατηγορίες. Οι κατηγορίες αυτές είναι

(α) Εσωτερικές καταστάσεις
(β) Κάτω οριακές καταστάσεις
(γ) Άνω οριακές καταστάσεις

Παρόμοια ονοματολογία χρησιμοποιείται και για τις εξισώσεις που οδηγούν στις καταστάσεις αυτές. Έτσι λοιπόν διακρίνουμε τρεις κατηγορίες εξισώσεων μετάβασης:

(α) Εσωτερικές εξισώσεις μετάβασης
(β) Κάτω οριακές εξισώσεις μετάβασης
(γ) Άνω οριακές εξισώσεις μετάβασης

Εσωτερικές εξισώσεις μετάβασης

Καταστάσεις της μορφής (n, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$), όπου $2< n < N-2$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \{0,1\}$ ονομάζονται εσωτερικές καταστάσεις. Οι εξισώσεις αυτές περιέχουν το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων μετάβασης που οδηγούν σε εσωτερικές καταστάσεις και λέγονται εσωτερικές εξισώσεις μετάβασης. Χρησιμοποιούνται για την εύρεση των στάσιμων πιθανοτήτων των καταστάσεων αυτών. Οι εξισώσεις αυτές έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} p[n,0,0,0] = {} & (1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)\,p[n,0,0,0] + (1-r_1)(1-r_2)\,p_3\,p[n,0,0,1] + \\ & (1-r_1)\,p_2\,(1-r_3)\,p[n,0,1,0] + (1-r_1)\,p_2\,p_3\,p[n,0,1,1] + \\ & p_1\,(1-r_2)(1-r_3)\,p[n,1,0,0] + p_1\,(1-r_2)\,p_3\,p[n,1,0,1] + \\ & p_1\,p_2\,(1-r_3)\,p[n,1,1,0] + p_1\,p_2\,p_3\,p[n,1,1,1] \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} p[n,0,0,1] = {} & (1-r_1)(1-r_2)\,r_3\,p[n+1,0,0,0] + (1-r_1)(1-r_2)(1-p_3)\,p[n+1,0,0,1] + \\ & (1-r_1)\,p_2\,r_3\,p[n+1,0,1,0] + (1-r_1)\,p_2\,(1-p_3)\,p[n+1,0,1,1] + \\ & p_1\,(1-r_2)\,r_3\,p[n+1,1,0,0] + p_1\,(1-r_2)(1-p_3)\,p[n+1,1,0,1] + \\ & p_1\,p_2\,r_3\,p[n+1,1,1,0] + p_1\,p_2\,(1-p_3)\,p[n+1,1,1,1] \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} p[n,0,1,0] = {} & (1-r_1)\,r_2\,(1-r_3)\,p[n-1,0,0,0] + (1-r_1)\,r_2\,p_3\,p[n-1,0,0,1] + \\ & (1-r_1)(1-p_2)(1-r_3)\,p[n-1,0,1,0] + (1-r_1)(1-p_2)\,p_3\,p[n-1,0,1,1] + \\ & p_1\,r_2\,(1-r_3)\,p[n-1,1,0,0] + p_1\,r_2\,p_3\,p[n-1,1,0,1] + \\ & p_1\,(1-p_2)(1-r_3)\,p[n-1,1,1,0] + p_1\,(1-p_2)\,p_3\,p[n-1,1,1,1] \end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} p[n,0,1,1] = {} & (1-r_1)\,r_2\,r_3\,p[n,0,0,0] + (1-r_1)\,r_2\,(1-p_3)\,p[n,0,0,1] + \\ & (1-r_1)(1-p_2)\,r_3\,p[n,0,1,0] + (1-r_1)(1-p_2)(1-p_3)\,p[n,0,1,1] + \\ & p_1\,r_2\,r_3\,p[n,1,0,0] + p_1\,r_2\,(1-p_3)\,p[n,1,0,1] + p_1\,(1-p_2)\,r_3\,p[n,1,1,0] + \\ & p_1\,(1-p_2)(1-p_3)\,p[n,1,1,1] \end{aligned} \qquad (5)$$

$$p[n,1,0,0] = r_1 (1-r_2) (1-r_3) p[n-1,0,0,0] + r_1 (1-r_2) p_3 p[n-1,0,0,1] + r_1 p_2 (1-r_3) p[n-1,0,1,0] + r_1 p_2 p_3 p[n-1,0,1,1] + (1-p_1) (1-r_2) (1-r_3) p[n-1,1,0,0] + (1-p_1) (1-r_2) p_3 p[n-1,1,0,1] + (1-p_1) p_2 (1-r_3) p[n-1,1,1,0] + (1-p_1) p_2 p_3 p[n-1,1,1,1] \quad (6)$$

$$p[n,1,0,1] = r_1 (1-r_2) r_3 p[n,0,0,0] + r_1 (1-r_2) (1-p_3) p[n,0,0,1] + r_1 p_2 r_3 p[n,0,1,0] + r_1 p_2 (1-p_3) p[n,0,1,1] + (1-p_1) (1-r_2) r_3 p[n,1,0,0] + (1-p_1) (1-r_2) (1-p_3) p[n,1,0,1] + (1-p_1) p_2 r_3 p[n,1,1,0] + (1-p_1) p_2 (1-p_3) p[n,1,1,1] \quad (7)$$

$$p[n,1,1,0] = r_1 r_2 (1-r_3) p[n-2,0,0,0] + r_1 r_2 p_3 p[n-2,0,0,1] + r_1 (1-p_2) (1-r_3) p[n-2,0,1,0] + r_1 (1-p_2) p_3 p[n-2,0,1,1] + (1-p_1) r_2 (1-r_3) p[n-2,1,0,0] + (1-p_1) r_2 p_3 p[n-2,1,0,1] + (1-p_1) (1-p_2) (1-r_3) p[n-2,1,1,0] + (1-p_1) (1-p_2) p_3 p[n-2,1,1,1] \quad (8)$$

$$p[n,1,1,1] = r_1 r_2 r_3 p[n-1,0,0,0] + r_1 r_2 (1-p_3) p[n-1,0,0,1] + r_1(1-p_2) r_3 p[n-1,0,1,0] + r_1 (1-p_2) (1-p_3) p[n-1,0,1,1] + (1-p_1) r_2 r_3 p[n-1,1,0,0] + (1-p_1) r_2 (1-p_3) p[n-1,1,0,1] + (1-p_1) (1-p_2) r_3 p[n-1,1,1,0] + (1-p_1) (1-p_2) (1-p_3) p[n-1,1,1,1] \quad (9)$$

Κάτω οριακές εξισώσεις μετάβασης:

Καταστάσεις της μορφής $(n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, όπου $n=0,1,2$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{0,1\}$ ονομάζονται κάτω οριακές καταστάσεις. Οι εξισώσεις αυτές περιέχουν το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων μετάβασης που οδηγούν σε κάτω οριακές καταστάσεις και λέγονται κάτω οριακές εξισώσεις μετάβασης. Χρησιμοποιούνται για την εύρεση των στάσιμων πιθανοτήτων των καταστάσεων αυτών. Οι εξισώσεις αυτές έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$p[0,0,0,1] = (1-r_1) (1-r_2) p[0,0,0,1] + (1-r_1) p_2 p[0,0,1,1] + p_1 p_2 p[0,1,1,1] + p_1 (1-r_2) p[0,1,0,1] + (1-r_1) (1-r_2) (1-p_3) p[1,0,0,1] + (1-r_1) p_2 (1-p_3) p[1,0,1,1] + p_1 (1-r_2) (1-p_3) p[1,1,0,1] + p_1 p_2 (1-p_3) p[1,1,1,1] + (1-r_1) p_2 r_3 p[1,0,1,0] + (1-r_1) (1-r_2) r_3 p[1,0,0,0] + p_1 (1-r_2) r_3 p[1,1,0,0] + p_1 p_2 r_3 p[1,1,1,0] \quad (10)$$

$$p[1,0,0,1] = (1-r_1) (1-r_2) (1-p_3) p[2,0,0,1] + (1-r_1) p_2 (1-p_3) p[2,0,1,1] + p_1 (1-r_2) (1-p_3) p[2,1,0,1] + p_1 p_2 (1-p_3) p[2,1,1,1] + (1-r_1) (1-r_2) r_3 p[2,0,0,0] + (1-r_1) p_2 r_3 p[2,0,1,0] + p_1 (1-r_2) r_3 p[2,1,0,0] + p_1 p_2 r_3 p[2,1,1,0] \quad (11)$$

$$p[2,1,1,1] = r_1 r_2 r_3 p[1,0,0,0] + r_1 r_2 (1-p_3) p[1,0,0,1] + r_1 r_2 p[0,0,0,1] + r_1 (1-p_2) r_3 p[1,0,1,0] + r_1 (1-p_2) (1-p_3) p[1,0,1,1] + r_1 (1-p_2) p[0,0,1,1] + (1-p_1) r_2 r_3 p[1,1,0,0] + (1-p_1) r_2 (1-p_3) p[1,1,0,1] + (1-p_1) r_2 p[0,1,0,1] + (1-p_1) (1-p_2) r_3 p[1,1,1,0] + (1-p_1) (1-p_2) (1-p_3) p[1,1,1,1] + (1-p_1) (1-p_2) p[0,1,1,1] \quad (12)$$

$$p[0,1,0,1] = p[0,1,1,1] = 0 \quad (13)$$

$$p[1,0,0,0] = (1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)\,p[1,0,0,0] + (1-r_1)(1-r_2)\,p_3\,p[1,0,0,1] + (1-r_1)\,p_2\,(1-r_3)\,p[1,0,1,0] + (1-r_1)\,p_2\,p_3\,p[1,0,1,1] + p_1\,(1-r_2)(1-r_3)\,p[1,1,0,0] + p_1\,(1-r_2)\,p_3\,p[1,1,0,1] + p_1\,p_2\,(1-r_3)\,p[1,1,1,0] + p_1\,p_2\,p_3\,p[1,1,1,1] \quad (14)$$

$$p[1,0,1,1] = (1-r_1)\,r_2\,r_3\,p[1,0,0,0] + (1-r_1)\,r_2\,p[0,0,0,1] + (1-r_1)\,r_2\,(1-p_3)\,p[1,0,0,1] + (1-r_1)(1-p_2)\,r_3\,p[1,0,1,0] + (1-r_1)(1-p_2)\,p[0,0,1,1] + (1-r_1)(1-p_2)(1-p_3)\,p[1,0,1,1] + p_1\,r_2\,r_3\,p[1,1,0,0] + p_1\,r_2\,p[0,1,0,1] + p_1\,r_2\,(1-p_3)\,p[1,1,0,1] + p_1\,(1-p_2)\,r_3\,p[1,1,1,0] + p_1\,(1-p_2)\,p[0,1,1,1] + p_1\,(1-p_2)(1-p_3)\,p[1,1,1,1]. \quad (15)$$

$$p[1,1,0,0] = p[1,1,1,0]=p[1,1,1,1]= p[1,0,1,0] = 0 \quad (16)$$

$$p[1,1,0,1] = r_1\,(1-r_2)\,r_3\,p[1,0,0,0] + r_1\,(1-r_2)\,p[0,0,0,1] + r_1\,(1-r_2)\,(1-p_3)\,p[1,0,0,1] + r_1\,p_2\,r_3\,p[1,0,1,0] + r_1\,p_2\,p[0,0,1,1] + r_1\,p_2\,(1-p_3)\,p[1,0,1,1] + (1-p_1)(1-r_2)\,r_3\,p[1,1,0,0] + (1-p_1)(1-r_2)\,p[0,1,0,1] + (1-p_1)(1-r_2)(1-p_3)\,p[1,1,0,1] + (1-p_1)\,p_2\,r_3\,p[1,1,1,0] + (1-p_1)\,p_2\,p[0,1,1,1] + (1-p_1)\,p_2\,(1-p_3)\,p[1,1,1,1] \quad (17)$$

$$p[2,1,1,0]=0 \quad (18)$$

Οι εξισώσεις μετάβασης που οδηγούν στις καταστάσεις (2,0,0,0), (2,0,0,1), (2,0,1,0), (2,0,1,1), (2,1,0,0) και (2,1,0,1) έχουν ακριβώς την ίδια μορφή με αυτή των εσωτερικών καταστάσεων (n,0,0,0), (n,0,0,1), (n,0,1,0), (n,0,1,1), (n,1,0,0) και (n,1,0,1) αντικαθιστώντας στις αντίστοιχες εξισώσεις n=2.

Άνω οριακές εξισώσεις μετάβασης

Καταστάσεις της μορφής (n, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$), όπου n=N-1, N-2, N, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \{0,1\}$ ονομάζονται άνω οριακές καταστάσεις. Οι εξισώσεις αυτές περιέχουν το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων μετάβασης που οδηγούν σε άνω οριακές καταστάσεις και λέγονται άνω οριακές εξισώσεις μετάβασης. Χρησιμοποιούνται για την εύρεση των στάσιμων πιθανοτήτων των καταστάσεων αυτών. Οι εξισώσεις αυτές έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$p[N-2,0,0,0] = (1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)\,p[N-2,0,0,0]+(1-r_1)(1-r_2)p_3\,p[N-2,0,0,1]+(1-r_1)p_2(1-r_3)\,p[N-2,0,1,0]+(1-r_1)p_2p_3\,p[N-2,0,1,1]+p_1(1-r_2)(1-r_3)\,p[N-2,1,0,0]+p_1(1-r_2)p_3\,p[N-2,1,0,1]+p_1p_2(1-r_3)\,p[N-2,1,1,0]+p_1p_2p_3\,p[N-2,1,1,1] \quad (19)$$

$$p[N-1,0,1,0] = (1-r_1)\,r_2\,(1-r_3)\,p[N-2,0,0,0] + (1-r_1)\,r_2\,p_3\,p[N-2,0,0,1] + (1-r_1)(1-p_2)(1-r_3)\,p[N-2,0,1,0] + (1-r_1)(1-p_2)\,p_3\,p[N-2,0,1,1] + p_1\,r_2\,(1-r_3)\,p[N-2,1,0,0] + p_1\,r_2\,p_3\,p[N-2,1,0,1] + p_1\,(1-p_2)(1-r_3)\,p[N-2,1,1,0] + p_1\,(1-p_2)\,p_3\,p[N-2,1,1,1]+(1-r_1)(1-r_3)\,p[N-1,0,1,0]+ p_1(1-r_3)\,p[N-1,1,1,0]+(1-r_1)p_3\,p[N-1,0,1,1]+p_1p_3\,p[N-1,1,1,1] \quad (20)$$

$$p[N,1,1,0] = r_1\, r_2\, (1-r_3)\, p[N-2,0,0,0] + r_1\, r_2\, p_3\, p[N-2,0,0,1] + r_1\, (1-p_2)\, (1-r_3)\, p[N-2,0,1,0] \; r_1\, (1-p_2)\, p_3\, p[N-2,0,1,1] + (1-p_1)\, r_2\, (1-r_3)\, p[N-2,1,0,0] + (1-p_1)\, r_2\, p_3\, p[N-2,1,0,1] + (1-p_1)\, (1-p_2)\, (1-r_3)\, p[N-2,1,1,0] + (1-p_1)\, (1-p_2)\, p_3\, p[N-2,1,1,1] + r_1(1-r_3)\, p[N-1,0,1,0] + r_2(1-r_3)\, p[N-1,1,0,0] + r_2 p_3\, p[N-1,1,0,1] + (1-p_1)(1-r_3)\, p[N-1,1,1,0] + r_1 p_3\, p[N-1,0,1,1] + (1-p_1) p_3\, p[N-1,1,1,1] + (1-r_3) p[N,1,1,0] + p_3\, p[N,1,1,1] \quad (21)$$

$$p[N-2,0,0,1] = 0 \quad (22)$$

$$p[N-2,0,1,0] = (1-r_1)\, r_2\, (1-r_3)\, p[N-3,0,0,0] + (1-r_1)\, r_2\, p_3\, p[N-3,0,0,1] + (1-r_1)\, (1-p_2)\, (1-r_3)\, p[N-3,0,1,0] + (1-r_1)\, (1-p_2)\, p_3\, p[N-3,0,1,1] + p_1\, r_2\, (1-r_3)\, p[N-3,1,0,0] + p_1\, r_2\, p_3\, p[N-3,1,0,1] + p_1\, (1-p_2)\, (1-r_3)\, p[N-3,1,1,0] + p_1\, (1-p_2)\, p_3\, p[N-3,1,1,1] \quad (23)$$

$$p[N-2,0,1,1] = (1-r_1)\, r_2\, r_3\, p[N-2,0,0,0] + (1-r_1)\, r_2\, (1-p_3)\, p[N-2,0,0,1] + (1-r_1)\, (1-p_2)\, r_3\, p[N-2,0,1,0] + (1-r_1)\, (1-p_2)\, (1-p_3)\, p[N-2,0,1,1] + p_1\, r_2\, r_3\, p[N-2,1,0,0] + p_1\, r_2\, (1-p_3)\, p[N-2,1,0,1] + p_1\, (1-p_2)\, r_3\, p[N-2,1,1,0] + p_1\, (1-p_2)\, (1-p_3)\, p[N-2,1,1,1] + (1-r_1) r_3\, p[N-1,0,1,0] + p_1 r_3\, p[N-1,1,1,0] + (1-r_1)(1-p_3)\, p[N-1,0,1,1] + p_1(1-p_3)\, p[N-1,1,1,1] \quad (24)$$

$$p[N-2,1,0,0] = r_1\, (1-r_2)\, (1-r_3)\, p[N-3,0,0,0] + r_1\, (1-r_2)\, p_3\, p[N-3,0,0,1] + r_1\, p_2\, (1-r_3)\, p[N-3,0,1,0] + r_1\, p_2\, p_3\, p[N-3,0,1,1] + (1-p_1)\, (1-r_2)\, (1-r_3)\, p[N-3,1,0,0] + (1-p_1)\, (1-r_2)\, p_3\, p[N-3,1,0,1] + (1-p_1)\, p_2\, (1-r_3)\, p[N-3,1,1,0] + (1-p_1)\, p_2\, p_3\, p[N-3,1,1,1] \quad (25)$$

$$p[N-2,1,0,1] = r_1\, (1-r_2)\, r_3\, p[N-2,0,0,0] + r_1\, (1-r_2)\, (1-p_3)\, p[N-2,0,0,1] + r_1\, p_2\, r_3\, p[N-2,0,1,0] + r_1\, p_2\, (1-p_3)\, p[N-2,0,1,1] + (1-p_1)\, (1-r_2)\, r_3\, p[N-2,1,0,0] + (1-p_1)\, (1-r_2)\, (1-p_3)\, p[N-2,1,0,1] + (1-p_1)\, p_2\, r_3\, p[N-2,1,1,0] + (1-p_1)\, p_2\, (1-p_3)\, p[N-2,1,1,1] + (1-r_2) r_3 p[N-1,1,0,0] + (1-r_2)(1-p_3)\, p[N-1,1,0,1] \quad (26)$$

$$p[N-2,1,1,0] = r_1\, r_2\, (1-r_3)\, p[N-4,0,0,0] + r_1\, r_2\, p_3\, p[N-4,0,0,1] + r_1\, (1-p_2)\, (1-r_3)\, p[N-4,0,1,0] + r_1\, (1-p_2)\, p_3\, p[N-4,0,1,1] + (1-p_1)\, r_2\, (1-r_3)\, p[N-4,1,0,0] + (1-p_1)\, r_2\, p_3\, p[N-4,1,0,1] + (1-p_1)\, (1-p_2)\, (1-r_3)\, p[N-4,1,1,0] + (1-p_1)\, (1-p_2)\, p_3\, p[N-4,1,1,1] \quad (27)$$

$$p[N-2,1,1,1] = r_1\, r_2\, r_3\, p[N-3,0,0,0] + r_1\, r_2\, (1-p_3)\, p[N-3,0,0,1] + r_1(1-p_2)\, r_3\, p[N-3,0,1,0] + r_1\, (1-p_2)\, (1-p_3)\, p[N-3,0,1,1] + (1-p_1)\, r_2\, r_3\, p[N-3,1,0,0] + (1-p_1)\, r_2\, (1-p_3)\, p[N-3,1,0,1] + (1-p_1)\, (1-p_2)\, r_3\, p[N-3,1,1,0] + (1-p_1)\, (1-p_2)\, (1-p_3)\, p[N-3,1,1,1] \quad (28)$$

$$p[N,1,1,1] = 0 \quad (29)$$

$$p[N-1,0,1,1] = 0 \quad (30)$$

$$p[N-1,1,0,0] = r_1 (1-r_2) (1-r_3) p[N-2,0,0,0] + r_1 (1-r_2) p_3 p[N-2,0,0,1] + r_1 p_2 (1-r_3) p[N-2,0,1,0] + r_1 p_2 p_3 p[N-2,0,1,1] + (1-p_1) (1-r_2) (1-r_3) p[N-2,1,0,0] + (1-p_1) (1-r_2) p_3 p[N-2,1,0,1] + (1-p_1) p_2 (1-r_3) p[N-2,1,1,0] + (1-p_1) p_2 p_3 p[N-2,1,1,1]+ (1-r_2)(1-r_3) p[N-1,1,0,0]+(1-r_2)p_3 p[N-1,1,0,1] \quad (31)$$

$$p[N-1,1,0,1] = 0 \quad (32)$$

$$p[N-1,1,1,0] = r_1 r_2 (1-r_3) p[N-3,0,0,0] + r_1 r_2 p_3 p[N-3,0,0,1] + r_1 (1-p_2) (1-r_3) p[N-3,0,1,0] + r_1 (1-p_2) p_3 p[N-3,0,1,1] + (1-p_1) r_2 (1-r_3) p[N-3,1,0,0] + (1-p_1) r_2 p_3 p[N-3,1,0,1] + (1-p_1) (1-p_2) (1-r_3) p[N-3,1,1,0] + (1-p_1) (1-p_2) p_3 \ p[N-3,1,1,1] \quad (33)$$

$$p[N-1,1,1,1] = r_3 p[N,1,1,0] + (1-p_3) p[N,1,1,1] + r_1 r_2 r_3 p[N-2,0,0,0] + r_1 r_2 (1-p_3) p[N-2,0,0,1] + r_1 (1-p_2) r_3 p[N-2,0,1,0] + r_1 (1-p_2) (1-p_3) p[N-2,0,1,1] + (1-p_1) r_2 r_3 p[N-2,1,0,0] + (1-p_1) r_2 (1-p_3) p[N-2,1,0,1] + (1-p_1) (1-p_2) r_3 p[N-2,1,1,0] + (1-p_1) (1-p_2) (1-p_3) p[N-2,1,1,1]+r_1 r_3 p[N-1,0,1,0]+r_2 r_3 p[N-1,1,0,0]+ r_2(1-p_3) p[N-1,1,0,1]+(1-p_1) r_3 p[N-1,1,1,0]+ r_1(1-p_3) p[N-1,0,1,1]+ (1-p_1)(1-p_3) p[N-1,1,1,1] \quad (34)$$

Η ταυτόχρονη επίλυση και των τριών αυτών κατηγοριών εξισώσεων οδηγεί στην εύρεση των στάσιμων πιθανοτήτων όλων των πιθανών καταστάσεων του συστήματος με την χρήση των οποίων μπορούμε να βρούμε τα μέτρα απόδοσης του συστήματος. Είναι προφανές ότι το πλήθος των εξισώσεων αυξάνεται καθώς η συνολική χωρητικότητα N του συστήματος αυξάνει. Επειδή όμως όπως ήδη έχουμε αναφέρει N=C+3 ισοδύναμα το πλήθος των εξισώσεων αυξάνει καθώς η χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου αυξάνει. Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος ο οποίος σχηματίζει αυτόματα όλες τις εξισώσεις μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή του N.

Λόγω των προϋποθέσεων του συστήματος υπάρχουν κάποιες καταστάσεις στις οποίες το σύστημα δεν μπορεί να βρεθεί ποτέ. Οι καταστάσεις αυτές λέγονται ανέφικτες καταστάσεις (infeasible states). Για το σύστημα του σχήματος 5 υπάρχουν συνολικά 12 ανέφικτες καταστάσεις οι οποίες είναι άνω οριακές και κάτω οριακές καταστάσεις. Πιο συγκεκριμένα οι καταστάσεις αυτές είναι οι εξής:

- Για n=0: (0,0,0,0), (0,0,1,0), (0,1,0,0), (0,1,1,0)
- Για n=N-1: (N-1,0,0,0), (N-1,0,0,1)
- Για n=N: (N,0,0,0), (N,0,0,1), (N,0,1,0), (N,0,1,1), (N,1,0,0), (N,1,0,1)

Η εξήγηση γιατί η κατάσταση (0,0,0,0) είναι ανέφικτη είναι η ακόλουθη:
Επειδή $\alpha_3 = 0$, λόγω της υπόθεσης (10) της παραγράφου 3.7.1, η μηχανή M_3 παρουσίασε βλάβη ενώ ήδη επεξεργαζόταν ένα προϊόν, το οποίο εξακολουθεί να παραμένει στο χώρο εργασίας της μηχανής. Επίσης λόγω της υπόθεσης (5) το συγκεκριμένο προϊόν θα πρέπει να υπολογίζεται στη συνολική χωρητικότητα του συστήματος. Αυτό σημαίνει ότι θα έπρεπε να ήταν n=1, όμως η κατάσταση (0,0,0,0) υποδηλώνει ότι n=0 που είναι **άτοπο.** Άρα το σύστημα δεν μπορεί να βρεθεί στη κατάσταση (0,0,0,0). Για τις υπόλοιπες έντεκα καταστάσεις υπάρχει μια παρόμοια εξήγηση με την οποία αποδεικνύεται ότι οι καταστάσεις αυτές είναι ανέφικτες. Εκτός

όμως από τις ανέφικτες καταστάσεις υπάρχουν και κάποιες άλλες καταστάσεις του συστήματος οι οποίες έχουν **πάντοτε** μηδενική στάσιμη πιθανότητα. Οι καταστάσεις αυτές ονομάζονται παροδικές καταστάσεις (transient states) Η ιδιομορφία των καταστάσεων αυτών είναι ότι ανήκουν πάντοτε στις κατηγορίες των οριακών καταστάσεων καθώς επίσης και ότι το σύστημα δεν μπορεί να μεταβεί σε αυτές από καμιά άλλη κατάσταση, εκτός ενδεχομένως από άλλες παροδικές καταστάσεις.
Για παράδειγμα η κατάσταση (0,0,1,1) είναι παροδική κατάσταση διότι το σύστημα δεν μπορεί να μεταβεί στη κατάσταση αυτή από καμιά άλλη κατάσταση. Αν υποθέσουμε ότι $\alpha_1(t+1)=0, \alpha_2(t+1)=1$ και $\alpha_3(t+1)=1$ αλλά $n(t)=0$, τότε η μηχανή M_3 δεν θα μπορέσει να παράξει κανένα προϊόν διότι ήταν άδεια τη χρονική στιγμή t. Η μηχανή M_2 όμως θα παράξει ένα προϊόν την χρονική στιγμή t+1 διότι δεν ήταν μπλοκαρισμένη τη χρονική στιγμή t, ενώ η μηχανή M_1 δεν μπορεί να παράξει κανένα προϊόν διότι τη χρονική στιγμή t+1 δεν βρίσκεται σε λειτουργία. Άρα θα έπρεπε να είχαμε n=1, ενώ η κατάσταση (0,0,1,1) υποδηλώνει ότι n=0 που είναι **άτοπο**. Άρα

$$p[0,0,1,1] = 0$$

3.8 Αλγόριθμος για τη δημιουργία του πίνακα μετάβασης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος με χρήση του οποίου σχηματίζονται αυτόματα όλες οι εξισώσεις μετάβασης για το σύστημα του σχήματος 5 για οποιαδήποτε τιμή του N>5. Ο αλγόριθμος αυτός είναι επαναληπτικός και βασίζεται στις εξισώσεις μετάβασης και τον αντίστοιχο πίνακα μετάβασης όταν N=5. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις αυτές μπορεί να υπολογίσει τις εξισώσεις μετάβασης και τον αντίστοιχο πίνακα μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή του N>5. Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποια βοηθητικά στοιχεία που είναι απαραίτητα για τη δημιουργία του αλγόριθμου.

3.8.1 Ο αριθμός των πιθανών καταστάσεων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ένας τύπος, ο οποίος είναι συνάρτηση του N, με βάση τον οποίο μπορεί να υπολογιστεί ο αριθμός των πιθανών καταστάσεων (εξαιρουμένων των ανέφικτων καταστάσεων), για οποιαδήποτε τιμή του N>4. Για κάθε τιμή n της συνολικής χωρητικότητας N του συστήματος υπάρχουν 8 πιθανές καταστάσεις εκτός όταν n=0,N-1,N όπου δεν υπολογίζονται οι ανέφικτες καταστάσεις. Όταν n=0 υπάρχουν 4 πιθανές καταστάσεις, όταν n=N-1 υπάρχουν 6 πιθανές καταστάσεις και όταν n=N υπάρχουν 2 πιθανές καταστάσεις. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι N=5, τότε για κάθε n=1,2,3 υπάρχουν 8 καταστάσεις της μορφής $(n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{0,1\}$. Όταν n=0 υπάρχουν 4 πιθανές καταστάσεις οι (0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,0,1), (0,1,1,1), όταν n=N-1 υπάρχουν 6 πιθανές καταστάσεις οι (4,0,1,0), (4,0,1,1), (4,1,0,0), (4,1,0,1), (4,1,1,0), (4,1,1,1) και όταν n=N υπάρχουν 2 πιθανές καταστάσεις οι (5,1,1,0), (5,1,1,1).
Με $S_{J,N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των πιθανών καταστάσεων του συστήματος (εξαιρουμένων των ανέφικτων καταστάσεων) όταν ο αριθμός των προϊόντων στο σύστημα είναι ίσος με J $(0 \le J \le N)$ και η συνολική χωρητικότητα του συστήματος είναι ίση με N. Τα σύνολα $S_{J,N}$ όταν N=5 έχουν ως εξής:

$S_{0,5}$ = { (0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,0,1), (0,1,1,1) }
$S_{1,5}$ = { (1,0,0,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), (1,0,1,1), (1,1,0,0), (1,1,0,1), (1,1,1,0),(1,1,1,1) }
$S_{2,5}$ = { (2,0,0,0), (2,0,0,1), (2,0,1,0), (2,0,1,1), (2,1,0,0), (2,1,0,1), (2,1,1,0),(2,1,1,1) }
$S_{3,5}$ = { (3,0,0,0), (3,0,0,1), (3,0,1,0), (3,0,1,1), (3,1,0,0), (3,1,0,1), (3,1,1,0),(3,1,1,1) }
$S_{4,5}$ = {(4,0,1,0), (4,0,1,1), (4,1,0,0), (4,1,0,1), (4,1,1,0), (4,1,1,1) }
$S_{5,5}$ = { (5,1,1,0), (5,1,1,1) }

Είναι προφανές ότι ο αριθμός των πιθανών καταστάσεων του συστήματος όταν N=5 είναι ίσος με
$S_{0,5}+S_{1,5}+S_{2,5}+S_{3,5}+S_{4,5}+S_{5,5})=(4+8+8+8+6+2)=$
$(3 \cdot 8) + 12 = (4 \cdot 8) + 4 = (N-1) \cdot 8 + 4 = 8 \cdot N - 4$.

Επαναλαμβάνοντας τη παραπάνω διαδικασία έχουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή της συνολικής χωρητικότητας N του συστήματος έχουμε ότι ο αριθμός των πιθανών καταστάσεων (εξαιρουμένων των ανέφικτων καταστάσεων) του συστήματος m_N δίνεται από τον τύπο

$$m_N = 8 \cdot N - 4 \qquad (35)$$

3.8.2 Ο πίνακας μετάβασης για N=5

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ο πίνακας μετάβασης για N=5. Ο πίνακας αυτός αποτελεί την καρδιά του αλγόριθμου. Με βάση τον πίνακα αυτό και με τη βοήθεια μιας επαναληπτικής διαδικασίας που περιγράφεται παρακάτω είναι δυνατή η γέννηση του πίνακα μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή της συνολικής χωρητικότητας N. Ο πίνακας μετάβασης είναι ένας πίνακας στον οποίο περιγράφονται όλες οι μεταβάσεις μεταξύ των πιθανών καταστάσεων του συστήματος. Κάθε γραμμή και στήλη του πίνακα αυτού αποτελείται από μια κατάσταση του συστήματος. Αυτό σημαίνει ότι η διάσταση του πίνακα P_5 για N=5 είναι $m_5 X m_5$ =[(Nx8) –4] x [(Nx8) –4]=36 X 36. Το στοιχείο $P_{i,j}$ που βρίσκεται στην i-οστή γραμμή και j-οστή στήλη του πίνακα P_5, εκφράζει τη πιθανότητα μετάβασης από τη κατάσταση i στη κατάσταση j. Ο πίνακας αυτός έχει την ακόλουθη μορφή:

Πίνακας 1: Ο πίνακας μετάβασης για N=5

$$P_5 = \begin{vmatrix} S_{0,5}S_{0,5} & S_{0,5}S_{1,5} & S_{0,5}S_{2,5} & S_{0,5}S_{3,5} & S_{0,5}S_{4,5} & S_{0,5}S_{5,5} \\ S_{1,5}S_{0,5} & S_{1,5}S_{1,5} & S_{1,5}S_{2,5} & S_{1,5}S_{3,5} & S_{1,5}S_{4,5} & S_{1,5}S_{5,5} \\ S_{2,5}S_{0,5} & S_{2,5}S_{1,5} & S_{2,5}S_{2,5} & S_{2,5}S_{3,5} & S_{2,5}S_{4,5} & S_{2,5}S_{5,5} \\ S_{3,5}S_{0,5} & S_{3,5}S_{1,5} & S_{3,5}S_{2,5} & S_{3,5}S_{3,5} & S_{3,5}S_{4,5} & S_{3,5}S_{5,5} \\ S_{4,5}S_{0,5} & S_{4,5}S_{1,5} & S_{4,5}S_{2,5} & S_{4,5}S_{3,5} & S_{4,5}S_{4,5} & S_{4,5}S_{5,5} \\ S_{5,5}S_{0,5} & S_{5,5}S_{1,5} & S_{5,5}S_{2,5} & S_{5,5}S_{3,5} & S_{5,5}S_{4,5} & S_{5,5}S_{5,5} \end{vmatrix}$$

Γενικότερα οι υποπίνακες $S_{i,5}S_{j,5}$,i, ,j = 0,1,2,3,4,5 είναι (k x ℓ) υποπίνακες του πίνακα P_5, οι οποίοι περιγράφουν τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {i, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {j, a_1, a_2, a_3 }, όπου k είναι ο πληθάριθμος του συνόλου $S_{i,5}$. και ℓ είναι πληθάριθμος του συνόλου $S_{j,5}$.
Για παράδειγμα ο υποπίνακας, $S_{4,5}S_{3,5}$ είναι ένας (6 x 8) υποπίνακας διότι το σύνολο $S_{4,5}$ αποτελείται από 6 καταστάσεις, ενώ το σύνολο $S_{3,5}$ αποτελείται από 8 καταστάσεις. Τα στοιχεία του υποπίνακα αυτού περιγράφουν τις πιθανότητες μετάβασης από τις καταστάσεις {4, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {3, a_1, a_2, a_3 }.
Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{3,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή:

Πίνακας 2: Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{3,5}$

Καταστάσεις	(3,0,0,0)	(3,0,0,1)	(3,0,1,0)	(3,0,1,1)	(3,1,0,0)	(3,1,0,1)	(3,1,1,0)	(3,1,1,1)
(4,0,1,0)	0	0	0	$(1-r_1)r_3$	0	0	0	0
(4,0,1,1)	0	0	0	$(1-r_1)(1-p3)$	0	0	0	0
(4,1,0,0)	0	0	0	0	0	$(1-r_2)r_3$	0	0
(4,1,0,1)	0	0	0	0	0	$(1-r_2)(1-p_3)$	0	0
(4,1,1,0)	0	0	0	p_1r_3	0	0	0	0
(4,1,1,1)	0	0	0	$p_1(1-p_3)$	0	0	0	0

Επίσης ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{0,5}$ είναι ένας (4 X 4) υποπίνακας του πίνακα P ο οποίος έχει την ακόλουθη μορφή.

Πίνακας 3: Υποπίνακας $S_{0,5}S_{0,5}$

Καταστάσεις	(0,0,0,1)	(0,0,1,1)	(0,1,0,1)	(0,1,1,1)
(0,0,0,1)	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	$P_{1,3}$	$P_{1,4}$
(0,0,1,1)	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	$P_{2,3}$	$P_{2,4}$
(0,1,0,1)	$P_{3,1}$	$P_{3,2}$	$P_{3,3}$	$P_{3,4}$
(0,1,1,1)	$P_{4,1}$	$P_{4,2}$	$P_{4,3}$	$P_{4,4}$

Το στοιχείο $P_{2,1}$ του υποπίνακα $S_{0,5}S_{0,5}$ που είναι και στοιχείο του πίνακα P είναι στην ουσία η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση (0,0,1,1) στην κατάσταση (0,0,0,1) και ομοίως $P_{4,3}$ είναι η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση (0,1,1,1) στη κατάσταση (0,1,0,1). Αν αντικαταστήσουμε τα στοιχεία $P_{i,j}$ i,j=1,2,3,4 του υποπίνακα $S_{0,5}S_{0,5}$ με τις αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης ο πίνακας αυτός παίρνει την ακόλουθη μορφή:

Καταστάσεις	(0,0,0,1)	(0,0,1,1)	(0,1,0,1)	(0,1,1,1)
(0,0,0,1)	$(1-r_1)(1-r_2)$	0	0	0
(0,0,1,1)	$(1-r_1)p_2$	0	0	0
(0,1,0,1)	$p_1(1-r_2)$	0	0	0
(0,1,1,1)	p_1p_2	0	0	0

Με ακριβώς παρόμοιο τρόπο ορίζονται και οι υπόλοιποι υποπίνακες του πίνακα P $S_{i,5}S_{j,5}$,i, ,j = 0,1,2,3,4,5 οποίοι παρουσιάζονται στο παράρτημα Α.

3.8.3 Ο αλγόριθμος για τη γένεση του πίνακα μετάβασης P_N

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ο αλγόριθμος που υπολογίζει τον πίνακα μετάβασης του συστήματος του σχήματος 5 για οποιαδήποτε τιμή N του συνολικού αποθηκευτικού χώρου. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί σαν βασικό δομικό στοιχείο τον πίνακα μετάβασης για N=5 και τους υποπίνακες $S_{i,5}S_{j,5}$,i, ,j = 0,1,2,3,4,5 που παρουσιάστηκαν πριν και με βάση αυτούς τους υποπίνακες γεννάται ο πίνακας μετάβασης για οποιαδήποτε άλλη τιμή του N. Με τον αλγόριθμο αυτό δεν είναι αναγκαίο κάθε φορά για κάθε τιμή του N να υπολογίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ καταστάσεων του συστήματος. Αυτό που αρκεί είναι η γνώση των πιθανοτήτων μετάβασης για N=5 και με βάση τις πιθανότητες αυτές είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε κάθε πιθανότητα μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή του N.
Εν συνεχεία χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε όλες τις στάσιμες πιθανότητες και κατά συνέπεια τα μέτρα απόδοσης του συστήματος.
Ένας παρόμοιος αλγόριθμος ο οποίος γεννά τους πίνακες μετάβασης για σειριακές γραμμές παραγωγής με εκθετικά κατανεμημένους χρόνους επεξεργασίας παρουσιάζεται από τους Papadopoulos and O'Kelly (1989).
Ο αλγόριθμος αποτελείται από τρία βήματα τα οποία έχουν ως εξής:

Βήμα 1: Δημιουργία υποπινάκων οι οποίοι περιέχουν τις πιθανότητες μετάβασης που οδηγούν σε καταστάσεις με n=0,1.
Βήμα 2: Δημιουργία υποπινάκων οι οποίοι περιέχουν τις πιθανότητες μετάβασης που οδηγούν σε καταστάσεις με n=2,…N-2.
Βήμα 3: Δημιουργία υποπινάκων οι οποίοι περιέχουν τις πιθανότητες μετάβασης που οδηγούν σε καταστάσεις με n=N-1, N.

Τα βήματα του αλγόριθμου υπό μορφή ψευτοκώδικα παρουσιάζονται παρακάτω

Βήμα 1: *(Δημιουργία των πιθανοτήτων μετάβασης που οδηγούν σε καταστάσεις με n=0,1)*

Σχημάτισε τους υποπίνακες $S_{0,N}S_{i,N}$, $S_{1,N}S_{i,N}$, $0 \le i \le 5$, ως εξής:

$$S_{j,N}S_{i,N} = S_{j,5}S_{i,5} \ \forall\ N \ge 6, 0 \le i \le 5,\ j = 0,1$$

$$\forall\ i \ge 6 \quad S_{j,N}S_{i,N} = 0, \quad N \ge 6\ \kappa\alpha\iota\ j = 0,1$$

Βήμα 2: *(Δημιουργία των πιθανοτήτων μετάβασης που οδηγούν σε καταστάσεις με n=2,…, N-2)*

$\forall\ N \ge 6,\ 2 \le K \le N-2,\ M = 0,...,N$:

For K=2 **to** N-2 **do**
For M = 0 **to** M = N **do**
Δημιουργία των υποπινάκων $S_{K,N}S_{M,N}$
Case 1:
K > M and K – M > 1 set $S_{K,N}S_{M,N} = 0$
Case 2:
K > M and K – M = 1 set $S_{K,N}S_{M,N} = S_{2,5}S_{1,5}$
Case 3:
K = M set $S_{K,N}S_{M,N} = S_{2,5}S_{2,5}$
Case 4:
M>K and M-K=1 and N-M= 1 set $S_{K,N}S_{M,N} = S_{3,5}S_{4,5}$
Case 5:
M>K and M-K= 1 and N-M>1 set $S_{K,N}S_{M,N} = S_{2,5}S_{3,5}$
Case 6:
M>K and M-K=2 and N-M=0 set $S_{K,N}S_{M,N} = S_{3,5}S_{5,5}$

Case 7:
M>K and M-K=2 and N-M=1 set $S_{K,N}S_{M,N} = S_{2,5}S_{4,5}$
Case 8:
M>K and M-K=2 and N-M>1 set $S_{K,N}S_{M,N} = S_{1,5}S_{3,5}$
Case 9:
M – K > 2 set $S_{K,N}S_{M,N} = 0$
End for
End For

Βήμα 3 *(Δημιουργία των πιθανοτήτων μετάβασης που οδηγούν σε καταστάσεις με n=N-1,N)*

$\forall\ N \ge 6$, *M = 0,1,2,…,N:*

For M = 0 **to** M = N **do**
Δημιουργία των υποπινάκων $S_{N-1,N}S_{M,N}$

Case 1:
(N-1) – M $\ge$ 2 set $S_{N-1,N}S_{M,N} = 0$

Case 2:

$(N-1) - M = 1$ set $S_{N-1,N}S_{M,N} = S_{4,5}S_{3,5}$

Case 3:

$N-1 = M$ set $S_{N-1,N}S_{M,N} = S_{4,5}S_{4,5}$

Case 4:

$M > N-1$ and $M - (N-1) = 1$ then $S_{N-1,N}S_{M,N} = S_{4,5}S_{5,5}$

End For

For $M = 0$ **to** $M = N$ **do**

Δημιουργία των υποπινάκων $S_{N,N}S_{M,N}$

Case 1:

$N - M \geq 2$ set $S_{N,N}S_{M,N} = 0$

Case 2:

$N - M = 1$ set $S_{N,N}S_{M,N} = S_{5,5}S_{4,5}$

Case 3:

$N = M$ set $S_{N,N}S_{M,N} = S_{5,5}S_{5,5}$

End For

Ο όρος $S_{i,j}$ $S_{i,j}=0$ σημαίνει ότι ο υποπίνακας $S_{i,j}$ $S_{i,j}$ είναι ο μηδενικός υποπίνακας.
Ο αλγόριθμος αυτός υλοποιήθηκε στη γλώσσα προγραμματισμού C++. Η ορθότητα του αλγόριθμου πιστοποιήθηκε εκτελώντας μεγάλο πλήθος αριθμητικών παραδειγμάτων. Τα αποτελέσματα των παραδειγμάτων αυτών συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα που λήφθηκαν προσομοιώνοντας το σύστημα του σχήματος 5 στο λογισμικό πακέτο προσομοίωσης ARENA 3.0 και παρουσιάζονται στην ενότητα 3.11.

3.9 Αριθμητικό Παράδειγμα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ένα αριθμητικό παράδειγμα εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο για N=6. Οι υποπίνακες $S_{i,5}S_{j,5}$,i, ,j = 0,1,2,3,4,5 χρησιμοποιούνται σαν αρχικές τιμές για την εφαρμογή του αλγόριθμου. Επειδή ο αριθμός των καταστάσεων όταν N=6 είναι $m_6 = 44$, έχουμε ότι ο πίνακας μετάβασης όταν N=6 θα είναι $m_6 X m_6 = 44X44$. Το βασικό ερώτημα που προκύπτει εδώ είναι ο υπολογισμός των υποπινάκων $S_{i,6}S_{j,6,}$ i,j = 0,1,2,…,6 από τους οποίους αποτελείται ο πίνακας μετάβασης P_6 για N=6. Εφαρμόζοντας τα τρία βήματα του αλγόριθμου που περιγράφηκαν πριν, ο πίνακας μετάβασης P_6 γιαN=6 έχει την ακόλουθη μορφή:

Πίνακας 4: Ο πίνακας μετάβασης για N=6

$$P_6 = \begin{vmatrix} S_{0,5}S_{0,5} & S_{0,5}S_{1,5} & S_{0,5}S_{2,5} & S_{0,5}S_{3,5} & S_{0,5}S_{4,5} & S_{0,5}S_{5,5} & 0 \\ S_{1,5}S_{0,5} & S_{1,5}S_{1,5} & S_{1,5}S_{2,5} & S_{1,5}S_{3,5} & S_{1,5}S_{4,5} & S_{1,5}S_{5,5} & 0 \\ 0 & S_{2,5}S_{1,5} & S_{2,5}S_{2,5} & S_{2,5}S_{3,5} & S_{2,5}S_{4,5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{2,5}S_{1,5} & S_{2,5}S_{2,5} & S_{2,5}S_{3,5} & S_{2,5}S_{4,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{2,5}S_{1,5} & S_{2,5}S_{2,5} & S_{3,5}S_{4,5} & S_{3,5}S_{5,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{4,5}S_{3,5} & S_{4,5}S_{4,5} & S_{4,5}S_{5,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{5,5}S_{4,5} & S_{5,5}S_{5,5} \end{vmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι όλα τα στοιχεία που αποτελούν τον υποπίνακα P_6 είναι οι γνωστοί υποπίνακες $S_{i,5}S_{j,5}$,i, ,j = 0,1,2,3,4,5 που παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας μετάβασης αποτελείται από γνωστά στοιχεία και άρα θεωρείται επίσης γνωστός.

3.10 Μέτρα απόδοσης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα μέτρα απόδοσης του συστήματος του σχήματος 5.
Δεδομένου ότι όλες οι στάσιμες πιθανότητες $p[n,a_1,a_2,a_3]$, n=0,…,N των καταστάσεων του συστήματος είναι γνωστές, τα μέτρα απόδοσης του συστήματος είναι δυνατό να υπολογιστούν. Ο αριθμός των ημιακατέργαστων προϊόντων στο σύστημα (WIP), $\bar{n}$ του συστήματος δίνεται από τον τύπο

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{a_1=0}^{1} \sum_{a_2=0}^{1} \sum_{a_3=0}^{1} n \; p[n,a_1,a_2,a_3] \tag{36}$$

Κάθε μια από τις μηχανές M_1 και M_2 έχει διαφορετική πιθανότητα να βρεθεί μπλοκαρισμένη. Η πιθανότητα η μηχανή M_1 να βρεθεί μπλοκαρισμένη συμβολίζεται με $p_{b_{M1}}$ και δίνεται από τον τύπο

$$p_{b_{M1}} = \text{p[N,1,1,0]+p[N,1,1,1]} \tag{37}$$

ενώ η πιθανότητα η μηχανή M_2 να βρεθεί μπλοκαρισμένη συμβολίζεται με $p_{b_{M2}}$ και δίνεται από τον τύπο

$$p_{b_{M2}} = \text{p[N-1,0,1,0]+p[N-1,0,1,1]+p[N-1,1,1,0]+p[N-1,1,1,1]+} \\ \text{p[N,1,1,0]+p[N,1,1,1]} \tag{38}$$

Επίσης πιθανότητα η μηχανή M_3 να βρεθεί άδεια συμβολίζεται με p_{s_3} και είναι ίση με

$$p_{s3} = \text{p[0,0,0,1]+p[0,0,1,1]+p[0,1,0,1]+p[0,1,1,1]} \tag{39}$$

Παρατηρούμε ότι αν p_i και r_i είναι οι πιθανότητες εμφάνισης και επιδιόρθωσης βλαβών της μηχανής M_i, αντίστοιχα τότε με $e_i = \dfrac{r_i}{r_i + p_i}$, i=1,2,3 συμβολίζουμε το μέρος του χρόνου στο οποίο η μηχανή M_i λειτουργεί. Με άλλα λόγια η ποσότητα $e_i, i = 1,2,3$ εκφράζει την απόδοση της μηχανής M_i, αντίστοιχα, αν αυτή λειτουργούσε μόνη απομονωμένη από το υπόλοιπο σύστημα, χωρίς την παρουσία άλλων μηχανών και του ενδιάμεσου αποθηκευτικού χώρου.
Επειδή όμως και οι τρεις μηχανές αποτελούν μέρος του συστήματος, οι πιθανότητες να βρεθούν μπλοκαρισμένες ή άδειες πρέπει να ληφθούν υπόψη. Ως εκ τούτου οι αποδόσεις PR_i, i=1,2,3 των μηχανών M_i αντίστοιχα δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$PR_1 = (1 - p_{b_{M1}})\, e_1 \tag{40}$$

$$PR_2 = (1 - p_{b_{M2}})\, e_2 \tag{41}$$

$$PR_3 = (1 - p_{s3})\, e_3 \tag{42}$$

Επειδή δεν υπάρχει καταστροφή ή επενεπεξεργασία προϊόντων θα πρέπει να ισχύει ότι

$$PR_1+PR_2=PR_3 \tag{43}$$

Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 5, PR, δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$PR=PR_1+PR_2=PR_3 \tag{44}$$

3.11 Αριθμητικά αποτελέσματα για το δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης

Ο αλγόριθμος για τον υπολογισμό του πίνακα μετάβασης προγραμματίστηκε στη γλώσσα προγραμματισμού C++. Η επίλυση των εξισώσεων μετάβασης και ο υπολογισμός των στάσιμων πιθανοτήτων για την εκτίμηση της απόδοσης του συστήματος, για κάθε τιμή του N, γίνεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Για να διαπιστωθεί η ορθότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την εφαρμογή του αλγόριθμου, ένα μοντέλο προσομοίωσης που προσομοιώνει τη λειτουργία του συστήματος του σχήματος 5 δημιουργήθηκε στο πρόγραμμα προσομοίωσης ARENA 3.0.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το μοντέλο της προσομοίωσης σε σύγκριση με αυτά του προτεινόμενου αλγόριθμου μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο αλγόριθμος προσδιορίζει την απόδοση του συστήματος του σχήματος 5 με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Για τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το μοντέλο της προσομοίωσης δίνονται 95% διαστήματα εμπιστοσύνης για την εκτίμηση της απόδοσης. Ο χρόνος προσομοίωσης για κάθε επανάληψη και για όλες τις περιπτώσεις είναι 1100 μονάδες χρόνου και για κάθε περίπτωση γίνονται πέντε επαναλήψεις. Για τα παραδείγματα που παρουσιάζονται στους πίνακες 5, 6, 7 και 8 οι πιθανότητες βλαβών και επιδιόρθωσης και των τριών μηχανών του συστήματος είναι ίσες με p_i =0.01 και r_i = 0.1, i=1,2,3, για τη μηχανή M_i αντίστοιχα. Επειδή όμως το ενδεχόμενο οι πιθανότητες εμφάνισης βλαβών και επιδιόρθωσης να είναι ταυτόσημες και για τις τρεις μηχανές δεν είναι και τόσο ρεαλιστικό γιατί οδηγεί σε ΄΄ισορροπημένα΄΄ συστήματα, παρουσιάζονται τρία σύνολα παραδειγμάτων στα οποία οι πιθανότητες αυτές αλλάζουν συστηματικά. Πιο συγκεκριμένα για τα παραδείγματα που παρουσιάζονται στον πίνακα 9, (πίνακα 10 και πίνακα 11, αντίστοιχα) η πιθανότητα εμφάνισης βλαβών p_1, (p_2 και p_3, αντίστοιχα) μεταβάλλεται από 0.02 έως 0.1 με βήμα 0.01. Οι πιθανότητες εμφάνισης βλαβών των άλλων δυο μηχανών παραμένουν σταθερές και ίσες με 0.01, ενώ οι πιθανότητες επιδιόρθωσης r_i, i=1,2,3 είναι επίσης σταθερές και ίσες με 0.01.

Η πρώτη στήλη σε όλους τους πίνακες δείχνει τη τιμή N της συνολικής χωρητικότητας του συστήματος, η δεύτερη στήλη παρουσιάζει την απόδοση του συστήματος από την εφαρμογή του αλγόριθμου και η τρίτη στήλη παρουσιάζει το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την εκτίμηση της απόδοσης με χρήση του μοντέλου

προσομοίωσης. Η τελευταία στήλη παρουσιάζει τον χρόνο (σε δευτερόλεπτα) που χρειάζεται ο αλγόριθμος για τον προσδιορισμό της απόδοσης.

Πίνακας 5: Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 5 για N=6, 7,…,20

N	$PR_{αλγόριθμου}$	95% Διάστημα Εμπιστοσύνης	CPU Time
6	0.90727	(0.892 , 0,936)	0.05
7	0.90761	(0.893 , 0.936)	0.05
8	0.90789	(0.892 , 0.936)	0.06
9	0.90812	(0.893 , 0.936)	0.05
10	0.90830	(0.9045 , 0.9315)	0.06
11	0.90845	(0.893 , 0.936)	0.06
12	0.90857	(0.9045 , 0.9315)	0.05
13	0.90867	(0.893 , 0.936)	0.05
14	0.90875	(0.9045 , 0.9315)	0.05
15	0.90881	(0.893 , 0.936)	0.05
16	0.90886	(0.9045 , 0.9315)	0.05
17	0.90891	(0.892 , 0.936)	0.11
18	0.90894	(0.9045 , 0.9315)	0.11
19	0.90897	(0.892 , 0.936)	0.11
20	0.90899	(0.9045 , 0.9315)	0.17

Πίνακας 6: Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 5 για N=25, 30,…,100

N	$PR_{algorithm}$	95% Διάστημα Εμπιστοσύνης	CPU Time
25	0.909056088	(0.9045 , 0.9315)	0.39
30	0.909078602	(0.892 , 0.936)	0.5
35	0.909086555	(0.892 , 0.936)	0.77
40	0.9090893653	(0.9045 , 0.9315)	1.32
45	0.9090903579	(0.892 , 0.936)	1.65
50	0.9090907084	(0.8845 , 0.9115)	2.25
55	0.90909084134	(0.8845 , 0.9115)	2.97
60	0.909090885101	(0.8995 , 0.9215)	3.84
65	0.909090900647	(0.899 , 0.935)	4.88
70	0.9090909061076	(0.8995 , 0.9215)	6.21
75	0.90909090803644	(0.899 , 0.935)	7.69
80	0.9090909087187	(0.9015 , 0.9255)	9.34
85	0.909090908959433	(0.8935 , 0.9315)	11.15
90	0.90909090904446396	(0.9015 , 0.9255)	13.29
95	0.909090909074501894	(0.8935 , 0.9315)	15.6
100	0.909090909085113094	(0.9015 , 0.9255)	18.07

Πίνακας 7: Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 5 για N=110,120,130,140,150

N	$PR_{algorithm}$	95% Διάστημα Εμπιστοσύνης	CPU Time
110	0.90909090909018579	(0.9015 , 0.9255)	24.11
120	0.90909090909081829	(0.9015 , 0.9255)	31.64
130	0.90909090909089782	(0.904 , 0.926)	39.71
140	0.90909090909090768 5255	(0.9 , 0.92)	49.6
150	0.90909090909090891 549	(0.9 , 0.92)	60.91

Πίνακας 8: Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 5 για N=200,250,300

N	$PR_{algorithm}$	95% Διάστημα Εμπιστοσύνης	CPU Time
200	0.909090909090909090378 20	(0.8905 , 0.9215)	144.02
250	0.909090909090909090909 07483	(0.903 , 0.932)	280.83
300	0.909090909090909090909 0…	(0.8895 , 0.9315)	502.5

Πίνακας 9: Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 5 για p_1=0.02,…0,1 με βήμα 0,01, p_2=p_3=0.01 and r_i=0.1, i=1,2,3

p_1	N	$PR_{algorithm}$	95% Διάστημα Εμπιστοσύνης	CPU Time
0.02	10	0.907561	(0.86469 , 0.9649)	0.009
0.03	10	0.90686827	(0.90566 , 0.92353)	0.009
0.04	20	0.908723	(0.8875 , 0.94325)	0.03
0.05	20	0.90864167	(0.8549 , 0.91188)	0.03
0.06	30	0.909022	(0.84758 , 0.919216)	0.1
0.07	30	0.9090122	(0.809111 , 0.940489)	0.1
0.08	40	0.90907928	(0.869399 , 0.943401)	0.23
0.09	40	0.90907793	(0.814722 , 0.939278)	0.23
0.1	40	0.90907661	(0.84359 , 0.912007)	0.23

Πίνακας 10: Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 5 για p_2=0.02,…0,1 με βήμα 0,01, p_1=p_3=0.01 and r_i=0.1, i=1,2,3

P_2	N	$PR_{algorithm}$	95% Διάστημα Εμπιστοσύνης	CPU Time
0.02	10	0.90749332	(0.8546 , 0.93131)	0.0099
0.03	10	0.90668276	(0.87327 , 0.96632)	0.0099
0.04	20	0.9085966	(0.82783 , 0.930164)	0.03
0.05	20	0.908441749	(0.80349 , 0.918901)	0.03
0.06	30	0.908952511	(0.85157 , 0.912024)	0.1
0.07	30	0.9089168013	(0.863957 , 0.942443)	0.1
0.08	40	0.9090516360	(0.891997 , 0.935203)	0.23
0.09	40	0.9090425459	(0.87589 , 0.959711)	0.23
0.1	40	0.9090327113	(0.87662 , 0.94018)	0.23

Πίνακας 11: Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 5 για p_3=0.02,…0,1 με βήμα 0,01, p_2=p_3=0.01 and r_i=0.1, i=1,2,3

P_3	N	$PR_{algorithm}$	95% Διάστημα Εμπιστοσύνης	CPU Time
0.02	10	0.83273625	(0.757839 , 0.884961)	0.0099
0.03	10	0.7687724755	(0.722349 , 0.812051)	0.0099
0.04	20	0.7142501962	(0.712846 , 0.768354)	0.03
0.05	20	0.6666407	(0.605834 , 0.689366)	0.03
0.06	30	0.6249983	(0.586959 , 0.697841)	0.1
0.07	30	0.5882341657	(0.53732 , 0.62788)	0.1
0.08	40	0.55555549	(0.42439 , 0.62401)	0.23
0.09	40	0.5263157426	(0.508547 , 0.603453)	0.23
0.1	40	0.49999	(0.468552 , 0.544648)	0.23

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του αλγόριθμου σε σύγκριση με αυτά της προσομοίωσης είναι πολύ ικανοποιητικά. Για όλα τα παραδείγματα που παρουσιάζονται στους παραπάνω πίνακες, παρατηρούμε ότι η απόδοση του συστήματος που προκύπτει από την εφαρμογή του αλγόριθμου βρίσκεται πάντοτε εντός του 95% διαστήματος εμπιστοσύνης που προκύπτει από την προσομοίωση. Μια ακόμη ένδειξη που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα αποτελέσματα από τον αλγόριθμο είναι ορθά αποτελεί η παρακάτω διαπίστωση. Εξετάζοντας τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του αλγόριθμου διαπιστώνουμε ότι καθώς η τιμή του N αυξάνει (και επειδή N=C+3 ισοδύναμα η τιμή του C αυξάνει), η απόδοση του συστήματος συγκλίνει στην τιμή $0.\overline{90}$ η οποία είναι ίση με την τιμή της ποσότητας $e_3 = \frac{r_3}{r_3 + p_3}$.

Αυτή η προσέγγιση εξηγείται ως εξής:
Η απόδοση του συστήματος δίνεται όπως αναφέρθηκε και πριν από τον τύπο PR=PR_3=$(1 - p_{s3})\, e_3$. Όταν η τιμή του N (άρα και η τιμή του C) είναι αρκετά μεγάλη, η πιθανότητα p_{s3} να βρεθεί η μηχανή M_3 άδεια είναι πάρα πολύ μικρή (προσεγγίζει το μηδέν). Αν αντικαταστήσουμε στον παραπάνω τύπο όπου p_{s3}=0 έχουμε ότι $PR = e_3$, δηλαδή τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του αλγόριθμου συμφωνούν απόλυτα με αυτή την αναμενόμενη συμπεριφορά του συστήματος.

3.12 Η τροποποιημένη μέθοδος της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η τροποποιημένη μέθοδος της αποσύνθεσης για τον υπολογισμό της απόδοσης γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης. Ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζεται η τροποποιημένη μέθοδος της αποσύνθεσης παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 16.

Για κάθε αποθηκευτικό χώρο (buffer) της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής παραγωγής L, γίνεται ένα από τα παρακάτω:

(α) Αν αμέσως πριν από τον αποθηκευτικό χώρο υπάρχουν δύο μηχανές (στη προκειμένη περίπτωση οι μηχανές M_2 και M_4) που τον τροφοδοτούν (άρα γίνονται εργασίες συγχώνευσης), τότε εισάγεται ένα ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα με τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο για τη μοντελοποίηση των εργασιών συγχώνευσης . Για τη γραμμή παραγωγής του σχήματος 16 το υποσύστημα αυτό είναι το L((2,4),5)

(β) Αν ο αποθηκευτικός χώρος βρίσκεται ανάμεσα σε δυο μηχανές M_i και M_j τότε εισάγεται ένα ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L(i,j), $(i, j) \in \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$ που αποτελείται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο.

Οι αποθηκευτικοί χώροι των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων είναι ίδιοι με τους αντίστοιχους αποθηκευτικούς χώρους της πραγματικής γραμμής L.
Κάθε αποθηκευτικός χώρος της πραγματικής γραμμής L που βρίσκεται ανάμεσα σε δυο μηχανές M_i και M_j συμβολίζεται με $B_{(i,j)}$, $(i, j) \in \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$. Ο αποθηκευτικός χώρος όπου πριν από αυτόν βρίσκονται οι μηχανές M_2 και M_4 και μετά από αυτόν βρίσκεται η μηχανή M_5 συμβολίζεται με $B_{((2,4),5)}$.
Κάθε ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L(i,j) αποτελείται από δυο εικονικές μηχανές $M_u(i, j)$ και $M_d(i, j)$, $(i, j) \in \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$. Η μηχανή $M_u(i, j)$ ονομάζεται upstream μηχανή και μοντελοποιεί το κομμάτι της πραγματικής γραμμής παραγωγής L που βρίσκεται πριν από τον αποθηκευτικό χώρο $B_{(i,j)}$, ενώ η μηχανή $M_d(i, j)$ ονομάζεται downstream μηχανή και μοντελοποιεί το κομμάτι της πραγματικής γραμμής παραγωγής L που βρίσκεται μετά τον αποθηκευτικό χώρο $B_{(i,j)}$.
Το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L((2,4),5) αποτελείται από δυο ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές $M_{u_1}((2,4),5)$ και $M_{u_2}((2,4),5)$ που μοντελοποιούν το τμήμα της πραγματικής γραμμής L που βρίσκεται πριν τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((2,4),5)}$ και μια εικονική μηχανή $M_d((2,4),5)$ που μοντελοποιεί το τμήμα της πραγματικής γραμμής παραγωγής που βρίσκεται μετά τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((2,4),5)}$.

3.12.1 Χαρακτηριστικά της πραγματικής γραμμής παραγωγής L

Για την ΄΄πραγματική΄΄ γραμμή παραγωγής L του σχήματος 16 ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

1. Πριν από τις μηχανές M_1 και M_3 υπάρχει πάντοτε διαθέσιμο προϊόν για επεξεργασία. Δηλαδή οι μηχανές M_1 και M_3 δεν είναι ποτέ άδειες. Επίσης αμέσως μετά την μηχανή M_6 υπάρχει πάντοτε αρκετός χώρος για την τοποθέτηση των προϊόντων που έχουν ολοκληρώσει την επεξεργασία τους και αποχωρούν από τη γραμμή L. Αυτό σημαίνει ότι η μηχανή M_6 δεν είναι ποτέ μπλοκαρισμένη.
2. Οι χρόνοι επεξεργασίας όλων των μηχανών της γραμμής παραγωγής L είναι σταθεροί και ίσοι μεταξύ τους και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι είναι ίσοι με μια μονάδα χρόνου.
3. Με $\alpha_i, i = 1,2,...,6$ συμβολίζουμε την κατάσταση στην οποία βρίσκεται η μηχανή M_i αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα αν $\alpha_i = 0$ τότε η μηχανή M_i είναι χαλασμένη (down), ενώ αν $\alpha_i = 1$ τότε η μηχανή M_i λειτουργεί κανονικά (up).
4. Οι μηχανές M_i, i=1,2,…,6 της γραμμής L, βρίσκονται μπλοκαρισμένες μετά την ολοκλήρωση της επεξεργασίας του προϊόντος (Blocking After Service (BAS)). Αυτό σημαίνει ότι αν ένα προϊόν έχει ολοκληρώσει την επεξεργασία του σε μια μηχανή, αλλά εκείνη τη χρονική στιγμή ο αποθηκευτικός χώρος που βρίσκεται μετά από αυτή είναι γεμάτος τότε το προϊόν παραμένει στη μηχανή μέχρις ότου ο αποθηκευτικός χώρος πάψει να είναι γεμάτος. Στη περίπτωση αυτή η μηχανή θεωρείται μπλοκαρισμένη.
5. Όλες οι μηχανές μπορούν να παρουσιάσουν βλάβη μόνον όταν βρίσκονται σε λειτουργία και επεξεργάζονται κάποιο προϊόν (operational dependent failures (ODF's)). Αυτό σημαίνει ότι αν κάποια μηχανή λειτουργεί, αλλά είναι μπλοκαρισμένη ή άδεια τότε δεν μπορεί να παρουσιάσει βλάβη.
6. Εάν μια μηχανή M_i, i=1,2,…,6 βρίσκεται σε λειτουργία και δεν είναι ούτε άδεια ούτε μπλοκαρισμένη στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε μπορεί να παρουσιάσει βλάβη στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα p_i, i=1,2,…,6, αντίστοιχα η οποία ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή Δηλαδή ο μέσος χρόνος εμφάνισης βλαβών για τη μηχανή M_i, i=1,2,…,6 είναι $\frac{1}{p_i}, i = 1,2,...,6$, αντίστοιχα.
7. Εάν μια μηχανή M_i, i=1,2,…,6 είναι χαλασμένη στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε επισκευάζεται στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα r_i, i=1,2,3, αντίστοιχα η οποία ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή. Αυτό σημαίνει ότι ο μέσος χρόνος επισκευής μιας βλάβης της μηχανής M_i, i=1,2,…,6 είναι $\frac{1}{r_i}, i = 1,2,...,6$, αντίστοιχα.
8. Η μηχανή M_i, i=1,2,…,6 δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα άδεια και μπλοκαρισμένη. Δηλαδή η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός αυτό είναι ίση με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι $prob(n_{i-1} = 0 \cap n_i = N_i) \approx 0$

9. Οι βλάβες και οι επιδιορθώσεις των μηχανών εμφανίζονται στο ξεκίνημα των χρονικών περιόδων, ενώ οι μεταβολές στον αριθμό των προϊόντων που βρίσκονται στον αποθηκευτικό χώρο γίνονται στο τέλος των χρονικών περιόδων.
10. Αμέσως πριν η αμέσως μετά από ένα αποθηκευτικό χώρο στον οποίο γίνονται εργασίες συγχώνευσης δεν είναι δυνατόν να υπάρχει άλλος αποθηκευτικός χώρος στον οποίο να γίνονται εργασίες συγχώνευσης.

3.12.2 Χαρακτηριστικά των δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης

Για τα δομικά στοιχεία της μεθόδου της αποσύνθεσης που φαίνονται στο σχήμα 16 και συμμετέχουν στην εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις:

Για το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L((2,4),5) ισχύουν κατά λέξη οι προϋποθέσεις (1) έως (16) της παραγράφου 3.7.1 με τις ακόλουθες αντικαταστάσεις στα σύμβολα που χρησιμοποιήθηκαν στη παράγραφο εκείνη.

- Τα σύμβολα M_1, M_2 και M_3 αντικαθίστανται από τα $M_{u_1}((2,4),5), M_{u_2}((2,4),5)$ και $M_d((2,4),5)$, αντίστοιχα.
- Τα σύμβολα α_1, α_2 και α_3 αντικαθίστανται από τα $\alpha_{u_1}((2,4),5), \alpha_{u_2}((2,4),5)$ και $\alpha_d((2,4),5)$, αντίστοιχα.
- Τα σύμβολα r_1, r_2 και r_3 αντικαθίστανται από τα $r_{u_1}((2,4),5), r_{u_2}((2,4),5)$ και $r_d((2,4),5)$, αντίστοιχα.
- Τα σύμβολα p_1, p_2 και p_3 αντικαθίστανται από τα $p_{u_1}((2,4),5), p_{u_2}((2,4),5)$ και $p_d((2,4),5)$, αντίστοιχα.

Για τα ΄΄εικονικά΄΄ υποσυστήματα L(i,j), $(i,j) \in \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$ οι πιο σημαντικές προϋποθέσεις είναι οι εξής:

1. Η μηχανή $M_u(i,j)$ δεν είναι ποτέ άδεια και η μηχανή $M_d(i,j)$ δεν είναι ποτέ μπλοκαρισμένη, $(i,j) \in \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$
2. Οι μηχανές $M_u(i,j)$, $(i,j) \in \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$, βρίσκονται μπλοκαρισμένες μετά την ολοκλήρωση της επεξεργασίας του προϊόντος (Blocking After Service (BAS)).
3. Όλες οι μηχανές $M_u(i,j)$ και $M_d(i,j)$, $(i,j) \in \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$.μπορούν να παρουσιάσουν βλάβη μόνον όταν βρίσκονται σε λειτουργία και επεξεργάζονται κάποιο προϊόν (operational dependent failures (ODF's)).
4. Εάν μια μηχανή $M_u(i,j)$ (ή $M_d(i,j)$), βρίσκεται σε λειτουργία και δεν είναι μπλοκαρισμένη (ή άδεια) στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε μπορεί να παρουσιάσει βλάβη στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα $p_u(i,j)$ (ή $p_d(i,j)$), $(i,j) \in \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$, αντίστοιχα, η οποία ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή.

5. Εάν μια μηχανή $M_u(i,j)$ (ή $M_d(i,j)$), είναι χαλασμένη στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε επισκευάζεται στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα $r_u(i,j)$ (ή $r_d(i,j)$), $(i,j) \in \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$, αντίστοιχα. Οι χρόνοι επιδιορθώσεων ακολουθούν την γεωμετρική κατανομή.
6. Με $\alpha_u(i,j)$ και $\alpha_d(i,j)$, $(i,j) \in \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$ συμβολίζουμε την κατάσταση στην οποία βρίσκεται η μηχανή $M_u(i,j)$ και $M_d(i,j)$, αντίστοιχα. Αν $\alpha_u(i,j)=1$ (ή $\alpha_d(i,j)=1$), τότε η μηχανή $M_u(i,j)$ (ή $M_d(i,j)$), αντίστοιχα, λειτουργεί (είναι up). Αν $\alpha_u(i,j)=0$ (ή $\alpha_d(i,j)=0$), τότε ή μηχανή $M_u(i,j)$ (ή $M_d(i,j)$), αντίστοιχα, είναι χαλασμένη (είναι down)

3.13 Δημιουργία των εξισώσεων της τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης

Στόχος των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης είναι ο προσδιορισμός των πιθανοτήτων εμφάνισης βλαβών και επιδιόρθωσης, όλων των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων που εμπλέκονται στην ανάλυση της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής παραγωγής με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1. Ο ρυθμός της ροής των προϊόντων προς και από τον αποθηκευτικό χώρο κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος είναι ίδιος με το ρυθμό ροής προς και από το αντίστοιχο αποθηκευτικό χώρο της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής L.

2. Η πιθανότητα ο αποθηκευτικός χώρος κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος να είναι γεμάτος η άδειος είναι ίδια με την αντίστοιχη πιθανότητα για τον αντίστοιχο αποθηκευτικό χώρο της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής L.

3. Η πιθανότητα επαναφοράς της ροής των προϊόντων από και προς τον αποθηκευτικό χώρο κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος, ύστερα από μια χρονική περίοδο κατά την οποία υπήρχε διακοπή της ροής, είναι ίση με την πιθανότητα του αντίστοιχου γεγονότος για τον αντίστοιχο αποθηκευτικό χώρο της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής L.

4. Ο μέσος αριθμός προϊόντων στον αποθηκευτικό χώρο κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος, είναι ίσος με τον μέσο αριθμό προϊόντων στον αντίστοιχο αποθηκευτικό χώρο της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής L.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω μέσω των εξισώσεων της τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης υπολογίζονται οι παράμετροι όλων των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων του σχήματος 16. Εξετάζοντας τα εικονικά υποσυστήματα που εμπλέκονται στην ανάλυση της γραμμής παραγωγής L, παρατηρούμε τα εξής:
Οι παράμετροι των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(1,2)$, $M_u(3,4)$ δεν χρειάζεται να υπολογιστούν διότι αντιστοιχούν στις πρώτες μηχανές (μηχανές εισόδου) της πραγματικής γραμμής L, M_1 και M_3, αντίστοιχα. Οι αρχικές συνθήκες της μεθόδου της αποσύνθεσης θέτουν τις παραμέτρους αυτών των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών να είναι ίσες με τις παραμέτρους των αντίστοιχων ΄΄πραγματικών΄΄ μηχανών. Δηλαδή
$r_u(1,2)=r_1$, $r_u(3,4)=r_3$, $p_u(1,2)=p_1$, $p_u(3,4)=p_3$.
Επίσης η εικονική μηχανή $M_d(5,6)$ αντιστοιχεί στη μηχανή εξόδου (τελευταία μηχανή) M_6 του συστήματος και λόγω των αρχικών συνθηκών οι παράμετροι της

΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(5,6)$ τίθενται ίσες με τις παραμέτρους της πραγματικής μηχανής M_6. Δηλαδή $r_d(5,6) = r_6$ και $p_d(5,6) = p_6$.

Οι μηχανές $M_{u_1}((2,4),5)$ και $M_{u_2}((2,4),5)$ όπως ήδη έχει αναφερθεί μοντελοποιούν το τμήμα της πραγματικής γραμμής L που βρίσκεται πριν τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((2,4,)5)}$, ενώ η μηχανή $M_d((2,4),5)$ μοντελοποιεί το τμήμα της πραγματικής γραμμής L που βρίσκεται μετά τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((2,4,)5)}$.

Λόγω της υπόθεσης (10) της παραγράφου 3.12.1 πριν τις ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές M_{u1} και M_{u2} μετά την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή M_d κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος με τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο θα βρίσκονται πάντοτε υποσυστήματα με δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο. Έτσι πριν τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((2,4,)5)}$ βρίσκονται τα υποσυστήματα L(1,2) και L(3,4) που μοντελοποιούν τη γραμμική ροή των προϊόντων. Τα μέτρα απόδοσης και οι παράμετροι των L(1,2) και L(3,4) που προσδιορίζονται από τις εξισώσεις της κλασικής μεθόδου της αποσύνθεσης (Gershwin, 1994) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό των παραμέτρων των $M_{u_1}((2,4),5)$ και $M_{u_2}((2,4),5)$, αντίστοιχα.

Ομοίως, οι παράμετροι και τα μέτρα απόδοσης του υποσυστήματος L(5,6) (το οποίο μοντελοποιεί γραμμική ροή των προϊόντων) που βρίσκεται αμέσως μετά τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((2,4,)5)}$ και προσδιορίζονται από τις εξισώσεις της κλασικής μεθόδου της αποσύνθεσης (Gershwin, 1994), μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό των παραμέτρων της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d((2,4),5)$.

Τελικά οι παράμετροι των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων που μένει να υπολογιστούν με την δημιουργία των νέων εξισώσεων της τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης είναι οι παράμετροι των μηχανών $M_u(5,6)$, $M_d(1,2)$ και $M_d(3,4)$ των εικονικών υποσυστημάτων L(5,6), L(1,2) και L(3,4), αντίστοιχα. Για τον υπολογισμό των παραμέτρων αυτών γίνεται χρήση των μέτρων απόδοσης του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L((2,4),5) που μοντελοποιεί τις εργασίες συγχώνευσης.

3.13.1 Τα σύνολα των εξισώσεων της τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης

Για τον υπολογισμό των παραμέτρων όλων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(i)$ και $M_d(i)$ χρησιμοποιούνται τα παρακάτω σύνολα εξισώσεων

- **Εξισώσεις επαναφοράς της ροής (Resumption of flow equations)**
  Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων επιδιόρθωσης $r_u(5,6)$, $r_d(1,2)$ και $r_d(3,4)$ των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(5,6)$, $M_d(1,2)$ και $M_d(3,4)$, αντίστοιχα.

- **Εξισώσεις ροής (Flow rate idle time equations)**
  Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων εμφάνισης βλαβών $p_u(5,6)$, $p_d(1,2)$ και $p_d(3,4)$ των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(5,6)$, $M_d(1,2)$ και $M_d(3,4)$, αντίστοιχα.

- **Εξισώσεις διατήρησης της ροής (Conservation of flow equations)**
  Οι εξισώσεις αυτές εκφράζουν την αρχή της διατήρησης της ροής των προϊόντων μεταξύ των αποθηκευτικών χώρων λόγω του ότι δεν υπάρχει καταστροφή η δημιουργία νέου υλικού. Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται σαν κριτήριο τερματισμού του αλγόριθμου που χρησιμοποιείται για την ταυτόχρονη επίλυση όλων των παραπάνω εξισώσεων.

Όταν οι ρυθμοί επεξεργασίας είναι σταθεροί και ίσοι για όλες τις μηχανές της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής παραγωγής L, όπως συμβαίνει στη συγκεκριμένη περίπτωση, για τον υπολογισμό των παραμέτρων p_u και p_d χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις ροής, αντί των εξισώσεων διακοπής της ροής (Interruption of flow equations) που χρησιμοποιούνται στην κλασική μέθοδο της αποσύνθεσης για τον ίδιο σκοπό.

3.13.2 Οι νέες εξισώσεις για την τροποποιημένη μέθοδο της αποσύνθεσης

Πριν την παρουσίαση των νέων εξισώσεων της τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης παρουσιάζονται κάποιες προτάσεις που ισχύουν γενικότερα και χρησιμοποιούνται στην ανάπτυξη των εξισώσεων αυτών. Επίσης παρουσιάζονται και επεξήγονται κάποια σύμβολα που χρησιμοποιούνται κατ' επανάληψη κατά τη δημιουργία των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: (Η πρόταση αυτή παρουσιάστηκε από τον Gershwin 1994)
Αν τα γεγονότα V και W είναι ξένα μεταξύ τους τότε:

$$\Pr ob[U / V \cup W] = \Pr ob[U / V] \cdot \Pr ob[V / V \cup W] + \Pr ob[U / W] \cdot \Pr ob[W / V \cup W]$$

Απόδειξη:

$$\Pr ob[U / V \cup W] = \frac{\Pr ob[U \cap (V \cup W)]}{\Pr ob[V \cup W]} = \frac{\Pr ob[(U \cap V) \cup (U \cap W)]}{\Pr ob[V \cup W]} = \tag{45}$$

$$= \frac{\Pr ob[U \cap V]}{\Pr ob[V \cup W]} + \frac{\Pr ob[U \cap W]}{\Pr ob[V \cup W]}$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\Pr ob[U / V] = \frac{\Pr ob[U \cap V]}{\Pr ob[V]} \Rightarrow \Pr ob[U \cap V] = \Pr ob[U / V] \cdot \Pr ob[V]$$

και

$$\Pr ob[U / W] = \frac{\Pr ob[U \cap W]}{\Pr ob[W]} \Rightarrow \Pr ob[U \cap W] = \Pr ob[U / W] \cdot \Pr ob[W]$$

Επίσης

$$\text{Prob}[V / V \cup W] = \frac{\text{Prob}[V \cap (V \cup W)]}{\text{Prob}[V \cup W]} = \frac{\text{Prob}[V \cap V]}{\text{Prob}[V \cup W]} + \frac{\text{Prob}[V \cap W]}{\text{Prob}[V \cup W]} =$$

$$= \frac{\text{Prob}[V \cap V]}{\text{Prob}[V \cup W]} + \frac{\text{Prob}[\varnothing]}{\text{Prob}[V \cup W]} = \frac{\text{Prob}[V \cap V]}{\text{Prob}[V \cup W]} = \frac{\text{Prob}[V]}{\text{Prob}[V \cup W]} \Rightarrow$$

$$\text{Prob}[V \cup W] = \frac{\text{Prob}[V]}{\text{Prob}[V / V \cup W]} \tag{46}$$

Με ακριβώς παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\text{Prob}[W / V \cup W] = \frac{\text{Prob}[W \cap (V \cup W)]}{\text{Prob}[V \cup W]} = \frac{\text{Prob}[W \cap V]}{\text{Prob}[V \cup W]} + \frac{\text{Prob}[W \cap W]}{\text{Prob}[V \cup W]} =$$

$$= \frac{\text{Prob}[\varnothing]}{\text{Prob}[V \cup W]} + \frac{\text{Prob}[W \cap W]}{\text{Prob}[V \cup W]} = \frac{\text{Prob}[W \cap W]}{\text{Prob}[V \cup W]} = \frac{\text{Prob}[W]}{\text{Prob}[V \cup W]} \Rightarrow$$

$$\text{Prob}[V \cup W] = \frac{\text{Prob}[W]}{\text{Prob}[W / V \cup W]} \tag{47}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις (46) και (47) στην αρχική σχέση (45), έχουμε:

$$\text{Prob}[U / V \cup W] = \frac{\text{Prob}[U \cap V]}{\text{Prob}[V \cup W]} + \frac{\text{Prob}[U \cap W]}{\text{Prob}[V \cup W]} =$$

$$= \frac{\text{Prob}[U / V] \cdot \text{Prob}[V]}{\text{Prob}[V / V \cup W]} + \frac{\text{Prob}[U / W] \cdot \text{Prob}[W]}{\text{Prob}[W / V \cup W]} =$$

$$= \text{Prob}[U / V] \cdot \text{Prob}[V / V \cup W] + \text{Prob}[U / W] \cdot \text{Prob}[W / V \cup W]$$

Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια πρόταση η οποία χρησιμοποιείται ευρέως από τη μέθοδο της αποσύνθεσης και έχει αποδειχθεί ότι ισχύει από τον Gershwin (1994).

ΠΡΟΤΑΣΗ 2:
Στη στάσιμη κατάσταση για κάθε δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης L(i,j) ισχύουν τα παρακάτω

Για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(i,j)$ κάθε εικονικού υποσυστήματος L(i,j) ισχύει:

$$r_u(i,j)\cdot \Pr ob[\alpha_u[(i,j),t]=0\ \kappa\alpha\iota\ n[(i,j),t-1]<N(i,j)]=$$
$$p_u(i,j)\Pr ob[\alpha_u[(i,j),t]=1\ \kappa\alpha\iota\ n[(i,j),t-1]<N(i,j)]$$

Όμως
$$\Pr ob[\alpha_u[(i,j),t]=1\ \kappa\alpha\iota\ n[(i,j),t-1]<N(i,j)]=PR(i,j)$$
άρα ο παραπάνω τύπος γίνεται

$$r_u(i,j)\cdot \Pr ob[\alpha_u[(i,j),t]=0\ \kappa\alpha\iota\ n[(i,j),t-1]<N(i,j)]=p_u(i,j)\cdot PR(i,j)\Rightarrow$$
$$\Pr ob[\alpha_u[(i,j),t]=0\ \kappa\alpha\iota\ n[(i,j),t-1]<N(i,j)]=\frac{p_u(i,j)\cdot PR(i,j)}{r_u(i,j)}$$

Ομοίως για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(i,j)$ κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(i,j) ισχύει:

$$r_d(i,j)\cdot \Pr[\alpha_d[(i,j),t]=0\ \kappa\alpha\iota\ n[(i,j),t-1]>0]=$$
$$p_d(1,2)\cdot \underbrace{\Pr[\alpha_d[(i,j),t]=1\ \kappa\alpha\iota\ n[(i,j),t-1]>0]}_{PR(1,2)}\Rightarrow$$
$$\Pr[\alpha_d[(i,j),t]=0\ \kappa\alpha\iota\ n[(i,j),t-1]>0]=\frac{p_d(i,j)\cdot PR(i,j)}{r_d(i,j)}$$

Οι ισότητες αυτές εκφράζουν το γεγονός ότι στη στάσιμη κατάσταση σε κάθε δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης L(i,j) για κάθε βλάβη υπάρχει και η αντίστοιχη επιδιόρθωση, (δηλαδή repair frequency = failure frequency).

Με $p[(i,j),n,\alpha_1,\alpha_2]$ συμβολίζουμε τη πιθανότητα το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L(i,j) να βρεθεί στην κατάσταση (n,α_1,α_2).
Με $p[((i,j),k),n,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ συμβολίζουμε τη πιθανότητα το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L((i,j),k) να βρεθεί στην κατάσταση $(n,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$
Με $n[(i,j),t]=A\ \kappa\alpha\iota\ n[((i,j),\kappa),t]=B$ συμβολίζουμε ότι ο αριθμός των προϊόντων που υπάρχουν στο ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L(i,j) και L((i,j),k) είναι A και B, αντίστοιχα.
Με PR(i,j) και PR((i,j),k) συμβολίζουμε την απόδοση των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων L(i,j) και L((i,j),k), αντίστοιχα.
Με $PR_u(i,j)$, $PR_d(i,j)$,συμβολίζουμε την απόδοση της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_u(i,j)$ και $M_d(i,j)$, αντίστοιχα.
Με $p_s(i,j)$ και $p_b(i,j)$ συμβολίζουμε τη πιθανότητα το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L(i,j) να βρεθεί άδειο ή μπλοκαρισμένη, αντίστοιχα.

3.13.3 Οι εξισώσεις διατήρησης της ροής (Conservation of flow equations)

Επειδή δεν δημιουργείται ή καταστρέφεται νέο υλικό, η ροή των προϊόντων πρέπει να δια τηρείται. Αυτό έχει σαν συνέπεια να ισχύει η αρχή διατήρησης της ροής η οποία εκφράζεται με τις δυο παρακάτω μαθηματικές σχέσεις:

$$PR((2,4),5) = PR(5,6) \tag{48}$$

$$PR(1,2) + PR(3,4) = PR((2,4),5) \tag{49}$$

Για τις ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές ισχύει ότι

$PR_u(1,2)=PR_d(1,2)=PR(1,2)$
$PR_u(3,4)=PR_d(3,4)=PR(3,4)$
$PR_{u1}((2,4),5)+ PR_{u2}((2,4),5)=PR_d((2,4),5)=PR((2,4),5)$
$PR_d((2,4),5)=PR_u(5,6)$
$PR_d(5,6)=PR_u(5,6)=PR(5,6)$

3.13.4 Εξισώσεις ροής (Flow rate idle time) για την μηχανή $M_u(5,6)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για την εύρεση της πιθανότητας εμφάνισης βλάβης $p_u(5,6)$ της εικονικής μηχανής $M_u(5,6)$.

Για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,6)$ ισχύει:

$$PR(5) = e_5\left[\left(1 - p_s((2,4),5)\right)\cdot\left((1 - p_b(5,6)\right)\right] =$$

$$e_5\left(1 - p_s((2,4),5) - p_b(5,6) + \underbrace{p_s((2,4),5)\cdot p_b(5,6)}_{0}\right) \tag{50}$$

Το γινόμενο $p_s((2,4),5)\cdot p_b(5,6)$ είναι ίσο με μηδέν διότι μια μηχανή δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα άδεια και μπλοκαρισμένη.

Επίσης ισχύει ότι

$$PR_u(5,6) = e_u(5,6)\left(1 - p_b(5,6)\right) = PR(5,6) \Rightarrow 1 - p_b(5,6) = \frac{PR_u(5,6)}{e_u(5,6)} \Rightarrow$$

$$p_b(5,6) = 1 - \frac{PR_u(5,6)}{e_u(5,6)}$$

Επίσης

$$PR_d((2,4),5) = e_d((2,4),5)\left(1 - p_s((2,4),5)\right) = PR((2,4),5) \Rightarrow 1 - p_s((2,4),5) = \frac{PR_d((2,4),5)}{e_d((2,4),5)} \Rightarrow$$

$$p_s((2,4),5) = 1 - \frac{PR_d((2,4),5)}{e_d((2,4),5)}$$

Αντικαθιστώντας τις ποσότητες αυτές στην αρχική εξίσωση (50), έχουμε:

$$PR(5) = e_5\left(1-\left(1-\frac{PR_d((2,4),5)}{e_d((2,4),5)}\right)-\left(1-\frac{PR_u(5,6)}{e_u(5,6)}\right)\right)=$$

$$e_5\left(\frac{PR_d((2,4),5)}{e_d((2,4),5)}+\frac{PR_u(5,6)}{e_u(5,6)}-1\right)\overset{PR(5)=PR(5,6)=PR((2,4),5)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{PR((2,4),5)}{e_5}=\frac{PR((2,4),5)}{e_u(5,6)}-1+\frac{PR((2,4),5)}{e_d((2,4),5)}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{e_5}+\frac{1}{PR((2,4),5)}-\frac{1}{e_d((2,4),5)}=\frac{1}{e_u(5,6)}=\frac{r_u(5,6)+p_u(5,6)}{r_u(5,6)}$$

Τελικά η εξίσωση ροής (flow rate idle time) για την ΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,6)$ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{r_u(5,6)+p_u(5,6)}{r_u(5,6)}=\frac{1}{e_u(5,6)}=K_1 \qquad (51)$$

όπου $K_1=\frac{1}{e_5}+\frac{1}{PR((2,4),5)}-\frac{1}{e_d((2,4),5)}$

3.13.5 Εξισώσεις ροής (flow rate idle time) για την μηχανή $M_d(1,2)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για την εύρεση της πιθανότητας εμφάνισης βλάβης $p_d(1,2)$ της εικονικής μηχανής $M_d(1,2)$.

Για την μηχανή $M_d(1,2)$ έχουμε

$$PR(2)=e_2\left[\left(1-p_{b_{M_2}}((2,4),5)\right)\left(1-p_s(1,2)\right)\right]=e_2\left(1-p_{b_{M_2}}((2,4),5)-p_s(1,2)+\underbrace{p_{b_{M_2}}((2,4),5)\cdot p_s(1,2)}_{0}\right)=$$

$$=e_2\left(1-p_{b_{M_2}}((2,4),5)-p_s(1,2)\right) \qquad (52)$$

Το γινόμενο $p_{b_{M_2}}((2,4),5)\cdot p_s(1,2)$ είναι ίσο με μηδέν διότι η μηχανή M_2 δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα άδεια και μπλοκαρισμένη.

Όμως

$$\mathrm{PR_d}(1,2)=\mathrm{PR}(1,2)=\mathrm{e_d}(1,2)\left(1-\mathrm{p_s}(1,2)\right)\Rightarrow 1-\mathrm{p_s}(1,2)=\frac{\mathrm{PR}(1,2)}{\mathrm{e_d}(1,2)}\Rightarrow \mathrm{p_s}(1,2)=1-\frac{\mathrm{PR}(1,2)}{\mathrm{e_d}(1,2)} \qquad (53)$$

$$\mathrm{PR}_{u_1}((2,4),5)=\mathrm{PR}((2,4),5)-\mathrm{PR}(3,4)=\mathrm{e}_{u_1}((2,4),5)\left(1-\mathrm{p}_{b_2}((2,4),5)\right)\Rightarrow$$

$$1-\mathrm{p}_{b_2}((2,4),5)=\frac{\mathrm{PR}((2,4),5)-\mathrm{PR}(3,4)}{\mathrm{e}_{u_1}((2,4),5)}\Rightarrow \mathrm{p}_{b_2}((2,4),5)=1-\frac{\mathrm{PR}((2,4),5)-\mathrm{PR}(3,4)}{\mathrm{e}_{u_1}((2,4),5)} \qquad (54)$$

Αντικαθιστώντας τις (53) και (54) στην (52) και λαμβάνωντας υπόψη ότι $PR(2) = PR((2,4),5) - PR(3,4)$, έχουμε

$$PR(2) = PR((2,4),5) - PR(3,4) =$$
$$= e_2\left(1-\left(1-\frac{PR((2,4),5)-PR(3,4)}{e_{u_1}((2,4),5)}\right)-\left(1-\frac{PR((2,4),5)-PR(3,4)}{e_d(1,2)}\right)\right)=$$
$$= e_2\left(\frac{PR((2,4),5)-PR(3,4)}{e_{u_1}((2,4),5)}-1+\frac{PR((2,4),5)-PR(3,4)}{e_d(1,2)}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{PR((2,4),5)-PR(3,4)}{e_2}=\frac{PR((2,4),5)-PR(3,4)}{e_{u_1}((2,4),5)}-1+\frac{PR((2,4),5)-PR(3,4)}{e_d(1,2)}\Rightarrow$$
$$\frac{1}{e_2}=\frac{1}{e_{u_1}((2,4),5)}-\frac{1}{PR((2,4),5)-PR(3,4)}+\frac{1}{e_d(1,2)}\Rightarrow$$
$$\frac{1}{e_d(1,2)}=\frac{r_d(1,2)+p_d(1,2)}{r_d(1,2)}=\frac{1}{e_2}-\frac{1}{e_{u_1}((2,4),5)}+\frac{1}{PR((2,4),5)-PR(3,4)}$$

Τελικά η εξίσωση ροής (flow rate idle time) για την ΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(1,2)$ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{r_d(1,2)+p_d(1,2)}{r_d(1,2)}=\frac{1}{e_d(1,2)}=K_2 \qquad (55)$$

όπου

$$K_2=\frac{1}{e_2}-\frac{1}{e_{u_1}((2,4),5)}+\frac{1}{PR((2,4),5)-PR(3,4)}$$

3.13.6 Εξισώσεις ροής (flow rate idle time) για την μηχανή $M_d(3,4)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για την εύρεση της πιθανότητας εμφάνισης βλάβης $p_d(3,4)$ της εικονικής μηχανής $M_d(3,4)$.

Για τη μηχανή $M_d(3,4)$

$$PR(4) = e_4\left[\left(1-p_{b_{M_4}}((2,4),5)\right)\cdot\left(1-p_s(3,4)\right)\right]=$$
$$= e_4\left(1-p_{b_{M_4}}((2,4),5)-p_s(3,4)+\underbrace{p_{b_{M_4}}((2,4),5)\cdot p_s(3,4)}_{0}\right)=e_4\left(1-p_{b_{M_4}}((2,4),5)-p_s(3,4)\right) \qquad (56)$$

Επίσης

$$\mathrm{PR_d}(3,4) = \mathrm{PR}(3,4) = \mathrm{e_d}(3,4)\left(1-\mathrm{p_s}(3,4)\right) \Rightarrow 1-\mathrm{p_s}(3,4) = \frac{\mathrm{PR}(3,4)}{\mathrm{e_d}(3,4)} \Rightarrow$$
$$\mathrm{p_s}(3,4) = 1-\frac{\mathrm{PR}(3,4)}{\mathrm{e_d}(3,4)} \qquad (57)$$

$$\mathrm{PR_{u_2}}((2,4),5) = \mathrm{PR}((2,4),5) - \mathrm{PR}(1,2) = \mathrm{e_{u_2}}((2,4),5)\left(1-\mathrm{p_{b_4}}((2,4),5)\right) \Rightarrow$$
$$1-\mathrm{p_{b_4}}((2,4),5) = \frac{\mathrm{PR}((2,4),5)-\mathrm{PR}(1,2)}{\mathrm{e_{u_2}}((2,4),5)} \Rightarrow$$
$$\mathrm{p_{b_4}}((2,4),5) = 1-\frac{\mathrm{PR}((2,4),5)-\mathrm{PR}(1,2)}{\mathrm{e_{u_2}}((2,4),5)} \qquad (58)$$

Αντικαθιστώντας τις (57) και (58) στην (56) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $PR(4) = PR((2,4),5) - PR(1,2)$, έχουμε:

$$PR(4) = PR((2,4),5) - PR(1,2) = e_4\left(1-\left(1-\frac{PR((2,4),5)-PR(1,2)}{e_{u_2}((2,4),5)}\right)-\left(1-\frac{PR(3,4)}{e_d(3,4)}\right)\right) =$$
$$= e_4\left(\frac{PR((2,4),5)-PR(1,2)}{e_{u_2}((2,4),5)} - 1 + \frac{PR(3,4)}{e_d(3,4)}\right) \Rightarrow$$
$$\frac{PR((2,4),5)-PR(1,2)}{e_4} = \frac{PR((2,4),5)-PR(1,2)}{e_{u_2}((2,4),5)} - 1 + \frac{PR(3,4)}{e_d(3,4)} \overset{PR(3,4)=PR((2,4),5)-PR(1,2)}{\Rightarrow}$$
$$\frac{PR((2,4),5)-PR(1,2)}{e_4} = \frac{PR((2,4),5)-PR(1,2)}{e_{u_2}((2,4),5)} - 1 + \frac{PR((2,4),5)-PR(1,2)}{e_d(3,4)} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{e_4} = \frac{1}{e_{u_2}((2,4),5)} - \frac{1}{PR((2,4),5)-PR(1,2)} + \frac{1}{e_d(3,4)} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{e_d(3,4)} = \frac{1}{e_4} - \frac{1}{e_{u_2}((2,4),5)} + \frac{1}{PR((2,4),5)-PR(1,2)} = \frac{r_d(3,4)+p_d(3,4)}{r_d(3,4)}$$

Τελικά η εξίσωση ροής (flow rate idle time) για την ΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(3,4)$ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{r_d(3,4)+p_d(3,4)}{r_d(3,4)} = \frac{1}{e_d(3,4)} = K_3 \qquad (59)$$

όπου

$$K_3 = \frac{1}{e_4} - \frac{1}{e_{u_2}((2,4),5)} + \frac{1}{PR((2,4),5)-PR(1,2)}$$

3.13.7 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,6)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας επιδιόρθωσης $r_u(5,6)$ για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,6)$.

Για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,6)$ ισχύουν τα παρακάτω:

$$\{\alpha_u[(5,6),t]=1\} \Leftrightarrow \{\alpha_5(t)=1\} \quad \text{και} \quad \{n[((2,4),5),t\text{-}1]>0\}$$

ενώ

$$\{\alpha_u[(5,6),t]=0\} \Leftrightarrow \{\alpha_5(t)=0\} \quad \text{ή} \quad \{n[((2,4),5),t\text{-}1]=0\}$$

Η πιθανότητα επιδιόρθωσης $r_u(5,6)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_u(5,6)$ είναι

$$\begin{aligned} r_u(5,6) &= \text{Prob}[\alpha_u[(5,6),t+1]=1 / \{\{\alpha_u[(5,6),t]=0\} \text{ και } \{n[(5,6),t\text{-}1]<N(5,6)\}\}] = \\ &= \text{Prob}[\{\alpha_5(t+1)=1\} \quad \text{και} \quad \{n[((2,4),5),t]>0\}/ \\ &\qquad \{\{\alpha_5(t)=0\} \quad \text{ή} \quad \{n[((2,4),5),t\text{-}1]=0\}\} \text{ και} \quad \{n[(5,6),t\text{-}1]<N(5,6)\}] \\ &= \text{Prob}[\{\alpha_5(t+1)=1\} \quad \text{και} \quad \{n[((2,4),5),t]>0\}/ \\ &\qquad \{\{\alpha_5(t)=0\} \text{ και } \{n[(5,6),t\text{-}1]<N(5,6)\}\} \text{ ή} \\ &\qquad \{\{n[((2,4),5),t\text{-}1]=0\} \text{ και } \{n[(5,6),t\text{-}1]<N(5,6)\}\}] \end{aligned} \tag{60}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα

$$\begin{aligned} U &= \{\alpha_5(t+1)=1 \text{ και } n[((2,4),5),t]>0\} \\ V &= \{\alpha_5(t)=0 \text{ και } n[(5,6),t\text{-}1]<N(5,6)\} \\ W &= \{n[((2,4),5),t-1]=0 \text{ και } n[(5,6),t\text{-}1]<N(5,6)\} \end{aligned}$$

Τα γεγονότα V και W είναι ξένα μεταξύ τους διότι τα γεγονότα $\alpha_5(t)=0$ και $n[((2,4),5),t-1]=0$ είναι ξένα μεταξύ τους. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω γεγονότα U,V και W η σχέση (60) γίνεται

$$r_u(5,6) = \text{Prob}[U/V \cup W] = \text{Prob}[U/V]\text{Prob}[V/V \cup W] + \text{Prob}[U/W]\text{Prob}[W/V \cup W]$$

Στο σημείο αυτό θα υπολογίσουμε μια προς μια όλες τις παραπάνω δεσμευμένες πιθανότητες.

Υπολογισμός της πιθανότητας Prob[U/V]:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[U/V] &= \text{Prob}[\alpha_5(t+1)=1 \text{ και } n[((2,4),5),t]>0 / \alpha_5(t)=0 \text{ και } n[(5,6),t\text{-}1]<N(5,6)] = \\ &= \text{Prob}[\alpha_5(t+1)=1 / \alpha_5(t)=0] = r_5 \end{aligned} \tag{61}$$

Υπολογισμός της δεσμευμένης πιθανότητας Prob[U/W]:

$$\text{Prob}[U/W] = \text{Prob}[\alpha_5(t+1)=1 \text{ και } n[((2,4),5),t]>0 / \\ n[((2,4),5),t-1]=0 \text{ και } n[(5,6),t-1]<N(5,6)]$$

Η παραπάνω δεσμευμένη πιθανότητα εκφράζει το γεγονός ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((2,4),5)}$ μεταβαίνει από την κατάσταση ΄΄άδειο΄΄ στη κατάσταση ΄΄γεμάτο΄΄. Αυτό μπορεί να συμβεί αν κάποια από τις δυο εικονικές μηχανές $M_{u_1}((2,4),5)$, $M_{u_2}((3,4),5)$ ή ενδεχομένως και οι δύο επιδιορθώνονται. Αυτό μπορεί να συμβεί με πιθανότητα

$$r_{u_1}((2,4),5)(1-r_{u_2}((3,4),5)) + r_{u_2}((3,4),5)(1-r_{u_1}((2,4),5)) + r_{u_1}((2,4),5)r_{u_2}((3,4),5)$$

Οπότε τελικά

$$\text{Prob}[U/W] = r_{u_1}((2,4),5)(1-r_{u_2}((3,4),5)) + r_{u_2}((3,4),5)(1-r_{u_1}((2,4),5)) + r_{u_1}((2,4),5)r_{u_2}((3,4),5) \quad (62)$$

Υπολογισμός της δεσμευμένης πιθανότητας $\text{Prob}[W/V\cup W]$:

$$\text{Prob}[W/V\cup W] = \text{Prob}[n[((2,4),5),t-1]=0 \text{ και } n[(5,6),t-1]<N(5,6) / \\ \{\alpha_5(t)=0 \text{ και } n[(5,6),t-1]<N(5,6)\} \quad \text{ή} \\ \{n[((2,4),5),t-1]=0 \text{ και } n[(5,6),t-1]<N(5,6)\}] = \\ = \text{Prob}[n[((2,4),5),t-1]=0 \text{ και } n[(5,6),t-1]<N(5,6) / \\ \{\alpha_5(t)=0 \text{ ή } n[((2,4),5),t-1]=0\} \text{ και } n[(5,6),t-1]<N(5,6)] \Rightarrow$$

$$\text{Prob}[W/V\cup W] = \frac{\text{Prob}[n[((2,4),5),t-1]=0 \text{ και } n[(5,6),t-1]<N(5,6)]}{\text{Prob}[\{\alpha_5(t)=0 \text{ ή } n[((2,4),5),t-1]=0\} \text{ και } n[(5,6),t-1]<N(5,6)]}$$

Επειδή οι χωρητικότητες των αποθηκευτικών χώρων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους ισχύει ότι

$$\text{Prob}[n[((2,4),5),t-1]=0 \text{ και } n[(5,6),t-1]<N(5,6)] = \\ \text{Prob}[n[((2,4),5),t-1]=0]\cdot \text{Prob}[n[(5,6),t-1]<N(5,6)]$$

Όμως

$$\text{Prob}[n[(5,6),t-1]<N(5,6)] = 1-\text{Prob}[n[(5,6),t-1]=N(5,6)]$$

Επίσης υπενθυμίζουμε ότι

$$\{\alpha_u[(5,6),t]=0\} \Leftrightarrow \{\alpha_5(t)=0\} \quad \text{ή} \quad \{n[((2,4),5),t-1]=0\}$$

οπότε ο όρος $\text{Prob}[W/V\cup W]$ γίνεται

$$\mathrm{Prob}[W / V \cup W] = \frac{\mathrm{Prob}[n[((2,4),5), t-1] = 0] \cdot (1 - \mathrm{Prob}[n[(5,6), t\text{-}1] = N(5,6)])}{\mathrm{Prob}[\{\alpha_u[(5,6), t] = 0\} \text{ και } n[(5,6), t\text{-}1] < N(5,6)]} =$$

$$= \frac{\mathrm{Prob}[n[((2,4),5), t-1] = 0] - \mathrm{Prob}[n[((2,4),5), t-1] = 0] \cdot \mathrm{Prob}[n[(5,6), t\text{-}1] = N(5,6)]}{\mathrm{Prob}[\{\alpha_u[(5,6), t] = 0\} \text{ και } n[(5,6), t\text{-}1] < N(5,6)]}$$

Από τις υποθέσεις του μοντέλου, επειδή μια μηχανή δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα άδεια και μπλοκαρισμένη έπεται ότι το γινόμενο

$$\mathrm{Prob}[n[((2,4),5), t-1] = 0] \cdot \mathrm{Prob}[n[(5,6), t\text{-}1] = N(5,6)] = 0$$

Τελικά ο όρος $\mathrm{Prob}[W / V \cup W]$ γίνεται

$$\mathrm{Prob}[W / V \cup W] = \frac{\mathrm{Prob}[n[((2,4),5), t-1] = 0]}{\mathrm{Prob}[\{\alpha_u[(5,6), t] = 0\} \text{ και } n[(5,6), t\text{-}1] < N(5,6)]} =$$

$$= \frac{p_s((2,4),5)}{\mathrm{Prob}[\{\alpha_u[(5,6), t] = 0\} \text{ και } n[(5,6), t\text{-}1] < N(5,6)]}$$

όπου $p_s((2,4),5)$ είναι η πιθανότητα το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L((2,4),5) να βρεθεί άδειο.

Ο παρονομαστής του παραπάνω κλάσματος μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:
Επειδή για κάθε γραμμή παραγωγής, άρα και για κάθε εικονικό υποσύστημα για κάθε βλάβη που παρουσιάζεται υπάρχει πάντοτε και η αντίστοιχη επιδιόρθωση (Repair Frequency=Failure frequency) ισχύει ο παρακάτω τύπος:

$$r_u(5,6) \cdot \mathrm{Prob}[\alpha_u[(5,6), t] = 0 \text{ και } n[(5,6), t\text{-}1] < N(5,6)] =$$
$$p_u(5,6)\, \mathrm{Prob}[\alpha_u[(5,6), t] = 1 \text{ και } n[(5,6), t\text{-}1] < N(5,6)]$$

Όμως
$$\mathrm{Prob}[\alpha_u[(5,6), t] = 1 \text{ και } n[(5,6), t\text{-}1] < N(5,6)] = PR(5,6)$$
άρα ο παραπάνω τύπος γίνεται
$$r_u(5,6) \cdot \mathrm{Prob}[\alpha_u[(5,6), t] = 0 \text{ και } n[(5,6), t\text{-}1] < N(5,6)] = p_u(5,6) \cdot PR(5,6) \Rightarrow$$
$$\mathrm{Prob}[\alpha_u[(5,6), t] = 0 \text{ και } n[(5,6), t\text{-}1] < N(5,6)] = \frac{p_u(5,6) \cdot PR(5,6)}{r_u(5,6)}$$
Τελικά προκύπτει ότι ο όρος $\mathrm{Prob}[W / V \cup W]$ είναι ίσος με

$$\mathrm{Prob}[W / V \cup W] = \frac{p_s((2,4),5) \cdot r_u(5,6)}{p_u(5,6) \cdot PR(5,6)} \qquad (63)$$

Υπολογισμός της δεσμευμένης πιθανότητας $\mathrm{Prob}[V / V \cup W]$:

$$\mathrm{Prob}[V / V \cup W] = \mathrm{Prob}[\alpha_5(t) = 0 \text{ και } n[(5,6), t\text{-}1] < N(5,6) /$$
$$\{\alpha_5(t) = 0 \text{ και } n[(5,6), t\text{-}1] < N(5,6)\} \text{ ή}$$
$$\{n[((2,4),5), t-1] = 0 \text{ και } n[(5,6), t\text{-}1] < N(5,6)\}]$$

Παρατηρούμε ότι τα γεγονότα $(V / V \cup W)$ και $(W / V \cup W)$ είναι συμπληρωματικά ως προς το πότε ισχύει ότι $\alpha_u[(5,6),t]=0$.
Ως εκ τούτου προκύπτει ότι

$$\text{Prob}[V / V \cup W] = 1 - \text{Prob}[W / V \cup W] = 1 - \frac{p_s((2,4),5) \cdot r_u(5,6)}{p_u(5,6) \cdot PR(5,6)} \qquad (64)$$

Η αρχική ισότητα που περιγράφει την πιθανότητα επιδιόρθωσης $r_u(5,6)$ γίνεται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (61),(62), (63) και (64)

$$r_u(5,6) = r_5 \cdot A + B \cdot C$$

όπου $A=(1 - r_u(5,6) \cdot D)$, $C = r_u(5,6) \cdot D$, $D = \frac{p_s((2,4),5) \cdot}{p_u(5,6) \cdot PR(5,6)}$ και
$B= r_{u_1}((2,4),5)(1 - r_{u_2}((2,4),5)) + r_{u_2}((2,4),5)(1 - r_{u_1}((2,4),5)) + r_{u_1}((2,4),5) r_{u_2}((2,4),5)$

οπότε ισχύει:

$$r_u(5,6) = r_5 - r_u(5,6) \cdot r_5 \cdot D + B \cdot r_u(5,6) \cdot D \Rightarrow r_u(5,6) = r_5 + r_u(5,6) \cdot D \cdot (B - r_5) \Rightarrow$$
$$r_u(5,6) = r_5 + r_u(5,6) \frac{p_s((2,4),5) \cdot}{p_u(5,6) \cdot PR(5,6)} (B - r_5) = r_5 + \frac{r_u(5,6)}{p_u(5,6)} \cdot \frac{p_s((2,4),5)}{PR(5,6)} (B - r_5)$$

Τελικά η εξίσωση για τη πιθανότητα επιδιόρθωσης $r_u(5,6)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_u(5,6)$ δίνεται από τον τύπο:

$$r_u(5,6) = r_5 + \frac{r_u(5,6)}{p_u(5,6)} \cdot K_4 \qquad (65)$$

όπου $K_4 = \frac{p_s((2,4),5)}{PR(5,6)} (B - r_5) \overset{PR(5,6)=PR((2,4),5)}{=} \frac{p_s((2,4),5)}{PR((2,4),5)} (B - r_5)$

3.13.8 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(1,2)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας επιδιόρθωσης $r_d(1,2)$ για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(1,2)$.

Για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(1,2)$ ισχύουν τα παρακάτω:

$$\{\alpha_d[(1,2),t]=1\} \Leftrightarrow \{\alpha_2(t)=1\} \text{ και } \{n[((2,4),5),t-1] < N((2,4),5)\}$$

$$\{\alpha_d[(1,2),t]=0\} \Leftrightarrow \{\alpha_2(t)=0\} \text{ ή } \{n[((2,4),5),t-1] = N((2,4),5)\}$$

Η πιθανότητα επιδιόρθωσης της εικονικής μηχανής $M_d(1,2)$ δίνεται από τον τύπο:

$$r_d(1,2) = \text{Prob}\left[\alpha_d[(1,2),t+1] = 1/\alpha_d[(1,2),t] = 1 \text{ και } n[(1,2),t-1] > 0\right] =$$

$$= \text{Prob}\left[\{\alpha_2(t+1) = 1\} \text{ και } \{n[((2,4),5),t] < N((2,4),5)\}/\right.$$
$$\left.\{\{\alpha_2(t) = 0\} \text{ ή } \{n[((2,4),5),t-1] = N((2,4),5)\}\} \text{ και } n[(1,2),t-1] > 0\right] \quad (66)$$

Ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα:

$$U = \{\alpha_2(t+1) = 1 \text{ και } n[((2,4),5),t] < N((2,4),5)\}$$
$$V = \{\alpha_2(t) = 0 \text{ και } n[(1,2),t-1] > 0\}$$
$$W = \{n[((2,4),5),t-1] = N((2,4),5) \text{ και } n[(1,2),t-1] > 0\}$$

Τα γεγονότα V και W είναι ξένα μεταξύ τους διότι τα γεγονότα
$\{\alpha_2(t) = 0\}$ και $\{n[((2,4),5),t-1] = N((2,4),5)\}$ είναι ξένα μεταξύ τους.
Με βάση τον ορισμό των γεγονότων αυτών η πιθανότητα επιδιόρθωσης της εικονικής μηχανής $M_d(1,2)$, $r_d(1,2)$ (σχέση (66)) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$r_d(1,2) = \Pr[U/V \cup W] = \Pr[U/V]\cdot\Pr[V/V \cup W] + \Pr[U/W]\cdot\Pr[W/V \cup W]$$

Οι παραπάνω όροι θα υπολογιστούν ξεχωριστά.

Υπολογισμός του όρου $\Pr[U/V]$:

$$\Pr[U/V] = \Pr[\alpha_2(t+1) = 1 \text{ και } n[((2,4),5),t] < N((2,4),5)/\alpha_2(t) = 0 \text{ και } n[(1,2),t-1] > 0]$$
$$= r_2 \quad (67)$$

Υπολογισμός του όρου $\Pr[U/W]$:

$$\Pr[U/W] = \Pr[\alpha_2(t+1) = 1 \text{ και } n[((2,4),5),t] < N((2,4),5)/$$
$$n[((2,4),5),t-1] = N((2,4),5) \text{ και } n[(1,2),t-1] > 0]$$

Ο παραπάνω όρος εκφράζει το γεγονός ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((2,4),5)}$ μεταβαίνει από την κατάσταση ΄΄γεμάτο΄΄ στην κατάσταση ΄΄όχι γεμάτο΄΄. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν απομακρυνθεί κάποιο προϊόν από τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((2,4),5)}$. Για να απομακρυνθεί ένα προϊόν από τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((2,4),5)}$ θα πρέπει η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d((2,4),5)$ να επιδιορθωθεί, με πιθανότητα $r_d((2,4),5)$.

Δηλαδή

$$\Pr[U/W] = r_d((2,4),5) \quad (68)$$

Υπολογισμός του όρου $\Pr[W/V \cup W]$:

$$\Pr[W / V \cup W] = \Pr[n[((2,4),5), t-1] = N((2,4),5) \text{ και } n[(1,2), t\text{-}1] > 0 / \{\alpha_2(t) = 0 \text{ ή } n[((2,4),5), t\text{-}1] = N((2,4),5)\} \text{ και } n[(1,2), t\text{-}1] > 0] \Rightarrow$$

$$\Pr[W / V \cup W] = \frac{\Pr[n[((2,4),5), t-1] = N((2,4),5) \text{ και } n[(1,2), t\text{-}1] > 0]}{\Pr[\{\alpha_2(t) = 0 \text{ ή } n[((2,4),5), t\text{-}1] = N((2,4),5)\} \text{ και } n[(1,2), t\text{-}1] > 0]} =$$

$$= \frac{\Pr[n[((2,4),5), t-1] = N((2,4),5)] \cdot \Pr[n[(1,2), t\text{-}1] > 0]}{\Pr[\alpha_d[(1,2), t] = 0 \text{ και } n[(1,2), t\text{-}1] > 0]}$$

Ο αριθμητής του κλάσματος γίνεται

$$\Pr[n[((2,4),5), t-1] = N((2,4),5)] \cdot \Pr[n[(1,2), t\text{-}1] > 0] =$$
$$\Pr[n[((2,4),5), t-1] = N((2,4),5)](1 - \Pr[n[(1,2), t\text{-}1] = 0]) =$$
$$\Pr[n[((2,4),5), t-1] = N((2,4),5)] - \underbrace{\Pr[n[((2,4),5), t-1] = N((2,4),5)]\Pr[n[(1,2), t\text{-}1] = 0]}_{0} =$$

$$\Pr[n[((2,4),5), t-1] = N((2,4),5)] - 0 = \Pr[n[((2,4),5), t-1] = N((2,4),5)]$$

Το γινόμενο $\Pr[n[((2,4),5), t-1] = N((2,4),5)]\Pr[n[(1,2), t\text{-}1] = 0]$ είναι ίσο με μηδέν διότι εξ υποθέσεως η μηχανή $M_d(1,2)$ δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα τη χρονική στιγμή t-1 άδεια και μπλοκαρισμένη.

Ο παρονομαστής του κλάσματος αναλύεται ως εξής:

Λόγω του ότι ισχύει η ΠΡΟΤΑΣΗ 2 της ενότητας 3.13.2 έπεται ότι

$$r_d(1,2) \cdot \Pr[\alpha_d[(1,2), t] = 0 \text{ και } n[(1,2), t\text{-}1] > 0] =$$
$$p_d(1,2) \cdot \underbrace{\Pr[\alpha_d[(1,2), t] = 1 \text{ και } n[(1,2), t\text{-}1] > 0]}_{PR(1,2)} \Rightarrow$$

$$\Pr[\alpha_d[(1,2), t] = 0 \text{ και } n[(1,2), t\text{-}1] > 0] = \frac{p_d(1,2) \cdot PR(1,2)}{r_d(1,2)}$$

Στο σημείο αυτό επισημαίνεται ότι η πιθανότητα
$\Pr[\alpha_d[(1,2), t] = 1 \text{ και } n[(1,2), t\text{-}1] > 0]$ είναι ίση στην ουσία με την απόδοση της ΄΄εικονικής΄΄ γραμμής L(1,2). Αντικαθιστώντας τον αριθμητή και παρονομαστή στο κλάσμα έχουμε ότι

$$\Pr[W / V \cup W] = \frac{\Pr[n[((2,4),5), t-1] = N((2,4),5)]}{p_d(1,2) \cdot PR(1,2)} \cdot r_d(1,2) \qquad (69)$$

Υπολογισμός του όρου $\Pr[V / V \cup W]$:

$$\Pr[V / V \cup W] = \Pr[\alpha_2(t) = 0 \text{ και } n[(1,2), t-1] > 0 / \{\alpha_2(t) = 0 \text{ ή } n[((2,4),5), t-1] = N((2,4),5)\} \text{ και } n[(1,2), t-1] > 0]$$

Παρατηρούμε ότι τα γεγονότα ($W / V \cup W$) και ($V / V \cup W$) είναι συμπληρωματικά ως προς το πότε ισχύει ότι $\alpha_d(1,2) = 0$. Κατόπιν τούτου ισχύει:

$$\Pr[V / V \cup W] = 1 - \Pr[W / V \cup W] = 1 - \frac{\Pr[n[((2,4),5), t-1] = N((2,4),5)]}{p_d(1,2) \cdot PR(1,2)} \cdot r_d(1,2) \quad (70)$$

Συγκεντρώνοντας όλους τους παραπάνω όρους μαζί έχουμε ότι

$$r_d(1,2) = r_2 \cdot (1-E) + r_d((2,4),5) \cdot E \text{ , όπου}$$

$$E = \frac{\Pr[n[((2,4),5), t-1] = N((2,4),5)]}{p_d(1,2) \cdot PR(1,2)} \cdot r_d(1,2) = \frac{(p[N,1,1,0] + p[N,1,1,1]) \cdot r_d(1,2)}{p_d(1,2) \cdot PR(1,2)}$$

Κάνοντας αλγεβρικές πράξεις στην παραπάνω ισότητα:

$$r_d(1,2) = r_2 \cdot -r_2 \cdot E + r_d((2,4),5) \cdot E = r_2 + E \cdot (r_d((2,4),5) - r_2) =$$
$$= r_2 + \frac{r_d(1,2)}{p_d(1,2)} \cdot \frac{(p[N,1,1,0] + p[N,1,1,1]) \cdot}{PR(1,2)} (r_d((2,4),5) - r_2)$$

Τελικά, λαμβάνοντας υπόψη ότι PR(1,2)=PR((2,4),5)-PR(3,4), η εξίσωση παίρνει την τελική της μορφή ως εξής:

$$r_d(1,2) == r_2 + \frac{r_d(1,2)}{p_d(1,2)} \cdot K_5 \quad (71)$$

όπου $K_5 = \frac{(p[N,1,1,0] + p[N,1,1,1]) \cdot}{PR((2,4),5) - PR(3,4)} (r_d((2,4),5) - r_2)$

3.13.9 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(3,4)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας επιδιόρθωσης $r_d(3,4)$ για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(3,4)$.

$$\{\alpha_d[(3,4), t] = 1\} \Leftrightarrow \{\alpha_4(t) = 1\} \text{ και } \{n[((2,4),5), t-1] < N((2,4),5) - 1\}$$

$$\{\alpha_d[(3,4), t] = 0\} \Leftrightarrow \{\alpha_4(t) = 0\} \text{ ή } \{n[((2,4),5), t-1] = N((2,4),5)\} \text{ ή } \{n[((2,4),5), t-1] = N((2,4),5) - 1\}$$

Η πιθανότητα επιδιόρθωσης $r_d(3,4)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(3,4)$ δίνεται από τον τύπο

$$r_d(3,4) = \Pr\left[\alpha_{\mathrm{d}}\left[(3,4),t+1\right]=1/\alpha_{\mathrm{d}}\left[(3,4),t\right]=0\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{n}\left[(3,4),\mathrm{t}\text{ - }1\right]>0\right]=$$
$$=\Pr\left[\{\alpha_4(t+1)=1\}\quad \kappa\alpha\iota\quad \{\mathrm{n}\left[((2,4),5),\mathrm{t}\right]<N((2,4),5)-1\}/\right.$$
$$\{\{\alpha_2(t)=0\}\quad \acute{\eta}\quad \{\mathrm{n}\left[((2,4),5),\mathrm{t}\text{ - }1\right]=N((2,4),5)\}\,\acute{\eta}\,\{\mathrm{n}\left[((2,4),5),\mathrm{t}\text{ - }1\right]=N((2,4),5)-1\}\}$$
$$\left.\kappa\alpha\iota\ \mathrm{n}\left[(3,4),\mathrm{t}\text{ - }1\right]>0\ \right]$$

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένας πίνακας στον οποίο φαίνεται πότε η μηχανή $M_d(3,4)$ μπορεί να βρεθεί σε κατάσταση up τη χρονική στιγμή t+1.

Πίνακας 12: Περιπτώσεις για τις οποίες η μηχανή $M_d(3,4)$ μπορεί να βρεθεί up τη χρονική στιγμή t+1.

Περίπτωση (case)	Μηχανή M_4 τη στιγμή t	Κατάσταση του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L((2,4),5) τη στιγμή t-1	Η Μηχανή $M_d(3,4)$ up τη στιγμή t+1
1	down	$\mathrm{n}\left[((2,4),5),\mathrm{t}\text{ - }1\right]<\mathrm{N}((2,4),5)-2$	Δυνατόν
2	up	$\mathrm{n}\left[((2,4),5),\mathrm{t}\text{ - }1\right]=\mathrm{N}((2,4),5)-1$	Δυνατόν
3	up	$\mathrm{n}\left[((2,4),5),\mathrm{t}\text{ - }1\right]=\mathrm{N}((2,4),5)$	Αδύνατον
4	down	$\mathrm{n}\left[((2,4),5),\mathrm{t}\text{ - }1\right]=\mathrm{N}((2,4),5)-2$	Δυνατόν

Ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα:

$$\mathrm{U}=\{\alpha_4(\mathrm{t}+1)=1\ \text{και}\ \mathrm{n}\left[((2,4),5),\mathrm{t}\right]<\mathrm{N}((2,4),5)-1\}$$
$$\mathrm{V}=\{\alpha_4(\mathrm{t})=0\ \text{και}\ \mathrm{n}\left[((2,4),5),\mathrm{t}\text{ - }1\right]<\mathrm{N}((2,4),5)-2\ \text{και}\ \mathrm{n}\left[(3,4),\mathrm{t}\text{ - }1\right]>0\}$$
$$\mathrm{W}=\{\alpha_4(\mathrm{t})=1\ \text{και}\ \mathrm{n}\left[((2,4),5),\mathrm{t}\text{ - }1\right]=\mathrm{N}((2,4),5)-1\ \text{και}\ \mathrm{n}\left[(3,4),\mathrm{t}\text{ - }1\right]>0\ \}$$
$$\mathrm{Z}=\{\alpha_4(\mathrm{t})=0\ \text{και}\ \mathrm{n}\left[((2,4),5),\mathrm{t}\text{ - }1\right]=\mathrm{N}((2,4),5)-2\ \text{και}\ \mathrm{n}\left[(3,4),\mathrm{t}\text{ - }1\right]>0\}$$

Χρησιμοποιώντας τα γεγονότα αυτά, η πιθανότητα επιδιόρθωσης $r_d(3,4)$ για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(3,4)$ παίρνει την εξής μορφή:

$$r_d(3,4)=\Pr(U/V\cup W\cup Z)=\Pr(U/V)\Pr(V/V\cup W\cup Z)+\Pr(U/W)\Pr(W/V\cup W\cup Z)+$$
$$\Pr(U/Z)\Pr(Z/V\cup W\cup Z)=$$

(72)

Θα αναλύσουμε τώρα ένα προς ένα τους όρους που προκύπτουν.

$$\Pr\left[U/V\right]=\Pr\left[\alpha_4(\mathrm{t}+1)=1\ \text{και}\ \mathrm{n}\left[((2,4),5),\mathrm{t}\right]<N((2,4),5)-1/\right.$$
$$\alpha_4(\mathrm{t})=0\ \text{ και }\ \mathrm{n}\left[((2,4),5),\mathrm{t}\text{ - }1\right]<N((2,4),5)-2\ \kappa\alpha\iota\ \ \mathrm{n}\left[(3,4),\mathrm{t}\text{ - }1\right]>0\left]=\right.$$
$$=r_4$$

(73)

$$\Pr[U/W] = \Pr[\alpha_4(t+1)=1 \text{ και } n[((2,4),5),t] < N((2,4),5)-1 / \alpha_4(t)=1 \text{ και } n[((2,4),5),t-1] = N((2,4),5)-1 \text{ και } n[(3,4),t-1]>0] = r_d((2,4),5)\left(1-r_{u_1}((2,4),5)\right) \quad (74)$$

Η παραπάνω πιθανότητα εξηγείται ως εξής:
Τη χρονική στιγμή t-1 ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((2,4),5)}$ έχει (N((2,4),5)-1) προϊόντα ενώ τη χρονική στιγμή t έχει λιγότερα από (N((2,4),5)-1) προϊόντα. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει τουλάχιστον ένα προϊόν να αφαιρεθεί από τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((2,4),5)}$. Η μοναδική μηχανή που μπορεί να αφαιρέσει προϊόν από τον αποθηκευτικό χώρο αυτό είναι η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d((2,4),5)$ η οποία θα πρέπει να επιδιορθωθεί με πιθανότητα $r_d((2,4),5)$. Εκτός όμως από αυτό θα πρέπει η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_{u_1}((2,4),5)$ που μπορεί να τροφοδοτήσει τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((2,4),5)}$ με προϊόν να μην επισκευαστεί με πιθανότητα $\left(1-r_{u_1}((2,4),5)\right)$. Αν η μηχανή $M_{u_1}((2,4),5)$ βρισκόταν σε λειτουργία τότε θα τροφοδοτούσε τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((2,4),5)}$ με ένα προϊόν με αποτέλεσμα τη χρονική στιγμή t για τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((2,4),5)}$ να μην ίσχυε $n[((2,4),5),t] < N((2,4),5)-1$.

$$\Pr[W/V \cup W \cup Z] = \Pr[\alpha_4(t)=1 \text{ και } n[((2,4),5),t-1] = N((2,4),5)-1 \text{ και } n[(3,4),t-1]>0 / \alpha_d[(3,4),t]=0 \text{ και } n[(3,4),t-1]>0]$$

Επειδή $n[((2,4),5),t-1] = N((2,4),5)-1 \Rightarrow \alpha_4(t)=1$, και επειδή τα γεγονότα V,W και Z είναι ξένα μεταξύ τους ισχύει:

$$\Pr[W/V \cup W \cup Z] = \frac{\Pr[n[((2,4),5),t-1]=N((2,4),5)-1 \text{ και } n[(3,4),t-1]>0]}{\Pr[\alpha_d[(3,4),t]=0 \text{ και } n[(3,4),t-1]>0]} = \frac{\Pr[n[((2,4),5),t-1]=N((2,4),5)-1]\cdot \Pr[n[(3,4),t-1]>0]}{\Pr[\alpha_d[(3,4),t]=0 \text{ και } n[(3,4),t-1]>0]} = \frac{\Pr[n[((2,4),5),t-1]=N((2,4),5)-1]\cdot (1-\Pr[n[(3,4),t-1]>0])}{\Pr[\alpha_d[(3,4),t]=0 \text{ και } n[(3,4),t-1]>0]} = \frac{\Pr[n[((2,4),5),t-1]=N((2,4),5)-1]}{\Pr[\alpha_d[(3,4),t]=0 \text{ και } n[(3,4),t-1]>0]} = \frac{p[N-1,0,1,0]+p[N-1,0,1,1]+p[N-1,1,1,0]+p[N-1,1,1,1]}{\Pr[\alpha_d[(3,4),t]=0 \text{ και } n[(3,4),t-1]>0]} \quad (75)$$

Ο παρονομαστής λόγω της ΠΡΟΤΑΣΗΣ 2 της ενότητας 3.13.2 αναλύεται ως εξής

$$r_d(3,4)\cdot \Pr[\alpha_d[(3,4),t]=0 \text{ και } n[(3,4),t-1]>0]=$$
$$p_d(3,4)\cdot \underbrace{\Pr[\alpha_d[(3,4),t]=1 \text{ και } n[(3,4),t-1]>0]}_{PR(3,4)} \Rightarrow$$

$$\Pr[\alpha_d[(3,4),t]=0 \text{ και } n[(3,4),t-1]>0]=\frac{p_d(3,4)\cdot PR(3,4)}{r_d(3,4)}$$

Υπολογισμός της ποσότητας $\Pr[U/Z]$:

$$\Pr[U/Z]=\Pr[\alpha_4(t+1)=1 \kappa\alpha\iota\, n[((2,4),5),t]<N-1/$$
$$\alpha_4(t)=0 \kappa\alpha\iota\, n[((2,4),5),t-1]=N-2 \kappa\alpha\iota\, n[(3,4),t-1]>0]$$

Για να αναλύσουμε τον παραπάνω όρο θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω πίνακα

Σύστημα	Αριθμός προϊόντων	Κατάσταση των γειτονικών ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών
L((2,4),5)	n[((2,4),5),t-1]=N-2	$\alpha_d[(3,4),t]=0$
		$\alpha_{u_1}[((2,4),5),t]\in\{0,1\}$
		$\alpha_{u_2}[((2,4),5),t]=0$
		$\alpha_d[((2,4),5),t]\in\{0,1\}$

Στη συνέχεια ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα

$$\alpha_1=(n[((2,4),5),t-1]=N-2 \text{ και } \alpha_{u_2}[((2,4),5),t]=0 \text{ και } \alpha_{u_1}[((2,4),5),t]=0 \text{ και } \alpha_d[(3,4),t]=0)$$

$$\alpha_2=(n[((2,4),5),t-1]=N-2 \text{ και } \alpha_{u_2}[((2,4),5),t]=0 \text{ και } \alpha_{u_1}[((2,4),5),t]=1 \text{ και } \alpha_d[(3,4),t]=0)$$

$$\alpha_3=(n[((2,4),5),t-1]=N-2 \text{ και } \alpha_{u_2}[((2,4),5),t]=0 \text{ και } \alpha_{u_1}[((2,4),5),t]=0 \text{ και } \alpha_d[(3,4),t]=1)$$

$$\alpha_4=(n[((2,4),5),t-1]=N-2 \text{ και } \alpha_{u_2}[((2,4),5),t]=0 \text{ και } \alpha_{u_1}[((2,4),5),t]=1 \text{ και } \alpha_d[(3,4),t]=1)$$

$$C=(\alpha_d[(3,4),t]=1)\ ,\ b=\{n[(3,4),t-1]>0\}$$

Στην ουσία η δεσμευμένη πιθανότητα $\Pr[U/Z]$ μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\Pr[U/Z] = \Pr[C/\{\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4\} \cap \mathrm{b}] = \Pr[C/\{\alpha_1 \cap \mathrm{b}\} \cup \{\alpha_2 \cap \mathrm{b}\} \cup \{\alpha_3 \cap \mathrm{b}\} \cup \{\alpha_4 \cap \mathrm{b}\}]$$

Κάθε ένα από τα γεγονότα α_i, $i = 1,2,3,4$ συνεπάγεται και το γεγονός $\mathrm{b} = \{\mathrm{n}[(3,4), t-1] > 0\}$. Αυτό σημαίνει ότι ο παραπάνω τύπος παίρνει την παρακάτω μορφή.

$$\Pr[U/Z] = \frac{\Pr[\{C \cap \alpha_1\} \cup \{C \cap \alpha_2\} \cup \{C \cap \alpha_3\} \cup \{C \cap \alpha_4\}]}{\Pr[\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4]} =$$

$$= \left(\Pr[C/\alpha_1] \cdot \Pr[\alpha_1] + \Pr[C/\alpha_2] \cdot \Pr[\alpha_2] + \Pr[C/\alpha_3] \cdot \Pr[\alpha_3] + \Pr[C/\alpha_4] \cdot \Pr[\alpha_4]\right) \cdot \frac{1}{\Pr[\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4]} \tag{76}$$

Θα αναλύσουμε τώρα ένα προς ένα τους παραπάνω όρους:

$$\Pr[C/\alpha_1] = \Pr[\alpha_4(t+1) = 1 \cap \mathrm{n}[((2,4),5), t] < N-1 / \mathrm{n}[((2,4),5), t-1] = N-2 \cap \alpha_{u_2}[((2,4),5), t] = 0 \cap \alpha_{u_1}[((2,4),5), t] = 0 \cap \alpha_d[((2,4),5), t] = 0] = r_4\left(1 - r_{u_1}((2,4),5)\right) \cdot r_d((2,4),5) \tag{77}$$

$$\Pr[C/\alpha_2] = \Pr[\alpha_4(t+1) = 1 \cap \mathrm{n}[((2,4),5), t] < N-1 / \mathrm{n}[((2,4),5), t-1] = N-2 \cap \alpha_{u_2}[((2,4),5), t] = 0 \cap \alpha_{u_1}[((2,4),5), t] = 1 \cap \alpha_d[((2,4),5), t] = 0] = r_4 \cdot p_{u_1}((2,4),5) \cdot r_d((2,4),5) \tag{78}$$

$$\Pr[C/\alpha_3] = \Pr[\alpha_4(t+1) = 1 \cap \mathrm{n}[((2,4),5), t] < N-1 / \mathrm{n}[((2,4),5), t-1] = N-2 \cap \alpha_{u_2}[((2,4),5), t] = 0 \cap \alpha_{u_1}[((2,4),5), t] = 0 \cap \alpha_d[((2,4),5), t] = 1] = r_4\left(1 - r_{u_1}((2,4),5)\right) \cdot \left(1 - p_d((2,4),5)\right) \tag{79}$$

$$\Pr[C/\alpha_4] = \Pr[\alpha_4(t+1) = 1 \cap \mathrm{n}[((2,4),5), t] < N-1 / \mathrm{n}[((2,4),5), t-1] = N-2 \cap \alpha_{u_2}[((2,4),5), t] = 0 \cap \alpha_{u_1}[((2,4),5), t] = 1 \cap \alpha_d[((2,4),5), t] = 1] = r_4 \cdot p_{u_1}((2,4),5) \cdot \left(1 - p_d((2,4),5)\right) \tag{80}$$

Επίσης η πιθανότητα κάθε ένα από τα γεγονότα α_i, $i = 1,2,3,4$ να συμβεί εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\Pr[\alpha_1] &= p[((2,4),5), N-2{,}000] \\
\Pr[\alpha_2] &= p[((2,4),5), N-2{,}100] \\
\Pr[\alpha_3] &= p[((2,4),5), N-2{,}001] \\
\Pr[\alpha_4] &= p[((2,4),5), N-2{,}101]
\end{aligned} \tag{81}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (77),(78),(79),(80) και (81) στην σχέση (76):

$$\begin{aligned}
\Pr[U/Z] = {} & r_4\left(1-r_{u_1}((2,4),5)\right)\cdot r_d((2,4),5)\,p[((2,4),5), N-2{,}000] + \\
& r_4 \cdot p_{u_1}((2,4),5)\cdot r_d((2,4),5)\,p[((2,4),5), N-2{,}100] + \\
& r_4\left(1-r_{u_1}((2,4),5)\right)\cdot\left(1-p_d((2,4),5)\right)p[((2,4),5), N-2{,}001] + \\
& r_4 \cdot p_{u_1}((2,4),5)\cdot\left(1-p_d((2,4),5)\right)p[((2,4),5), N-2{,}101]
\end{aligned} \tag{82}$$

Ο όρος $\dfrac{1}{\Pr[\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4]}$ δεν αναλύεται διότι απαλείφεται στη συνέχεια.

Θα αναλύσουμε τώρα τον όρο $\Pr[\mathrm{V}/\mathrm{V}\cup\mathrm{W}\cup\mathrm{Z}]$:
Για να αναλύσουμε τον όρο αυτό χρησιμοποιούμε τις περιπτώσεις (cases) που περιγράφονται στον πίνακα 12.

$$\begin{aligned}
\Pr[V/V\cup W\cup Z] &= \Pr[\alpha_4(t)=0 \text{ και } \mathrm{n}[((2,4),5),\mathrm{t}\text{-}1] < N-2 \text{ και } \mathrm{n}[(3,4),\mathrm{t}\text{-}1] > 0 / \\
&\qquad \alpha_{\mathrm{d}}[(3,4),t] = 0 \text{ και } \mathrm{n}[(3,4),\mathrm{t}\text{-}1] > 0] = \\
&= 1 - \Pr[\{Case\,2 \cup Case\,3 \cup Case\,4\}/\,\alpha_{\mathrm{d}}[(3,4),t] = 0 \text{ και } \mathrm{n}[(3,4),\mathrm{t}\text{-}1] > 0] = \\
&= 1 - \frac{\Pr[\{Case\,2 \cup Case\,3 \cup Case\,4\}]}{\Pr[\alpha_{\mathrm{d}}[(3,4),t] = 0 \text{ και } \mathrm{n}[(3,4),\mathrm{t}\text{-}1] > 0]} = 1 - \frac{\Pr[\{Case\,2 \cup Case\,3\}] + \Pr[Case\,4]}{\Pr[\alpha_{\mathrm{d}}[(3,4),t] = 0 \text{ και } \mathrm{n}[(3,4),\mathrm{t}\text{-}1] > 0]}
\end{aligned} \tag{83}$$

Ο όρος $\Pr[\{\mathrm{Case}\,2 \cup \mathrm{Case}\,3\}]$ αναλύεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\Pr[\{Case\,2 \cup Case\,3\}] = {} & p[((2,4),5), N-1{,}010] + p[((2,4),5), N-1{,}011] + p[((2,4),5), N-1{,}110] + \\
& + p[((2,4),5), N-1{,}111] + p[((2,4),5), N,110] + p[((2,4),5), N,111]
\end{aligned} \tag{84}$$

Επίσης ο όρος $\Pr[\mathrm{Case}\,4]$ γράφεται ως εξής:

$$\Pr[Case\,4] = \sum_{\substack{\alpha_1\in\{0,1\} \\ \alpha_3\in\{0,1\}}} p[((2,4),5); N-2, \alpha_1, 0, \alpha_3] \tag{85}$$

Ο παρονομαστής $\Pr[\alpha_{\mathrm{d}}[(3,4),\mathrm{t}] = 0 \text{ και } \mathrm{n}[(3,4),\mathrm{t}\text{-}1] > 0]$, λόγω του ότι ισχύει η ΠΡΟΤΑΣΗ 2 της ενότητας 3.13.2 αναλύεται ως εξής

$$r_d(3,4)\cdot \Pr[\alpha_d[(3,4),t]=0\ \kappa\alpha\iota\ n[(3,4),t-1]>0]=$$
$$p_d(3,4)\cdot \underbrace{\Pr[\alpha_d[(3,4),t]=1\ \kappa\alpha\iota\ n[(3,4),t-1]>0]}_{PR(3,4)}\Rightarrow$$
$$\Pr[\alpha_d[(3,4),t]=0\ \kappa\alpha\iota\ n[(3,4),t-1]>0]=\frac{p_d(3,4)\cdot PR(3,4)}{r_d(3,4)} \quad (86)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (84),(85) και (86) στη σχέση (83):

$$\Pr[V/V\cup W\cup Z]=$$
$$=1-\frac{\Pr[\{Case2\cup Case3\}]+\Pr[Case4]}{\Pr[\alpha_d[(3,4),t]=0\ \kappa\alpha\iota\ n[(3,4),t-1]>0]}=$$

$$=1-\frac{p[((2,4),5),N-1,111]+p[((2,4),5),N,110]+p[((2,4),5),N,111]}{p_d(3,4)\cdot PR(3,4)}r_d(3,4)-$$
$$\frac{p[((2,4),5),N-1,010]+p[((2,4),5),N-1,011]+p[((2,4),5),N-1,110]}{p_d(3,4)\cdot PR(3,4)}r_d(3,4)-$$
$$\frac{\sum_{\substack{\alpha_1\in\{0,1\}\\ \alpha_3\in\{0,1\}}}p[((2,4),5),N-2,\alpha_1,0,\alpha_3]}{p_d(3,4)\cdot PR(3,4)}r_d(3,4) \quad (87)$$

Υπολογισμός του όρου $\Pr[Z/V\cup W\cup Z]$:

$$\Pr[Z/V\cup W\cup Z]=\Pr[\alpha_4(t)=0\ \text{και}\ n[((2,4),5),t-1]=N-2\ \kappa\alpha\iota\ n[(3,4),t-1]>0/$$
$$\alpha_d[(3,4),t]=0\ \kappa\alpha\iota\ n[(3,4),t-1]>0]= \quad (88)$$
$$=\frac{\Pr[\alpha_4(t)=0\ \text{και}\ n[((2,4),5),t-1]=N-2\ \kappa\alpha\iota\ n[(3,4),t-1]>0]}{\Pr[\alpha_d[(3,4),t]=0\ \kappa\alpha\iota\ n[(3,4),t-1]>0]]}$$

Ο παρονομαστής $\Pr[\alpha_d[(3,4),t]=0\ \text{και}\ n[(3,4),t-1]>0]$, λόγω του ότι ισχύει η ΠΡΟΤΑΣΗ 2 της ενότητας 3.13.2 αναλύεται ως εξής

$$r_d(3,4)\cdot \Pr[\alpha_d[(3,4),t]=0\ \kappa\alpha\iota\ n[(3,4),t-1]>0]=$$
$$p_d(3,4)\cdot \underbrace{\Pr[\alpha_d[(3,4),t]=1\ \kappa\alpha\iota\ n[(3,4),t-1]>0]}_{PR(3,4)}\Rightarrow$$
$$\Pr[\alpha_d[(3,4),t]=0\ \kappa\alpha\iota\ n[(3,4),t-1]>0]=\frac{p_d(3,4)\cdot PR(3,4)}{r_d(3,4)}$$

Ο αριθμητής δεν χρειάζεται να υπολογιστεί διότι απαλείφεται από το γινόμενο $\Pr[U/Z]\cdot\Pr[Z/V\cup W\cup Z]$ και συγκεκριμένα από τον όρο $\frac{1}{\Pr[\alpha_1\cup\alpha_2\cup\alpha_3\cup\alpha_4]}$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (73),(74),(75), (82), (87) και (88) στην σχέση (72) και κάνοντας αρκετές αλγεβρικές πράξεις:

$$r_d(3,4) = r_4 \cdot G + r_d((2,4),5)\left(1 - r_{u_1}((2,4),5)\right) \cdot J + S \cdot V \tag{89}$$

όπου

$$G = 1 - \frac{(A_1 + A_2) \cdot r_d(3,4)}{p_d(3,4) \cdot PR(3,4)},$$

$$A_1 = p\left[((2,4),5); N-1,010\right] + p\left[((2,4),5); N-1,011\right] + p\left[((2,4),5); N-1,110\right] + \\ + p\left[((2,4),5); N-1,111\right] + p\left[((2,4),5); N,110\right] + p\left[((2,4),5); N,111\right],$$

$$A_2 = \sum_{\substack{\alpha_1 \in \{0,1\} \\ \alpha_3 \in \{0,1\}}} p\left[((2,4),5); N-2, \alpha_1, 0, \alpha_3\right]$$

$$J = \frac{p[N-1,0,1,0] + p[N-1,0,1,1] + p[N-1,1,1,0] + p[N-1,1,1,1]}{p_d(3,4) \cdot PR(3,4)} r_d(3,4)$$

$S = B_1 \cdot C_1 + B_2 \cdot C_2 + B_3 \cdot C_3 + B_4 \cdot C_4$, όπου

$B_1 = r_4\left(1 - r_{u_1}((2,4),5)\right) \cdot r_d((2,4),5)$, $C_1 = p\left[((2,4),5), N-2,000\right]$

$B_2 = r_4 \cdot p_{u_1}((2,4),5) \cdot r_d((2,4),5)$, $C_2 = p\left[((2,4),5), N-2,100\right]$

$B_3 = r_4\left(1 - r_{u_1}((2,4),5)\right) \cdot \left(1 - p_d((2,4),5)\right)$, $C_3 = p\left[((2,4),5), N-2,001\right]$

$B_4 = r_4 \cdot p_{u_1}((2,4),5) \cdot \left(1 - p_d((2,4),5)\right)$, $C_4 = p\left[((2,4),5), N-2,101\right]$

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{r_d}(3,4)}{\mathrm{p_d}(3,4) \cdot \mathrm{PR}(3,4)}$$

Ύστερα από πολλές αλγεβρικές πράξεις και λαμβάνοντας υπόψη ότι PR(3,4)=PR((2,4),5)-PR(1,2), η τελική μορφή της εξίσωσης για τον υπολογισμό της πιθανότητας επιδιόρθωσης $\mathrm{r_d}(3,4)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $\mathrm{M_d}(3,4)$ παίρνει την εξής μορφή:

$$r_d(3,4) = r_4 + \frac{r_d(3,4)}{p_d(3,4)} K_6 \tag{90}$$

όπου

$K_6 = M_1 - M_2 + M_3$, και

$$M_1 = \frac{r_d((2,4),5)\left(1 - r_{u_1}((2,4),5)\right) \cdot \sum_{\substack{\alpha_1 \in \{0,1\} \\ \alpha_3 \in \{0,1\}}} p\left[((2,4),5); N-1, \alpha_1, 1, \alpha_3\right]}{PR((2,4),5) - PR(1,2)}$$

$$M_2 = r_4 \frac{\left(\sum_{\substack{\alpha_1 \in \{0,1\} \\ \alpha_3 \in \{0,1\}}} p[((2,4),5); N-1, \alpha_1, 1, \alpha_3] + \sum_{\substack{\alpha_1 \in \{0,1\} \\ \alpha_3 \in \{0,1\}}} p[((2,4),5); N-2, \alpha_1, 0, \alpha_3] + p[N,1,1,0] + p[N,1,1,1] \right)}{PR((2,4),5) - PR(1,2)}$$

$$M_3 = \frac{S}{PR((2,4),5) - PR(1,2)}$$

3.14 Ταυτόχρονη επίλυση του συστήματος των εξισώσεων της αποσύνθεσης

Οι εξισώσεις που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως έχουν από τον αλγόριθμο της μεθόδου της αποσύνθεσης διότι κάθε εξίσωση περιέχει και τις δυο παραμέτρους-μεταβλητές της αντίστοιχης ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής. Η επίλυση των εξισώσεων αυτών γίνεται με ένα συγκεκριμένο τρόπο ο οποίος προτάθηκε (για τη κλασική μέθοδο της αποσύνθεσης) από τον Burman (1995). Ο ίδιος απέδειξε ότι οι εξισώσεις που προκύπτουν με το συγκεκριμένο τρόπο επίλυσης οδηγούν σε ταχύτερη και αποτελεσματικότερη σύγκλιση του αλγόριθμου της μεθόδου της αποσύνθεσης.

Συνοψίζοντας όλες τις εξισώσεις που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες για την εύρεση των παραμέτρων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(5,6)$, $M_d(1,2)$ και $M_d(3,4)$:

Για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,6)$ οι παράμετροι $r_u(5,6)$ $\kappa\alpha\iota$ $p_u(5,6)$ μπορούν να βρεθούν λύνοντας ταυτόχρονα τις εξισώσεις

$$\frac{r_u(5,6) + p_u(5,6)}{r_u(5,6)} = \frac{1}{e_u(5,6)} = K_1 \tag{91}$$

$$r_u(5,6) = r_5 + \frac{r_u(5,6)}{p_u(5,6)} \cdot K_4 \tag{92}$$

Επιλύνοντας ταυτόχρονα τις δυο αυτές εξισώσεις με τον τρόπο που προτείνεται από τον Burman (1995):

$$r_u(5,6) = \frac{(K_1 - 1) \cdot r_i + K_4}{K_1 - 1} \tag{93}$$

$$p_u(5,6) = (K_1 - 1) \cdot r_5 + K_4 \tag{94}$$

Για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(1,2)$ οι παράμετροι $r_d(1,2)$ $\kappa\alpha\iota$ $p_d(1,2)$ μπορούν να βρεθούν λύνοντας ταυτόχρονα τις εξισώσεις:

$$r_d(1,2) = r_2 + \frac{r_d(1,2)}{p_d(1,2)} \cdot K_5 \tag{95}$$

$$\frac{r_d(1,2) + p_d(1,2)}{r_d(1,2)} = \frac{1}{e_d(1,2)} = K_2 \tag{96}$$

Επιλύνοντας ταυτόχρονα τις δυο αυτές εξισώσεις με τον τρόπο που προτείνεται από τον Burman (1995):

$$r_d(1,2) = \frac{r_2(K_2 - 1) + K_5}{K_2 - 1} \tag{97}$$

$$p_d(1,2) = (K_2 - 1)r_2 + K_5 \tag{98}$$

Για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(3,4)$ οι παράμετροι $r_d(3,4)\ και\ p_d(3,4)$ μπορούν να βρεθούν λύνοντας ταυτόχρονα τις εξισώσεις:

$$\frac{r_d(3,4) + p_d(3,4)}{r_d(3,4)} = \frac{1}{e_d(3,4)} = K_3 \tag{99}$$

$$r_d(3,4) = r_4 + \frac{r_d(3,4)}{p_d(3,4)} K_6 \tag{100}$$

Επιλύνοντας ταυτόχρονα τις δυο αυτές εξισώσεις με τον τρόπο που προτείνεται από τον Burman (1995) βρίσκουμε ότι

$$r_d(3,4) = \frac{r_4(K_3 - 1) + K_6}{K_3 - 1} \tag{101}$$

$$p_d(3,4) = (K_3 - 1)r_4 + K_6 \tag{102}$$

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζεται ο αλγόριθμος που χρησιμοποιεί τις εξισώσεις (93),(94),(97),(98),(101) και (102) για τον υπολογισμό των μέτρων απόδοσης συστημάτων με εργασίες συγχώνευσης σαν και αυτή του σχήματος 14.

3.15 Ο Αλγόριθμος της αποσύνθεσης

Για τον υπολογισμό των μέτρων απόδοσης μεγαλύτερων συστημάτων με εργασίες συγχώνευσης σαν και αυτή του σχήματος 14 χρησιμοποιείται ο ακόλουθος αλγόριθμος ο οποίος αποτελείται από έξη (6) βήματα.

Βήμα 1^{ο} : Προσδιορισμός της σειράς υπολογισμού των παραμέτρων

Στο βήμα αυτό καθορίζονται δυο σύνολα που περιέχουν όλες τις ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές που εμπλέκονται στην εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης. Τα σύνολα αυτά περιέχουν τη σειρά με την οποία υπολογίζονται οι παράμετροι των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών και είναι όμοια με τα σύνολα που ορίστηκαν από τον Helber (1999) για την ανάλυση γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης που μοντελοποιούνται από το σύστημα του σχήματος 15.
Με SEQ{U}, SEQ{D} συμβολίζουμε την σειρά με την οποία υπολογίζονται οι παράμετροι των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών, αντίστοιχα. Σε κάθε αποθηκευτικό χώρο της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής παραγωγής αντιστοιχίζεται ένας δείκτης ο οποίος εκφράζει τη σειρά με την οποία επισκέπτονται τους αποθηκευτικούς χώρους τα προϊόντα όταν κινούνται μέσα στο σύστημα.
Το σύνολο SEQ{U} κατασκευάζεται τοποθετώντας πρώτα όλες τις ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές M_{u2} (δεύτερης προτεραιότητας), σύμφωνα με την αύξουσα σειρά του δείκτη του αποθηκευτικού χώρου του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος στο οποίο ανήκουν. Οι υπόλοιπες upstream ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές τοποθετούνται στο σύνολο SEQ{U} σύμφωνα και πάλι με την αύξουσα σειρά του δείκτη του αποθηκευτικού χώρου του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος στο οποίο ανήκουν. Το σύνολο SEQ{D} κατασκευάζεται αντιστρέφοντας τη σειρά των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών στο σύνολο SEQ{U} και αντικαθιστώντας τις upstream με τις downstream ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές.

Βήμα 2^{ο} Οριακές Συνθήκες

Εάν η μηχανή M_i είναι μηχανή εισόδου (δηλαδή μηχανή χωρίς προηγούμενο αποθηκευτικό χώρο) για το ΄΄πραγματικό΄΄ σύστημα, τότε οι παράμετροι της ΄΄εικονικής΄΄ upstream μηχανής στο αντίστοιχο ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα είναι ίσες με τις παραμέτρους της μηχανής M_i., δηλαδή

$$p_u(i,j) = p_i$$
$$r_u(i,j) = r_i$$

Ομοίως αν η μηχανή M_k είναι μηχανή εξόδου (δηλαδή δεν υπάρχει κανένας αποθηκευτικός χώρος μετά τη μηχανή M_k) τότε οι παράμετροι της ΄΄εικονικής΄΄ downstream μηχανής στο αντίστοιχο ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα είναι ίσες με τις παραμέτρους της μηχανής M_k., δηλαδή

$$p_d(i,j) = p_k$$
$$r_d(i,j) = r_k$$

Βήμα 3^{ο} : Αρχικοποίηση των παραμέτρων όλων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών

Οι αρχικές τιμές με τις οποίες ξεκινά ο αλγόριθμος της αποσύνθεσης καθορίζονται σ' αυτό το βήμα. Οι παράμετροι (πιθανότητες εμφάνισης βλαβών και επιδιόρθωσης) όλων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών θέτονται αρχικά να είναι ίσες με τις αντίστοιχες πιθανότητες των αντίστοιχων μηχανών της πραγματικής γραμμής παραγωγής. Επειδή στην τροποποιημένη μέθοδο της αποσύνθεσης υπάρχουν δύο τύποι δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης, δυο περιπτώσεις πρέπει να εξετασθούν.

Περίπτωση 1η : *Δομικά στοιχεία της μεθόδου της αποσύνθεσης με δυο μηχανές και έναν αποθηκευτικό χώρο*

- Οι παράμετροι κάθε ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_u(j,k)$ σε κάθε υποσύστημα $L(j,k)$ με δυο μηχανές και έναν ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο αρχικοποιούνται ως εξής: $p_u(j,k) = p_j$, $r_u(j,k) = r_j$.
- Οι παράμετροι κάθε ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(j,k)$ σε κάθε υποσύστημα $L(j,k)$ με δυο μηχανές και έναν ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο αρχικοποιούνται ως εξής: $p_d(j,k) = p_k$, $r_d(j,k) = r_k$.

Περίπτωση 2η : Δομικά στοιχεία της μεθόδου της αποσύνθεσης με τρεις μηχανές και έναν αποθηκευτικό χώρο

- Οι παράμετροι των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_{u1}((j,k),m)$ και $M_{u2}((j,k),m)$ κάθε υποσυστήματος με τρεις μηχανές και έναν ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο, αρχικοποιούνται ως $p_{u1}((j,k),m) = p_j$, $r_{u1}((j,k),m) = r_j$ και $p_{u2}((j,k),m) = p_k$, $r_{u2}((j,k),m) = r_k$, αντίστοιχα.

- Οι παράμετροι της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d((j,k),m)$ κάθε υποσυστήματος $L((j,k),m)$ με τρεις μηχανές και έναν ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο, αρχικοποιούνται ως εξής: $r_d((j,k),m) = r_m$, $p_d((j,k),m) = p_m$.

Βήμα 4ο : Υπολογισμός των παραμέτρων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών του συνόλου SEQ{U}

Για κάθε ΄΄εικονική΄΄ μηχανή που ανήκει στο σύνολο SEQ{U} (εκτός των μηχανών εκείνων που αντιστοιχούν σε μηχανές εισόδου της πραγματικής γραμμής) εκτελούνται οι παρακάτω υπολογισμοί:

(1) Αν στον αμέσως προηγούμενο αποθηκευτικό χώρο από την υπό εξέταση ΄΄εικονική΄΄ μηχανή δεν εκτελούνται εργασίες συγχώνευσης, τότε οι παράμετροι (πιθανότητες εμφάνισης βλαβών και επιδιόρθωσης) υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις κλασσικές εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης που παρουσιάζονται από τον Gershwin (1994).

(2) Αν στον αμέσως προηγούμενο αποθηκευτικό χώρο από την υπό εξέταση ΄΄εικονική΄΄ μηχανή εκτελούνται εργασίες συγχώνευσης, τότε οι παράμετροι (πιθανότητες εμφάνισης βλαβών και επιδιόρθωσης) υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (94) και (93), αντίστοιχα της τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης.

(3) Υπολογισμός των μέτρων απόδοσης και των στάσιμων πιθανοτήτων των ΄΄εικονικών΄΄ εμπλεκόμενων υποσυστημάτων χρησιμοποιώντας τις πιο πρόσφατα υπολογισμένες τιμές των παραμέτρων τους. Αν τα υποσυστήματα αυτά αποτελούνται από δυο μηχανές και ένα αποθηκευτικό χώρο, τότε χρησιμοποιείται η μέθοδος που περιγράφεται από τον Gershwin (1994), ενώ αν το υποσύστημα αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα αποθηκευτικό χώρο χρησιμοποιείται η μέθοδος που περιγράφηκε στο κεφάλαιο αυτό.

Βήμα 5^{ο} : Υπολογισμός των παραμέτρων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών του συνόλου SEQ{D}

Για κάθε ΄΄εικονική΄΄ μηχανή που ανήκει στο σύνολο SEQ{D} (εκτός των μηχανών εκείνων που αντιστοιχούν σε μηχανές εξόδου της πραγματικής γραμμής) εκτελούνται οι παρακάτω υπολογισμοί:

(1) Αν στον αμέσως επόμενο (downtream) αποθηκευτικό χώρο από την υπό εξέταση ΄΄εικονική΄΄ μηχανή δεν εκτελούνται εργασίες συγχώνευσης, τότε οι παράμετροι (πιθανότητες εμφάνισης βλαβών και επιδιόρθωσης) υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις κλασσικές εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης που παρουσιάζονται από τον Gershwin (1994).

(2) Αν στον αμέσως επόμενο (downtream) αποθηκευτικό χώρο από την υπό εξέταση ΄΄εικονική΄΄ μηχανή εκτελούνται εργασίες συγχώνευσης, τότε οι παράμετροι (πιθανότητες εμφάνισης βλαβών και επιδιόρθωσης) υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (98),(102), (97) και (101), αντίστοιχα της τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης.

(3) Υπολογισμός των μέτρων απόδοσης και των στάσιμων πιθανοτήτων των ΄΄εικονικών΄΄ εμπλεκόμενων υποσυστημάτων χρησιμοποιώντας τις πιο πρόσφατα υπολογισμένες τιμές των παραμέτρων τους. Αν τα υποσυστήματα αυτά αποτελούνται από δυο μηχανές και έναν αποθηκευτικό χώρο, τότε χρησιμοποιείται η μέθοδος που περιγράφεται από τον Gershwin (1994), ενώ αν το υποσύστημα αποτελείται από τρεις μηχανές και έναν αποθηκευτικό χώρο χρησιμοποιείται η μέθοδος που περιγράφηκε στο κεφάλαιο αυτό.

Βήμα 6^{ο}: Συνθήκη τερματισμού του αλγόριθμου

Εκτέλεσε τα βήματα 4 και 5 εναλλάξ, μέχρις ότου ικανοποιηθούν* οι εξισώσεις διατήρησης της ροής (*conservation of flow equations)*.

* Στην πράξη η ικανοποίηση των εξισώσεων διατήρησης της ροής γίνεται προσεγγιστικά. Αυτό σημαίνει ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποδόσεων δυο οποιονδήποτε ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων, πρέπει να είναι μικρότερη από ένα προκαθορισμένο μικρό θετικό αριθμό ε=0.00001.

Ένα άλλο κριτήριο τερματισμού που συνήθως χρησιμοποιείται (Gershwin 1994), είναι εκείνο που τερματίζει τον αλγόριθμο όταν η απόλυτη τιμή της μεταβολής των τιμών των παραμέτρων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών, p_u, r_u, p_d ,r_d από την μια επανάληψη στην επόμενη είναι μικρότερη ενός προκαθορισμένου θετικού αριθμού.

3.16 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Ο αλγόριθμος της αποσύνθεσης της παραγράφου 3.15 εφαρμόστηκε σε σημαντικό αριθμό γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης με σκοπό τον υπολογισμό της απόδοσής τους. Για λόγους σύγκρισης κάθε υπό εξέταση γραμμή παραγωγής προσομοιώθηκε χρησιμοποιώντας το λογισμικό πακέτο προσομοίωσης ARENA 3.0.
Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης και αυτών που προκύπτουν από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου της μεθόδου της αποσύνθεσης προκύπτουν δυο βασικές παρατηρήσεις.

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι η επί τοις εκατό απόκλιση της εκτίμησης της απόδοσης με τη μέθοδο της αποσύνθεσης σε σύγκριση με την εκτίμηση της απόδοσης που προκύπτει από τη προσομοίωση των αντίστοιχων γραμμών παραγωγής, είναι αρκετά μεγάλη και σε πάρα πολλές περιπτώσεις ξεπερνά το 10%.
Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι για πολλές περιπτώσεις γραμμών παραγωγής ο αλγόριθμος της μεθόδου της αποσύνθεσης δεν συνέκλινε με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατός ο υπολογισμός της απόδοσής τους.
Οι περιπτώσεις στις οποίες δεν υπήρχε σύγκλιση του αλγόριθμου της μεθόδου της αποσύνθεσης ήταν εκείνες όπου οι παράμετροι των μηχανών της γραμμής παραγωγής ήταν τέτοιες ώστε ο αποθηκευτικός χώρος που βρίσκεται πριν την μηχανή που συνέβαιναν οι εργασίες συγχώνευσης ήταν το μεγαλύτερο μέρος του χρόνου γεμάτος.
Όταν οι παράμετροι των μηχανών της γραμμής παραγωγής ήταν τέτοιες ώστε ο αποθηκευτικός χώρος που βρίσκεται πριν την μηχανή που συνέβαιναν οι εργασίες συγχώνευσης ήταν το μεγαλύτερο μέρος του χρόνου άδειος τότε ο αλγόριθμος συνέκλινε αλλά και πάλι τα αποτελέσματα δεν ήταν ικανοποιητικά.
Η διαπίστωση αυτή σχετικά με τις περιπτώσεις μη σύγκλισης του αλγόριθμου της μεθόδου της αποσύνθεσης ταυτίζεται πλήρως με τη διαπίστωση των Helber και Jusic (2002) όπου περιγράφονται οι περιπτώσεις στις οποίες ο αλγόριθμος της μεθόδου της αποσύνθεσης που παρουσιάστηκε από τον Helber (1999) δεν συνέκλινε.

3.17 Συμπεράσματα και περαιτέρω έρευνα

Στο κεφάλαιο αυτό ασχοληθήκαμε με την ανάλυση συστημάτων σαν και αυτό του σχήματος 14 στα οποία γίνονται εργασίες συγχώνευσης οι οποίες μοντελοποιούνται χρησιμοποιώντας το σύστημα του σχήματος 5. Η ανάλυση των συστημάτων αυτών γίνεται τροποποιώντας την ευρέως διαδεδομένη μέθοδο της αποσύνθεσης η οποία αρχικά δημιουργήθηκε για να εφαρμοστεί σε σειριακά συστήματα στα οποία η ροή των προϊόντων είναι γραμμική.

Η μέθοδος της αποσύνθεσης τροποποιήθηκε χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα δυο διαφορετικούς τύπους δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης. Ο ένας τύπος είναι το κλασσικό δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης σαν και αυτό του σχήματος 4 που αποτελείται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο και χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση του τμήματος του συστήματος στο οποίο δεν γίνονται εργασίες συγχώνευσης. Ο δεύτερος τύπος δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο και παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 5. Αυτό το δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση του τμήματος του συστήματος στο οποίο γίνονται εργασίες συγχώνευσης.

Ένα όμοιο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης με αυτό του σχήματος 5 που αναλύεται στο κεφάλαιο αυτό, αναλύθηκε από τους Helber και Mehrtens (1999). Το σύστημα του σχήματος 5 που αναλύεται στο κεφάλαιο αυτό μπορεί γραφικά να είναι όμοιο με αυτό των Helber και Mehrtens (1999), ωστόσο υπάρχουν αρκετές διαφορές ως προς τα χαρακτηριστικά των δυο αυτών συστημάτων.
Στο σύστημα των Helber και Mehrtens (1999), οι μηχανές έχουν ξεχωριστούς η κάθε μια σταθερούς χρόνους εξυπηρέτησης, τα προϊόντα είναι συνεχούς τύπου και οι χρόνοι εμφάνισης βλαβών και επιδιόρθωσης ακολουθούν εκθετική κατανομή.

Στο σύστημα που εξετάζεται στο κεφάλαιο αυτό οι μηχανές έχουν ίσους και σταθερούς χρόνους εξυπηρέτησης, τα προϊόντα είναι διακριτού τύπου και οι χρόνοι εμφάνισης βλαβών και επιδιόρθωσης ακολουθούν γεωμετρική κατανομή.

Η συνεισφορά της εργασίας σχετικά με το θέμα που εξετάζεται στο κεφάλαιο αυτό είναι η ανάλυση γραμμών παραγωγής στις οποίες γίνονται εργασίες συγχώνευσης που μοντελοποιούνται χρησιμοποιώντας το σύστημα του σχήματος 5, επεκτείνοντας τη μέθοδο της αποσύνθεσης που αρχικά δημιουργήθηκε για την ανάλυση σειριακών γραμμών παραγωγής. Η ανάλυση αυτή γίνεται σε δυο φάσεις:

Στη πρώτη φάση αναλύθηκε ο νέος τύπος δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης του σχήματος 5, χρησιμοποιώντας Μαρκοβιανή Αλυσίδα. Δημιουργήθηκαν αναλυτικά όλες οι εξισώσεις μετάβασης του συστήματος για οποιαδήποτε τιμή N της χωρητικότητας του συστήματος που περιγράφουν τη πιθανότητα μετάβασης του συστήματος από μια κατάσταση σε μια άλλη. Στη συνέχεια κατασκευάστηκε ένας αλγόριθμος ο οποίος γεννά τον πίνακα μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή N της χωρητικότητας του συστήματος και ο αλγόριθμος αυτός προγραμματίστηκε στη γλώσσα προγραμματισμού C++.
Η επίλυση των εξισώσεων που προέκυψαν από την εφαρμογή του αλγόριθμου με σκοπό τον υπολογισμό της απόδοσης του συστήματος αυτού έγινε με χρήση της μεθόδου απαλοιφής του Gauss.
Για λόγους σύγκρισης ένα μοντέλο προσομοίωσης δημιουργήθηκε με το πακέτο προσομοίωσης ARENA 3.0. Τα αποτελέσματα συγκρινόμενα με αυτά της προσομοίωσης, πιστοποιούν ότι ο προτεινόμενος αλγόριθμος για τον υπολογισμό της απόδοσης του συστήματος του σχήματος 5 εκτιμά την απόδοση του βιομηχανικού συστήματος με μεγάλη ακρίβεια.

Στη δεύτερη φάση, μετά τον υπολογισμό της απόδοσης του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης του σχήματος 5, δημιουργήθηκαν οι εξισώσεις της τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης οι οποίες ενσωματώνουν το νέο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης. Οι εξισώσεις αυτές είναι πολύ διαφορετικές από τις εξισώσεις της κλασικής μεθόδου της αποσύνθεσης που παρουσιάσθηκαν από τον Gershwin (1987) διότι πρέπει έλαβαν υπόψη τις εργασίες συγχώνευσης που λαμβάνουν χώρα στο σύστημα.
Μετά τη δημιουργία των εξισώσεων της τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης κατασκευάστηκε ο αλγόριθμος της αποσύνθεσης ο οποίος χρησιμοποιείται για την ταυτόχρονη επίλυση όλων των εξισώσεων αυτών.

Πιθανές περιοχές περαιτέρω έρευνας είναι οι εξής :

- Επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης τροποποιώντας τις εξισώσεις και τον αλγόριθμο της αποσύνθεσης που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό για συστήματα στα οποία οι χρόνοι εξυπηρέτησης των μηχανών δεν θα είναι σταθεροί αλλά στοχαστικοί.

- Ανάλυση με χρήση της μεθόδου της αποσύνθεσης συστημάτων στα οποία γίνονται εκτός από εργασίες συγχώνευσης και εργασίες διάσπασης.

- Ανάλυση με χρήση της μεθόδου της αποσύνθεσης συστημάτων στα οποία κάθε σταθμός εργασίας αποτελείται από παράλληλες μηχανές εξυπηρέτησης και επίσης υπάρχουν εργασίες συγχώνευσης ή διάσπασης.

- Ανάλυση με χρήση της μεθόδου της αποσύνθεσης συστημάτων σαν και αυτό του σχήματος 14 με εργασίες συγχώνευσης και δυνατότητα παραγωγής δυο διαφορετικού τύπου προϊόντων.

Το τελευταίο μοντέλο που προτείνεται σαν περιοχή για περαιτέρω έρευνα εξετάζεται διεξοδικά στο επόμενο κεφάλαιο.

Βιβλιογραφία

[1] Burman, Mitchell H. (1995), "*New Results in Flow Line Analysis"*, Ph.D. Thesis, Operations Research Center, Massachusetts Institute of Technology, USA.

[2] Cheah, Jen.Yeng and J.MacGregor, Smith. (1994), "Generalized M/G/C/C state dependent queueing models and pedestrian traffic flows", *Queueing Systems*, 15, pp. 365—386.

[3] Dallery, Y., David, R. and Xie, X. (1988), "An efficient algorithm for the analysis of transfer lines with unreliable machines and finite buffers", *IIE Transactions,* 20(3), pp. 280–283.

[4] Dallery, Y., and Gershwin, S.B. (1992), "Manufacturing flow line systems: A review of models and analytical results", *Queueing Systems Theory and Applications*, 12, pp. 3–94: Special issue on queuing models of manufacturing systems.

[5] Diamantidis, A.C., Papadopoulos, C.T., and Vidalis, M.I., (2004), "Exact analysis of a discrete material three station one buffer merge system with unreliable machines", *International Journal of Production Research,*42(4), pp. 651—675.

[6] Di Mascolo, M., David, R., and Dallery, Y., (1991), "Modeling and Analysis of assembly systemswith unreliable machines and finite buffers", *IIE Transactions*, 23(4), pp. 315–331.

[7] Gershwin, S.B. (1987), "An efficient decomposition algorithm for the approximate evaluation of tandem queues with finite storage space and blocking", *Operations Research,* 35, pp. 291–305.

[8] Gershwin S. B., (1991), "Assembly/disassembly systems: An efficient decomposition Algorithm for tree structured networks", *IIE Transactions,* 23(4), pp. 302–314.

[9] Gershwin, S.B. (1994) *Manufacturing Systems Engineering,* Englewood Cliffs, Prentice Hall.

[10] Gershwin, S.B., Maggio, N., Matta, A., Tolio, T. and Werner, L. (2001), *"*Analysis of Loop Networks by decomposition", Proceedings of the Third Aegean International Conference on Analysis and Modeling of Manufacturing Systems, May 19-22, Tinos Island, Greece, pp. 239–248.

[11] Gosavi, Hemant. D. and J.MacGregor, Smith. (1995), "Asymptotic bounds of throughput in series-parallel queueing networks", *Computers Ops Res.,* Vol 22, No 10, pp. 1057--1073.

[12] Helber, S., (1998), "Decomposition of unreliable assembly/disassembly networks with limited buffer capacity and random processing times", *European Journal of Operational Research*, 109, 24–42.

[13] Helber, S. (1999), *Performance Analysis of Flow-Lines with Nonlinear Flow of Material*, Volume 473 of Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag.

[14] Helber, S. and Mehrtens, N. (1999), "Exact analysis of a continuous material merge system with limited buffer capacity and three stations", Technical Report, D-38678, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

[15] Helber, S. and Jusic, H. (2002), "A new decomposition approach for non-cyclic continuous material flow lines with a merging flow of material", Technical Report, Clausthal-Zellerfeld, Germany

[16] Hillier, F.S. and Boling, R.W. (1967), "Finite queues in series, with exponential or Erlang service times -- a numerical approach", *Operations Research*, 15, pp. 286—303.

[17] Jain, Sushant and J.MacGregor, Smith. (1994), "Open finite queueing networks with M/M/C/K parallel servers", *Computers Ops Res.,* Vol 21, No 3, pp. 297—317.

[18] Kerbache, L. and Smith, J.M. (1987), "The Generalized expansion method for open finite queueing networks", *European Journal of Operational Research,* 32, 448–461.

[19] Lim, J.-T., Meerkov, S.M. and Top, F. (1990), "Homogeneous, asymptotically reliable serial production lines: Theory and a case study'', *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 5, pp. 525—533.

[20] Papadopoulos, H.T., Heavey, C. and O'Kelly, M.E.J. (1989), "The throughput rate of multistation reliable production lines with interstation buffers: (I) Exponential case '', *Computers in Industry,* 13, pp. 229–244.

[21] Papadopoulos, H. T., Heavey, C., and Browne, J., (1993), *Queueing Theory in Manufacturing Systems Analysis and Design*. (Chapman & Hall, London).

[22] Papadopoulos, H. T., and O'Kelly, M. E. J., (1989), "A Recursive algorithm for generating the transition matrices of multistation series production lines", *Computers in Industry,* 12, pp. 227–240

[23] Perros, G. Harry (1994), *Queueing Networks with Blocking – Exact and Approximate Solutions*, Oxford University Press, New York.

[24] Tan, B. (2001), "A three station merge system with unreliable stations and a shared buffer", *Mathematical and Computer Modelling*, 33, pp.1011–1026.

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΗ:
Από το θέμα που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό προέκυψε μια δημοσίευση στο διεθνές επιστημονικό περιοδικό με κριτές *International Journal of Production Research*

Το άρθρο που δημοσιεύτηκε είναι το εξής

Diamantidis, A.C., Papadopoulos, C.T., and Vidalis, M.I., (2004) "Exact analysis of a discrete material three station one buffer merge system with unreliable machines", *International Journal of Production Research,*42(4), pp. 651—675.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΣΥΓΧΩΝΕΥΣΗΣ (MERGE OPERATIONS) ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΥΟ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΤΥΠΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η ανάλυση γραμμών παραγωγής στις οποίες εμφανίζονται εργασίες συγχώνευσης (merge operations) και υπάρχει η δυνατότητα παραγωγής δυο διαφορετικών τύπων προϊόντων. Μια ακόμη υπόθεση είναι ότι τα προϊόντα που παράγονται είναι διακριτού τύπου. Ένα βασικό ερώτημα που προκύπτει κατά την ανάλυση συστημάτων με δυνατότητα παραγωγής περισσοτέρων του ενός τύπου προϊόντων, είναι ο τρόπος με το οποίο καθορίζεται η διαφορετικότητα κάθε τύπου προϊόντος. Δηλαδή ποια είναι τα βασικά χαρακτηριστικά που διαφοροποιούν το ένα προϊόν σε σχέση με το άλλο έτσι ώστε να λέμε ότι είναι διαφορετικού τύπου. Δυο από τα πιο βασικά χαρακτηριστικά που διαφοροποιούν τα προϊόντα μεταξύ τους κάνοντάς τα να ανήκουν σε διαφορετικούς τύπους είναι το μέγεθος και ο χρόνος επεξεργασίας τους από τις μηχανές του συστήματος. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με γραμμές παραγωγής στις οποίες δυο προϊόντα λέμε ότι είναι διαφορετικού τύπου όταν έχουν διαφορετικό μέγεθος και κατά συνέπεια χρειάζονται διαφορετικής χωρητικότητας αποθηκευτικούς χώρους όταν παραμένουν στο σύστημα. Η ανάλυση και μοντελοποίηση των εργασιών συγχώνευσης είναι ιδιαίτερα σημαντική διότι με τη χρήση τους σε συνδυασμό με τις εργασίες διάσπασης (split operations) μπορούμε να μοντελοποιήσουμε και αναλύσουμε γραμμές παραγωγής με βρόγχους επαναπεξεργασίας (rework loops) σαν και αυτή του σχήματος 7 του κεφαλαίου 1.

Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για την ανάλυση τέτοιου είδους γραμμών παραγωγής γίνεται επεκτείνοντας τη μέθοδο της αποσύνθεσης που αρχικά αναπτύχθηκε για σειριακά συστήματα που παράγουν μόνο ενός τύπου προϊόντα.
Αρχικά επιλύεται ένα σύστημα που αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο που μοντελοποιεί τις εργασίες συγχώνευσης με δυνατότητα παραγωγής δυο διαφορετικού τύπου προϊόντων. Το σύστημα αυτό χρησιμοποιείται σαν νέο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης (decomposition block) στην ανάπτυξη της μεθόδου της αποσύνθεσης. Η επίλυση του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης γίνεται με Μαρκοβιανή ανάλυση και για το λόγο αυτό αναπτύσσεται ένας επαναληπτικός αλγόριθμος ο οποίος γεννά τον πίνακα μετάβασης του συστήματος για οποιαδήποτε τιμή της χωρητικότητας του ενδιάμεσου αποθηκευτικού χώρου. Με τη χρήση του αλγόριθμου αυτού μπορεί εύκολα να υπολογιστεί η απόδοση του συστήματος αυτού. Στη συνέχεια παρουσιάζονται όλες οι απαραίτητες εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση της απόδοσης μεγάλων γραμμών με εργασίες συγχώνευσης και δυνατότητα παραγωγής περισσότερων του ενός τύπου προϊόντων. Πιο συγκεκριμένα στην ενότητα 4.2 παρουσιάζεται μια ανασκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας στην οποία αναφέρεται πλήθος εργασιών οι οποίες ασχολήθηκαν με την επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης σε μη σειριακές γραμμές παραγωγής. Επίσης παρουσιάζεται και ο μικρός αριθμός εργασιών στις οποίες γίνονται προσπάθειες για την εκτίμηση της απόδοσης σειριακών γραμμών παραγωγής οι οποίες παράγουν περισσότερους του ενός τύπου προϊόντα. Στην ενότητα 4.3 ορίζεται το πρόβλημα το οποίο εξετάζεται στο κεφάλαιο αυτό, ενώ στην ενότητα 4.4 παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά της υπό εξέταση γραμμή παραγωγής. Στην ενότητα 4.5 περιγράφεται το πώς εφαρμόζεται η μέθοδος της μεθόδου της αποσύνθεσης για τη κατηγορία των γραμμών παραγωγής που εξετάζονται στο κεφάλαιο αυτό και περιγράφονται τα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν για τη

δημιουργία του αλγόριθμου της μεθόδου της αποσύνθεσης. Η ανάλυση του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιείται από τη μέθοδο της αποσύνθεσης παρουσιάζεται στην ενότητα 4.6, ενώ στην ενότητα 4.7 παρουσιάζονται οι εξισώσεις μετάβασης που περιγράφουν τις πιθανές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης. Στην ενότητα 4.8 παρουσιάζεται ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για την γένεση του πίνακα μετάβασης του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης, ενώ στην ενότητα 4.9 παρουσιάζονται οι μαθηματικοί τύποι με τους οποίους υπολογίζεται η απόδοση του συστήματος της ενότητας 4.6. Στην ενότητα 4.10 παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγόριθμου της ενότητας 4.8 για την εκτίμηση της απόδοσης του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης τα οποία πιστοποιούν την ορθότητα του προτεινόμενου αλγόριθμου. Στην ενότητα 4.11, παρουσιάζονται τα σύνολα των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης που πρέπει να δημιουργηθούν, ενώ στην ενότητα 4.12 παρουσιάζεται η μαθηματική μορφή όλων των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης. Στην ενότητα 4.13 παρουσιάζεται ο αλγόριθμος της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιείται για την ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων που παρουσιάζονται στην ενότητα 4.12 με σκοπό την εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης και δυνατότητα παραγωγής δυο τύπου προϊόντων. Τέλος στην ενότητα 4.14 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την ανάλυση του προβλήματος που εξετάζεται στο κεφάλαιο αυτό, ενώ παρουσιάζονται και κάποιες ερευνητικές περιοχές για περαιτέρω έρευνα.

4.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Στη διεθνή βιβλιογραφία οι γραμμές παραγωγής μοντελοποιούνται συνήθως σαν δίκτυα ουρών αναμονής. Μια από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται είναι η Μαρκοβιανή ανάλυση, η οποία δυστυχώς όμως χρησιμοποιείται για την ανάλυση μικρών συστημάτων με το πολύ μέχρι έξη σταθμούς εξυπηρέτησης διατεταγμένους σε σειρά. Χρήση Μαρκοβιανής ανάλυσης για την ανάλυση γραμμών παραγωγής με σκοπό την εκτίμηση της απόδοσής τους έχει γίνει από τους Hillier και Boling (1967), Papadopoulos, O'Kelly και Heavey (1989), Heavey, Papadopoulos και Browne, (1993), μεταξύ άλλων.

Με τη Μαρκοβιανή ανάλυση μπορεί να εκτιμηθεί με απόλυτη ακρίβεια η απόδοση μιας γραμμής παραγωγής, Δυστυχώς όμως η εφαρμογή της περιορίζεται σε μικρές γραμμές παραγωγής διότι όταν αυξάνεται ο αριθμός των μηχανών εξυπηρέτησης και η χωρητικότητα των ενδιάμεσων αποθηκευτικών χώρων, τότε αυξάνεται με πολύ μεγαλύτερο ρυθμό και ο χώρος των πιθανών καταστάσεων του συστήματος. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να δημιουργούνται τεράστια σε πλήθος συστήματα εξισώσεων η επίλυση των οποίων γίνεται αδύνατη. Εξαιτίας αυτής της αδυναμίας της μεθόδου της Μαρκοβιανής ανάλυσης πολλοί ερευνητές έστρεψαν τη προσοχή τους στην ανάπτυξη άλλων προσεγγιστικών μεθόδων οι οποίες υπολογίζουν μεν προσεγγιστικά την απόδοση μιας γραμμής αλλά είναι εφαρμόσιμες σε γραμμές παραγωγής με πολλούς σταθμούς εργασίας.

Μια τέτοια προσεγγιστική μέθοδος είναι η κλασσική μέθοδος της αποσύνθεσης (decomposition method) η οποία αναπτύχθηκε αρχικά από τον Gershwin (1987) και βελτιώθηκε από τους Dallery, David και Xie (1988). Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε αρχικά για σειριακές γραμμές παραγωγής στις οποίες η ροή των προϊόντων είναι

γραμμική. Οι Dallery, David και Xie (1988) βελτίωσαν τη σύγκλιση της μεθόδου που αρχικά προτάθηκε από τον Gershwin (1987). Η μέθοδος αυτή αποσυνθέτει μια γραμμή παραγωγής σε ΄΄εικονικά΄΄ υποσυστήματα που αποτελούνται από δυο μηχανές και ένα αποθηκευτικό χώρο τα οποία ονομάζονται δομικά στοιχεία της μεθόδου της αποσύνθεσης (ΔΣΜΑ) (decomposition blocks). Ο αριθμός των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων είναι ίδιος με τον αριθμό των αποθηκευτικών χώρων της γραμμής παραγωγής. Οι αποθηκευτικοί χώροι των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων λαμβάνονται να είναι οι ίδιοι με τους αντίστοιχους αποθηκευτικούς χώρους της γραμμής παραγωγής.
Ο στόχος της μεθόδου είναι η εύρεση των παραμέτρων των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων έτσι ώστε η ροή των προϊόντων στους αποθηκευτικούς χώρους κάθε υποσυστήματος να είναι η ίδια με τη ροή των προϊόντων στους αντίστοιχους αποθηκευτικούς χώρους της γραμμής παραγωγής. Οι παράμετροι των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων υπολογίζονται με χρήση των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης και αφού πρώτα επιλυθούν όλα τα ΄΄εικονικά΄΄ υποσυστήματα.
Η μέθοδος αυτή είναι αρκετά δημοφιλής διότι η επίλυση των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων γίνεται πολύ εύκολα και με απόλυτη ακρίβεια με χρήση Μαρκοβιανής ανάλυσης.
Οι Yeralan και Tan (1997) παρουσίασαν μια μέθοδο με χρήση πινάκων για την επίλυση συστημάτων με δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο. Οι Tan και Yeralan (1997) χρησιμοποίησαν αυτό το σύστημα σαν δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης για την ανάλυση ανομοιογενών γραμμών παραγωγής χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αποσύνθεσης.

Περιγραφές της μεθόδου της αποσύνθεσης για σειριακές γραμμές παραγωγής παρουσιάζονται επίσης και στα βιβλία των Altiok (1997) και Helber (1999). Συστήματα στα οποία η ροή των προϊόντων είναι γραμμική παρουσιάζονται επίσης στα βιβλία των Gershwin (1994) και Heavey, Papadopoulos και Browne (1993).

Η μέθοδος της αποσύνθεσης είχε τεράστια απήχηση στην επιστημονική κοινότητα με αποτέλεσμα ολοένα και περισσότεροι ερευνητές να ασχοληθούν με την προσπάθεια επέκτασής της, ώστε να είναι εφαρμόσιμη και σε άλλες κατηγορίες γραμμών παραγωγής εκτός των σειριακών για τις οποίες αρχικά αναπτύχθηκε.
Αν και ο μεγαλύτερος όγκος των εργασιών στη διεθνή βιβλιογραφία ασχολείται με την ανάλυση σειριακών γραμμών παραγωγής στις οποίες η ροή των προϊόντων είναι γραμμική, αρκετοί ερευνητές επικεντρώθηκαν στην ανάλυση συστημάτων με μη γραμμική ροή των προϊόντων. Τέτοια συστήματα είναι αυτά στα οποία παρουσιάζονται εργασίες συναρμολόγησης / αποσυναρμολόγησης (Assembly / Disassembly systems) καθώς επίσης και αυτά στα οποία παρουσιάζονται εργασίες συγχώνευσης.

Ο Gershwin (1991, 1994) επέκτεινε τη μέθοδο της αποσύνθεσης σε μη αξιόπιστα συστήματα συναρμολόγησης / αποσυναρμολόγησης (Assembly / Disassembly systems) που παρήγαγαν διακριτού τύπου προϊόντα και στα οποία οι χρόνοι εξυπηρέτησης των μηχανών ήταν σταθεροί και ίσοι με τη μονάδα. Παρουσίασε νέες εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης η επίλυση των οποίων οδηγούσε στην εκτίμηση της απόδοσης τέτοιων συστημάτων. Μια παρόμοια ανάλυση συστημάτων συναρμολόγησης / αποσυναρμολόγησης με δυνατότητα παραγωγής διακριτού τύπου προϊόντων παρουσιάστηκε από τον Helber (1998)

Οι Di Mascolo, David και Dallery (1991) ασχολήθηκαν με παρόμοια μη αξιόπιστα συστήματα συναρμολόγησης / αποσυναρμολόγησης τα οποία είχαν δυνατότητα παραγωγής προϊόντων συνεχούς τύπου. Μια περίληψη πάνω στα βιομηχανικά συστήματα και τα μοντέλα που έχουν χρησιμοποιηθεί για την ανάλυσή τους παρουσιάστηκε από τους Dallery και Gershwin (1992).
Μια επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης με σκοπό την εκτίμηση της απόδοσης κλειστών κυκλικών συστημάτων, δόθηκε από τους Gershwin, Maggio, Matta, Tolio και Werner (2001),
Μια εμπεριστατωμένη επισκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας σχετικά με την ανάλυση γραμμών συναρμολόγησης / αποσυναρμολόγησης με χρήση της μεθόδου της αποσύνθεσης παρουσιάζεται στο βιβλίο του Helber (1999).
Στο βιβλίο αυτό παρουσιάζεται επίσης και μια επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης για γραμμές στις οποίες γίνονται εργασίες συγχώνευσης (merge operations) και διάσπασης (split operations). Οι εργασίες συγχώνευσης μοντελοποιούνται με χρήση ενός συστήματος που αποτελείται από τρεις μηχανές και δυο αποθηκευτικούς χώρους σαν και αυτό που απεικονίζεται στο σχήμα 4. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των μηχανών είναι σταθεροί και ίσοι με τη μονάδα για όλες τι μηχανές ενώ οι πιθανότητες επιδιόρθωσης και εμφάνισης βλαβών ακολουθούν γεωμετρική κατανομή.
Σε ένα άλλο κεφάλαιο του ίδιου βιβλίου η μέθοδος της αποσύνθεσης επεκτείνεται σε μια ακριβώς ίδια γραμμή παραγωγής με αυτή που περιγράφηκε στη προηγούμενη παράγραφο (δηλαδή με εργασίες συγχώνευσης (merge operations) και διάσπασης (split operations)) αλλά με τη βασική διαφορά ότι κάθε μηχανή έχει το δικό της ξεχωριστό σταθερό χρόνο εξυπηρέτησης. Το γεγονός αυτό οδηγεί στη μοντελοποίηση των προϊόντων που παράγονται από το σύστημα ως συνεχούς τύπου προϊόντα και όχι διακριτού, τύπου όπως πριν. Αυτό έχει σημαντική επίπτωση στις εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης των οποίων η μορφή αλλάζει δραστικά. Το κοινό χαρακτηριστικό όλων των παραπάνω εργασιών είναι ότι οι προτεινόμενες μέθοδοι της αποσύνθεσης χρησιμοποιούν σαν δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης συστήματα με δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο.

Τα αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγόριθμου της μεθόδου της αποσύνθεσης για την εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης και διάσπασης που παρουσιάστηκαν στο βιβλίο του Helber (1999) ήταν αρκετά ικανοποιητικά, ωστόσο παρουσιάστηκαν αρκετά προβλήματα σύγκλισης του αλγόριθμου. Δηλαδή υπήρχαν αρκετές περιπτώσεις γραμμών παραγωγής στις οποίες ο αλγόριθμος δεν συνέκλινε.

Το γεγονός αυτό οδήγησε τους Helber και Mehrtens (1999) να μοντελοποιήσουν τις εργασίες συγχώνευσης με ένα διαφορετικό σύστημα από αυτό που χρησιμοποιήθηκε στο βιβλίο του Helber (1999). Το νέο αυτό σύστημα αποτελείται από τρεις σταθμούς εργασίας και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο και παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 5. Κάθε μηχανή υποτίθεται ότι έχει το δικό της σταθερό χρόνο εξυπηρέτησης και οι πιθανότητες επιδιόρθωσης και εμφάνισης βλαβών ακολουθούν εκθετική κατανομή. Οι προϋποθέσεις αυτές έχουν σαν συνέπεια η ανάλυση του συστήματος να γίνεται θεωρώντας ότι τα παραγόμενα προϊόντα είναι συνεχούς τύπου. (continuous flow of material). Οι Helber και Mehrtens (1999) προχώρησαν στην ανάλυση του συστήματος αυτού επιλύνοντάς το για να χρησιμοποιηθεί σαν δομικό στοιχείο της

μεθόδου της αποσύνθεσης για την ανάλυση μεγάλων γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης.
Οι Helber και Jusic (2002) επέκτειναν τη μέθοδο της αποσύνθεσης για την εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης στις οποίες τα προϊόντα ήταν συνεχούς τύπου. Για την εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης χρησιμοποιήθηκαν ταυτόχρονα δυο είδη δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης.
Το ένα δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης ήταν το σύστημα που αναλύθηκε από τους Helber και Mehrtens (1999) και το άλλο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης είναι αυτό που χρησιμοποιείται στη κλασσική μέθοδο της αποσύνθεσης και αποτελείται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο.
Με ένα σύστημα παρόμοιο με αυτό των Helber και Mehrtens (1999) το οποίο αποτελείτο από τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο και στο οποίο γίνονταν εργασίες συγχώνευσης ασχολήθηκε ο Tan (2001). Τα προϊόντα θεωρούντο ότι ήταν συνεχούς τύπου ενώ οι πιθανότητες εμφάνισης και επιδιόρθωσης βλαβών ήταν εκθετικά κατανεμημένες.

Μια άλλη μέθοδος για την εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής διαφορετική από τη μέθοδο της αποσύνθεσης αναπτύχθηκε από τους Lim et al (1990). Η μέθοδος αυτή λέγεται μέθοδος της συνάθροισης και ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί περιγράφηκε στην παράγραφο 2.5.
Το βασικό χαρακτηριστικό όλων των εργασιών που παρουσιάστηκαν παραπάνω είναι ότι οι γραμμές παραγωγής παράγουν μόνο ενός τύπου προϊόντα.

Στη διεθνή βιβλιογραφία ελάχιστοι ερευνητές ασχολήθηκαν με την ανάλυση συστημάτων που είχαν τη δυνατότητα παραγωγής περισσότερων του ενός τύπου προϊόντων.
Μια πρώτη προσπάθεια για την ανάλυση τέτοιων συστημάτων παρουσιάστηκε από τον Nemec (1999). Στην εργασία αυτή παρουσιάστηκε μια επέκταση της κλασσικής μεθόδου της αποσύνθεσης για την ανάλυση σειριακών γραμμών που είχαν τη δυνατότητα παραγωγής δυο διαφορετικού τύπου προϊόντων. Λόγω της σειριακής διάταξης των μηχανών η ροή των προϊόντων είναι γραμμική.
Οι χρόνοι επεξεργασίας όλων των μηχανών θεωρούνται σταθεροί και ίσοι μεταξύ τους. Κάθε μηχανή μπορεί να παράγει και τους δυο τύπους προϊόντων. Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η επιλογή του ποιου τύπου προϊόντα παράγονται κάθε στιγμή καθορίζεται από έναν κανόνα προτεραιότητας.
Οι πιθανότητες εμφάνισης και επιδιόρθωσης βλαβών όλων των μηχανών θεωρούνται ότι είναι γεωμετρικά κατανεμημένες. Μια σημαντική υπόθεση είναι ότι για κάθε τύπο προϊόντος που παράγεται υπάρχει ένας αντίστοιχος τύπος αποθηκευτικού χώρου στον οποίο αποθηκεύονται τα προϊόντα αυτά. Δηλαδή υπάρχουν δυο τύποι αποθηκευτικών χώρων στους οποίους αποθηκεύεται κάθε τύπος προϊόντος ξεχωριστά.
Ο Nemec (1999) χρησιμοποίησε σαν δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης ένα σύστημα με δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο. Η γραφική απεικόνιση του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιείται από τον Nemec (1999) είναι ίδια με τη γραφική απεικόνιση του κλασσικού δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιείται από τον Gershwin (1987). Παρά αυτή τη φαινομενική ομοιότητα μεταξύ αυτών των δυο δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης οι διαφορές του δομικού

στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιείται από τον Nemec (1999) με εκείνο που χρησιμοποιείται από τον Gershwin (1987) είναι πολύ σημαντικές. Το δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιείται από τον Nemec (1999) χαρακτηρίζεται από κάποιες επιπλέον παραμέτρους που του επιτρέπουν να μοντελοποιεί τη δυνατότητα παραγωγής δυο τύπου προϊόντων.
Οι εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης που παρουσιάζονται από τον Nemec (1999) είναι σαφώς πιο πολύπλοκες από αυτές του Gershwin (1987). Λόγω της δυνατότητας παραγωγής δυο τύπου προϊόντων, παρουσιάζονται από τον Nemec (1999) κάποια επιπλέον σύνολα εξισώσεων τα οποία δεν υπάρχουν στη κλασσική μέθοδο αποσύνθεσης του Gershwin (1987) για σειριακές γραμμές που παράγουν μόνο ενός τύπου προϊόντα.

Οι Colledani, Matta και Tolio (2003), παρουσίασαν μια διαφορετική μέθοδο αποσύνθεσης η οποία χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της απόδοσης σειριακών γραμμών στις οποίες παράγονται δυο τύποι προϊόντων. Η μέθοδος που παρουσιάζεται είναι επεκτάσιμη στην περίπτωση που οι γραμμές μπορούν να παράγουν παραπάνω από δυο τύπους προϊόντων. Για κάθε τύπο προϊόντος που παράγεται υπάρχει ένας αντίστοιχος τύπος αποθηκευτικού χώρου στον οποίο αποθηκεύονται τα προϊόντα αυτά. Οι χρόνοι επεξεργασίας των μηχανών θεωρούνται σταθεροί και είναι ίσοι για όλες τις μηχανές. Μια διαφορά του μοντέλου αυτού σε σχέση με εκείνο του Nemec (1999), είναι ότι κάθε μηχανή μπορεί να παρουσιάσει βλάβη για πολλούς διαφορετικούς λόγους με διαφορετική πιθανότητα για τον καθένα ξεχωριστά (multiple failure modes).
Οι μηχανές μπορούν να παράγουν κάθε τύπο προϊόντος, αλλά ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η επιλογή του τύπου προϊόντος που παράγεται κάθε φορά είναι διαφορετικός από αυτόν που χρησιμοποιεί ο Nemec (1999). Στο μοντέλο των Colledani, Matta και Tolio (2003) η επιλογή του τύπου προϊόντος που παράγεται γίνεται με βάση μια πιθανότητα για κάθε τύπο προϊόντος, η οποία είναι διαφορετική για κάθε μηχανή.

Και οι δυο παραπάνω μελέτες ασχολούνται με την επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης για την εκτίμηση της απόδοσης σειριακών γραμμών με δυνατότητα παραγωγής δυο τύπου προϊόντων. Η ροή για κάθε τύπο προϊόντος είναι γραμμική, λόγω της σειριακής διάταξης των μηχανών. Το κοινό χαρακτηριστικό και των δυο αυτών μεθόδων είναι ότι αποσυνθέτουν τις γραμμές παραγωγής μόνο σε ΄΄εικονικά΄΄ υποσυστήματα που αποτελούνται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο.

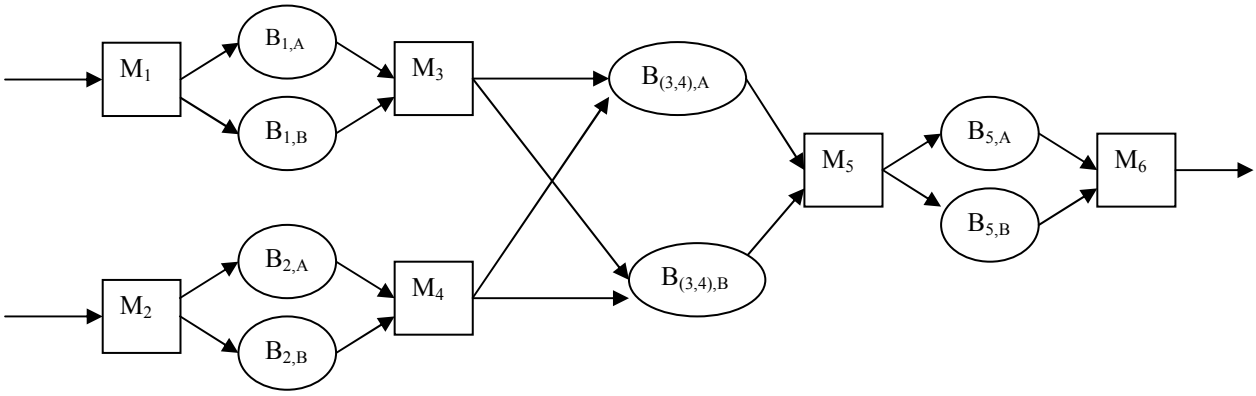
Η ουσιώδης διαφορά του συστήματος που εξετάζεται στο κεφάλαιο αυτό σε σύγκριση με τα συστήματα που εξετάστηκαν από τους Nemec (1999) και Colledani, Matta και Tolio (2003), είναι ότι στο σύστημα που εξετάζεται στο κεφάλαιο αυτό γίνονται εργασίες συγχώνευσης με αποτέλεσμα η ροή των προϊόντων να μην είναι γραμμική.
Λόγω της ύπαρξης των εργασιών συγχώνευσης η γραμμή παραγωγής αποσυντίθεται σε δυο είδη δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα.
Το ένα είδος που απεικονίζεται στο σχήμα 21, αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο και χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση των τμημάτων της γραμμής που γίνονται εργασίες συγχώνευσης, ενώ το άλλο είδος αποτελείται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο και χρησιμοποιείται για τα κομμάτια της γραμμής που δεν γίνονται εργασίες

συγχώνευσης (δηλαδή η ροή των προϊόντων είναι γραμμική). Αυτό το δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης απεικονίζεται γραφικά στο σχήμα 11 και είναι το ίδιο με αυτό που χρησιμοποιεί ο Nemec (1999).
Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού παρουσιάζεται με κάθε λεπτομέρεια η μεθοδολογία που ακολουθείται για την ανάλυση γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης και δυνατότητα παραγωγής δυο τύπου προϊόντων.

4.3 Ορισμός του προβλήματος

Το πρόβλημα που εξετάζεται στο κεφάλαιο αυτό είναι η ανάλυση μιας γραμμής παραγωγής στην οποία γίνονται εργασίες συγχώνευσης και υπάρχει η δυνατότητα παραγωγής δυο διαφορετικού τύπου προϊόντων. Μια τέτοια γραμμή παραγωγής παρουσιάζεται στο σχήμα 18. Βασικός στόχος είναι η εκτίμηση της απόδοσης του συστήματος αυτού και πραγματοποιείται επεκτείνοντας τη μέθοδο της αποσύνθεσης ώστε να είναι εφαρμόσιμη σε τέτοιου είδους συστήματα.

Η γραμμή παραγωγής του σχήματος 18 αποτελείται από έξη μηχανές και οκτώ ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους. Οι μηχανές συμβολίζονται με τετράγωνα και οι αποθηκευτικοί χώροι με κύκλους ενώ τα βέλη δείχνουν τη ροή που ακολουθούν τα προϊόντα όταν κινούνται στο σύστημα. Τα χαρακτηριστικά της γραμμής παραγωγής του σχήματος 18 παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα.



Σχήμα 18 : Μια γραμμή παραγωγής με έξη μηχανές, οκτώ αποθηκευτικούς χώρους, εργασίες συγχώνευσης και παραγωγής δυο διαφορετικών τύπων προϊόντων.

4.4 Χαρακτηριστικά του μοντέλου

Για τη γραμμή παραγωγής του σχήματος 18 ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

1. Οι μηχανές M_1 και M_2 αποτελούν μηχανές εισόδου για το σύστημα (input machines). Πριν από τις μηχανές M_1 και M_2 υποθέτουμε ότι υπάρχει πάντοτε διαθέσιμο προϊόν για επεξεργασία, δηλαδή οι μηχανές M_1 και M_2 δεν είναι ποτέ άδειες. Επίσης η μηχανή M_6 αποτελεί μηχανή εξόδου για το σύστημα (output machine). Μετά τη μηχανή M_6 υπάρχει πάντοτε αρκετός χώρος για την τοποθέτηση των προϊόντων που έχουν ολοκληρώσει την επεξεργασία τους και αποχωρούν από τη γραμμή. Αυτό σημαίνει ότι η μηχανή M_6 δεν είναι ποτέ μπλοκαρισμένη.

2. Όλες οι μηχανές M_i, i=1,…,6, του συστήματος έχουν τη δυνατότητα παραγωγής δυο τύπων προϊόντων, τύπου ΄΄Α΄΄ και τύπου ΄΄Β΄΄. Ο χρόνος που χρειάζεται κάθε μηχανή M_i, i=1,…,6, να επεξεργαστεί ένα προϊόν είναι ο ίδιος ανεξάρτητα από τον τύπο του προϊόντος.
3. Τα προϊόντα τύπου ΄΄Α΄΄ και τα προϊόντα τύπου ΄΄Β΄΄ διαφέρουν μεταξύ τους ως προς το μέγεθος.
4. Όλες οι μηχανές M_i, i=1,…,6, έχουν χρόνους επεξεργασίας οι οποίοι είναι σταθεροί και ίσοι μεταξύ τους. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι είναι ίσοι με μια μονάδα χρόνου.
5. Οι μηχανές M_i, i=1,2,…,6, βρίσκονται μπλοκαρισμένες μετά την ολοκλήρωση της επεξεργασίας του προϊόντος (Blocking After Service (BAS)). Αυτό σημαίνει ότι αν ένα προϊόν έχει ολοκληρώσει την επεξεργασία του σε μια μηχανή, αλλά εκείνη τη χρονική στιγμή ο αποθηκευτικός χώρος που βρίσκεται μετά από αυτή είναι γεμάτος τότε το προϊόν παραμένει στη μηχανή μέχρις ότου ο αποθηκευτικός χώρος πάψει να είναι γεμάτος. Στη περίπτωση αυτή η μηχανή θεωρείται μπλοκαρισμένη.
6. Όλες οι μηχανές μπορούν να παρουσιάσουν βλάβη μόνον όταν βρίσκονται σε λειτουργία και επεξεργάζονται κάποιο προϊόν (operational dependent failures (ODF's)). Αυτό σημαίνει ότι αν κάποια μηχανή λειτουργεί, αλλά είναι μπλοκαρισμένη ή άδεια τότε δεν μπορεί να παρουσιάσει βλάβη.
7. Εάν μια μηχανή M_i, i=1,2,…,6 βρίσκεται σε λειτουργία και δεν είναι ούτε άδεια ούτε μπλοκαρισμένη στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε μπορεί να παρουσιάσει βλάβη στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα p_i, i=1,2,…,6, αντίστοιχα η οποία ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή. Δηλαδή ο μέσος χρόνος μεταξύ των βλαβών για τη μηχανή M_i, i=1,2,…,6 είναι $\frac{1}{p_i}, i = 1,2,...,6$, αντίστοιχα.
8. Εάν μια μηχανή M_i, i=1,2,…,6 είναι χαλασμένη στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε επισκευάζεται στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα r_i, i=1,2,3, αντίστοιχα η οποία ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή. Αυτό σημαίνει ότι ο μέσος χρόνος επισκευής μιας βλάβης της μηχανής M_i, i=1,2,…,6 είναι $\frac{1}{r_i}, i = 1,2,...,6$, αντίστοιχα.
9. Με $\alpha_i, i = 1,2,...,6$ συμβολίζουμε την κατάσταση στην οποία βρίσκεται η μηχανή M_i αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα αν $\alpha_i = 0$ τότε η μηχανή M_i είναι χαλασμένη (down), ενώ αν $\alpha_i = 1$ τότε η μηχανή M_i λειτουργεί κανονικά (up).
10. Μετά από κάθε μηχανή M_i $i \in \{1,2,5\}$ υπάρχουν δυο αποθηκευτικοί χώροι $B_{i,A}$ και $B_{i,B}$. Όταν η μηχανή ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος τύπου ΄΄Α΄΄ τότε αυτό τοποθετείται στον αποθηκευτικό χώρο $B_{i,A}$, ενώ όταν ολοκληρώσει ένα προϊόν τύπου ΄΄Β΄΄ τότε αυτό τοποθετείται στον αποθηκευτικό χώρο $B_{i,B}$.
11. Στο κομμάτι της γραμμής παραγωγής που περιλαμβάνει της μηχανές M_3, M_4 και M_5 καθώς και τους ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους $B_{(3,4),A}$ και $B_{(3,4),B}$ γίνονται εργασίες συγχώνευσης. Αν οι μηχανές M_3 και M_4 παράγουν προϊόντα τύπου ΄΄Α΄΄ τότε αυτά τοποθετούνται στον αποθηκευτικό χώρο $B_{(3,4),A}$, ενώ αν παράγουν προϊόντα τύπου ΄΄Β΄΄ τότε αυτά τοποθετούνται στον αποθηκευτικό χώρο $B_{(3,4),B}$.

12. Αμέσως πριν η αμέσως μετά από ένα αποθηκευτικό χώρο στον οποίο γίνονται εργασίες συγχώνευσης δεν είναι δυνατόν να υπάρχει άλλος αποθηκευτικός χώρος στον οποίο να γίνονται εργασίες συγχώνευσης.
13. Επειδή κάθε μηχανή του συστήματος έχει τη δυνατότητα να παράγει και τους δυο τύπους προϊόντων, πρέπει να καθοριστεί ένας τρόπος με τον οποίο θα επιλέγεται κάθε φορά ποιος τύπος προϊόντος παράγεται από κάθε μηχανή. Για το λόγο αυτό εφαρμόζεται ένας κανόνας επιλογής του τύπου των προϊόντων που παράγονται κάθε στιγμή από τις μηχανές. Ο κανόνας που χρησιμοποιούμε στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ίδιος με τον κανόνα που χρησιμοποιείται από τον Nemec (1999) για τις σειριακές γραμμές παραγωγής που παράγουν δυο τύπους προϊόντων. Ο κανόνας αυτός έχει ως εξής: ΄΄Κάθε μηχανή M_i, i=1,2,…,6, του συστήματος του σχήματος 18 θα παράγει πάντοτε προϊόντα τύπου ΄΄Α΄΄ όταν αυτό είναι εφικτό (δηλαδή όταν λειτουργεί $\alpha_i = 1$ και δεν είναι ούτε μπλοκαρισμένη ούτε άδεια για τα προϊόντα τύπου ΄΄Α΄΄). Ισοδύναμα κάθε μηχανή M_i, i=1,2,…,6, του συστήματος του σχήματος 18 θα παράγει προϊόντα τύπου ΄΄Β΄΄ όταν λειτουργεί ($\alpha_i = 1$) και είναι άδεια ή μπλοκαρισμένη για τα προϊόντα τύπου ΄΄Α΄΄.
14. Καμιά μηχανή δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα άδεια και μπλοκαρισμένη για τα προϊόντα τύπου Α ή Β. Δηλαδή η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός αυτό είναι ίση με μηδέν ανεξάρτητα από το τύπο του προϊόντος. Αυτό σημαίνει ότι $prob(n_{i-1} = 0 \cap n_i = N_i) \approx 0$.
15. Οι βλάβες και οι επιδιορθώσεις των μηχανών εμφανίζονται στο ξεκίνημα των χρονικών περιόδων ενώ οι μεταβολές στον αριθμό των προϊόντων που βρίσκονται στον αποθηκευτικό χώρο γίνονται στο τέλος των χρονικών περιόδων.

4.5 Η μέθοδος της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης και δυνατότητα παραγωγής δυο τύπου προϊόντων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται μια γραφική απεικόνιση της μεθόδου της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης και δυνατότητα παραγωγής δυο τύπου προϊόντων σαν και αυτή του σχήματος 18. Η μέθοδος της αποσύνθεσης αναπτύχθηκε από τον Gershwin (1987) για σειριακές γραμμές παραγωγής στις οποίες οι μηχανές παρήγαγαν προϊόντα μόνο ενός τύπου. Ο Nemec (1999) όπως ήδη αναφέρθηκε επέκτεινε την μέθοδο της αποσύνθεσης ώστε να είναι εφαρμόσιμη σε σειριακές γραμμές με δυνατότητα παραγωγής δυο τύπου προϊόντων.
Ωστόσο για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής σε γραμμές παραγωγής σαν και αυτή του σχήματος 18 πρέπει να γίνουν αρκετές τροποποιήσεις οι οποίες περιγράφονται στις επόμενες ενότητες.
Μια γραφική απεικόνιση της μεθόδου αποσύνθεσης για τη γραμμή παραγωγής του σχήματος 18 φαίνεται στα σχήματα 19 και 20.
Όπως φαίνεται και από τα σχήματα 19 και 20, η τεχνική της μεθόδου της αποσύνθεσης εφαρμόζεται δυο φορές, μια για κάθε τύπο προϊόντων ξεχωριστά.
Η υπό εξέταση γραμμή παραγωγής του σχήματος 18 (στη συνέχεια του κεφαλαίου θα αποκαλείται πραγματική γραμμή παραγωγής και θα συμβολίζεται με L) όπως ήδη έχει αναφερθεί, αποτελείται από δυο τύπους αποθηκευτικών χώρων $B_{i,A}$ και $B_{i,B}$, ένα για κάθε τύπο προϊόντος. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει η αποσύνθεση της γραμμής L να γίνει δυο φορές, μια για κάθε τύπο αποθηκευτικών χώρων.

Η αποσύνθεση της γραμμής L, γίνεται ως εξής:

(1) Για κάθε αποθηκευτικό χώρο της γραμμής L που χρησιμοποιείται για την αποθήκευση προϊόντων τύπου ΄΄Α΄΄ κάνουμε τα εξής (σχήμα 19):

- Αν αμέσως πριν από τον αποθηκευτικό χώρο υπάρχουν δύο μηχανές M_i και M_j (στη προκειμένη περίπτωση οι μηχανές M_3 και M_4) που τον τροφοδοτούν (άρα γίνονται εργασίες συγχώνευσης), τότε εισάγεται ένα ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L((i,j),A) με τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο σαν και αυτό του σχήματος 21. Το υποσύστημα αυτό μοντελοποιεί τις εργασίες συγχώνευσης για τα προϊόντα τύπου ΄΄Α΄΄ που γίνονται στον συγκεκριμένο αποθηκευτικό χώρο. Για τη γραμμή παραγωγής του σχήματος 19 το υποσύστημα αυτό είναι το L((3,4),A)

- Αν αμέσως πριν από τον αποθηκευτικό χώρο βρίσκεται μόνο μια μηχανή M_i, τότε εισάγεται ένα ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L(i,A), i=1,2,5 που αποτελείται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο.

(2) Για κάθε αποθηκευτικό χώρο της γραμμής L που χρησιμοποιείται για την αποθήκευση προϊόντων τύπου ΄΄Β΄΄ κάνουμε τα εξής (σχήμα 20):

- Αν αμέσως πριν από τον αποθηκευτικό χώρο υπάρχουν δύο μηχανές M_i και M_j (στη προκειμένη περίπτωση οι μηχανές M_3 και M_4) που τον τροφοδοτούν (άρα γίνονται εργασίες συγχώνευσης), τότε εισάγεται ένα ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L((i,j),B) με τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο σαν και αυτό του σχήματος 21. Το υποσύστημα αυτό μοντελοποιεί τις εργασίες συγχώνευσης για τα προϊόντα τύπου ΄΄Β΄΄ που γίνονται στον συγκεκριμένο αποθηκευτικό χώρο. Για τη γραμμή παραγωγής του σχήματος 20 το υποσύστημα αυτό είναι το L((3,4),B)

- Αν αμέσως πριν από τον αποθηκευτικό χώρο βρίσκεται μόνο μια μηχανή M_i, τότε εισάγεται ένα ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L(i,B), i=1,2,5 που αποτελείται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο.

Κάθε ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L(i,A), i=1,2,5 αποτελείται από δυο εικονικές μηχανές $M_u(i,A)$ και $M_d(i,A)$. Η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(i,A)$ λέγεται upstream ΄΄εικονική΄΄ μηχανή και μοντελοποιεί το τμήμα της πραγματικής γραμμής L που βρίσκεται πριν τον αποθηκευτικό χώρο B(i,A) όταν παράγονται προϊόντα τύπου ΄΄Α΄΄.
Η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(i,A)$, i=1,2,5 λέγεται downstream΄΄εικονική΄΄ μηχανή και μοντελοποιεί το τμήμα της πραγματικής γραμμής L που βρίσκεται μετά τον αποθηκευτικό χώρο B(i,A) όταν παράγονται προϊόντα τύπου ΄΄Α΄΄.

Με ακριβώς παρόμοιο τρόπο ορίζονται τα ‘’εικονικά΄΄ υποσυστήματα L(i,B), i=1,2,5 τα οποία επίσης αποτελούνται από δυο εικονικές μηχανές $M_u(i,B)$ και $M_d(i,B)$. Η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(i,B)$ λέγεται upstream ΄΄εικονική΄΄ μηχανή και μοντελοποιεί το τμήμα της πραγματικής γραμμής L που βρίσκεται πριν τον αποθηκευτικό χώρο B(i,B) όταν παράγονται προϊόντα τύπου ΄΄Β΄΄. Η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(i,B)$, i=1,2,5 λέγεται downstream΄΄εικονική΄΄ μηχανή και μοντελοποιεί το τμήμα της πραγματικής

γραμμής L που βρίσκεται μετά τον αποθηκευτικό χώρο B(i,B) όταν παράγονται προϊόντα τύπου ΄΄Β΄΄.
Το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L((3,4),A) αποτελείται από δυο ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές $M_{u_1}((3,4),A)$ και $M_{u_2}((3,4),A)$ που μοντελοποιούν το τμήμα της πραγματικής γραμμής L που βρίσκεται πριν τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((3,4),A)}$ όταν παράγονται προϊόντα τύπου ΄΄Α΄΄ και μια εικονική μηχανή $M_d((3,4),A)$ που μοντελοποιεί το τμήμα της πραγματικής γραμμής παραγωγής που βρίσκεται μετά τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((3,4),A)}$.

Ομοίως, το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L((3,4),B) αποτελείται από δυο ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές $M_{u_1}((3,4),B)$ και $M_{u_2}((3,4),B)$ που μοντελοποιούν το τμήμα της πραγματικής γραμμής L που βρίσκεται πριν τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((3,4),B)}$ όταν παράγονται προϊόντα τύπου ΄΄Β΄΄ και μια εικονική μηχανή $M_d((3,4),B)$ που μοντελοποιεί το τμήμα της πραγματικής γραμμής παραγωγής που βρίσκεται μετά τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((3,4),B)}$.

Ο αποθηκευτικός χώρος κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(i,A), L(i,B), i=1,2,5 και οι αποθηκευτικοί χώροι των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων L((3,4),A) και L((3,4),B) είναι οι ίδιοι με τους αντίστοιχους ίσης χωρητικότητας αποθηκευτικούς χώρους $B_{i,A}$, $B_{i,B}$, i=1,2,5 και $B_{((3,4),A)}$ και $B_{((3,4),B)}$, αντίστοιχα της πραγματικής γραμμής.
Μια ακόμη υπόθεση της μεθόδου της αποσύνθεσης είναι ότι όλες οι upstream ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές όλων των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων θεωρούμε ότι δεν είναι ποτέ άδειες και όλες οι downstream ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές όλων των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων θεωρούμε ότι δεν είναι ποτέ μπλοκαρισμένες.

Τα ΄΄εικονικά΄΄ υποσυστήματα L(i,A) και L(i,B), i=1,2,5 που χρησιμοποιούνται στη μέθοδο της αποσύνθεσης είναι ακριβώς τα ίδια με τα ΄΄εικονικά΄΄ υποσυστήματα των δυο μηχανών και του ενός ενδιάμεσου αποθηκευτικού χώρου που χρησιμοποιούνται από τον Nemec (1999). Η ανάλυση και ο τρόπος υπολογισμού των υποσυστημάτων αυτών παρουσιάζεται λεπτομερώς από τον Nemec (1999).

Κοιτάζοντας τα σχήματα 19 και 20 στα οποία παρουσιάζεται μια γραφική απεικόνιση της μεθόδου της αποσύνθεσης για τα προιόντα τύπου ΄΄Α΄΄ και ΄΄Β΄΄, αντίστοιχα παρατηρούμε ότι η απεικόνιση αυτή είναι ακριβώς η ίδια με την περίπτωση του προηγούμενου κεφαλαίου (βλέπε σχήμα 16) όπου στη γραμμή παραγωγής συνέβαιναν εργασίες συγχώνευσης και υπήρχε η δυνατότητα παραγωγής ενός μόνο τύπου προϊόντος. Επίσης φαίνεται όλα τα ΄΄εικονικά΄΄ υποσυστήματα που εμπλέκονται και στις δυο περιπτώσεις να είναι ίδια μεταξύ τους.
Προκύπτουν εύλογα δυο ερωτήματα:

(α) Ποια είναι η διαφορά των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων που χρησιμοποιούνται στο κεφάλαιο αυτό για την ανάλυση συστημάτων με εργασίες συγχώνευσης και δυνατότητα παραγωγής δυο τύπου προϊόντων, με τα αντίστοιχα ΄΄εικονικά΄΄ υποσυστήματα που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση συστημάτων με εργασίες συγχώνευσης που παράγουν ένα τύπο προϊόντος;

(β) Μήπως οι εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης για την ανάλυση συστημάτων με εργασίες συγχώνευσης που παράγουν ένα τύπο προϊόντος μπορούν να

χρησιμοποιηθούν αυτούσιες και στη περίπτωση συστημάτων με εργασίες συγχώνευσης και δυνατότητα παραγωγής δυο τύπου προϊόντων;

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι ότι παρόλο που φαινομενικά τα ΄΄εικονικά΄΄ υποσυστήματα που χρησιμοποιούνται στο κεφάλαιο αυτό είναι τα ίδια με τα εικονικά υποσυστήματα που χρησιμοποιήθηκαν στο κεφάλαιο 3, ωστόσο υπάρχει μια πάρα πολύ σημαντική διαφορά. Η διαφορά αυτή έγκειται στον τρόπο με τον παρουσιάζονται οι βλάβες στις ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων.
Αν ανατρέξουμε στο κεφάλαιο 3 θα δούμε ότι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών M_u και M_d των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων ήταν ότι παρουσίαζαν βλάβη μόνον όταν λειτουργούσαν (επεξεργάζονταν ένα προϊόν) και δεν ήταν μπλοκαρισμένες η άδειες (operational dependent failures (ODF's)).
Για τις μηχανές των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων που χρησιμοποιούνται στο κεφάλαιο αυτό υποθέτουμε ότι οι μηχανές δεν παρουσιάζουν βλάβες μόνο όταν λειτουργούν (επεξεργάζονται ένα προϊόν) και δεν είναι μπλοκαρισμένες η άδειες (operational dependent failures (ODF's)), αλλά επιπλέον μπορούν να παρουσιάσουν βλάβες όταν είναι αδρανείς, δηλαδή όταν είναι μπλοκαρισμένες ή άδειες και δεν μπορούν να επεξεργαστούν κανένα προϊόν. Ο νέος αυτός τύπος βλαβών ονομάζεται **βλάβη αδράνειας** (idleness failure) και είναι απαραίτητος για τη μοντελοποίηση συστημάτων που παράγουν δυο τύπους προϊόντων.

Θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι οι μηχανές της πραγματικής γραμμή L μπορούν να παρουσιάσουν βλάβη μόνο όταν λειτουργούν (επεξεργάζονται ένα προϊόν) και δεν ήταν μπλοκαρισμένες η άδειες (operational dependent failures (ODF's)). Οι βλάβες αδράνειας (idleness failure) παρουσιάζονται μόνο στις ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων διότι μοντελοποιούν στη μέθοδο της αποσύνθεσης την ύπαρξη των δυο τύπου προϊόντων.
Ένα παράδειγμα στο οποίο φαίνεται γιατί είναι απαραίτητη η εισαγωγή του νέου τύπου βλαβών αδράνειας (idleness failures) για τις μηχανές των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων έτσι ώστε να μοντελοποιηθεί η ύπαρξη των δύο τύπου προϊόντων είναι το εξής:
Ας υποθέσουμε ότι ένας παρατηρητής είναι τοποθετημένος στον αποθηκευτικό χώρο $B_{(3,4),A}$. Ο παρατηρητής αυτός το μόνο που μπορεί να δει είναι η ροή των προϊόντων από και προς τον αποθηκευτικό χώρο $B_{(3,4),A}$. Αν ο παρατηρητής βλέπει ότι η ροή των προϊόντων από τον αποθηκευτικό χώρο $B_{(3,4),A}$ έχει σταματήσει (πιθανότατα γιατί έχει παρουσιαστεί κάποια βλάβη μετά από τον αποθηκευτικό χώρο $B_{(3,4),A}$) και η ροή των προϊόντων προς τον αποθηκευτικό χώρο $B_{(3,4),A}$ συνεχίζεται κανονικά, τότε ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(3,4),1}$ κάποια στιγμή θα γεμίσει. Σύμφωνα με τον κανόνα που χρησιμοποιείται (υπόθεση (13)) οι μηχανές M_3 και M_4 θα ξεκινήσουν να παράγουν προϊόντα τύπου ΄΄Β΄΄. Ας υποθέσουμε ότι κάποια από τις δυο μηχανές M_3 ή M_4 παρουσιάζει βλάβη τη στιγμή που παρήγαγε προϊόντα τύπου ΄΄Β΄΄ και ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(3,4),A}$ έχει πάψει να είναι γεμάτος (γιατί η βλάβη που υπήρχε μετά από αυτόν επιδιορθώθηκε). Τότε για τον παρατηρητή που βρίσκεται στον αποθηκευτικό χώρο $B_{(3,4),A}$ η μηχανή M_3 ή η M_4 φαίνεται ότι παρουσίασε βλάβη όσο ήταν μπλοκαρισμένη για τα προϊόντα τύπου ΄΄Α΄΄, δηλαδή η βλάβη παρουσιάστηκε όταν η M_3 ή η M_4 ήταν αδρανής. Αυτό το νέο είδος βλαβών λέγονται βλάβες αδράνειας (idleness failures).
Σχετικά με το δεύτερο ερώτημα που τίθεται παραπάνω, οι εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης για την ανάλυση συστημάτων με εργασίες συγχώνευσης που παράγουν

ένα τύπο προϊόντος δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε καμιά περίπτωση για γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης που παράγουν δυο τύπους προϊόντων.
Λόγω των βλαβών αδράνειας δυο νέα σύνολα εξισώσεων (ένα για κάθε τύπο προϊόντος) της αποσύνθεσης που περιγράφουν τις αντίστοιχες πιθανότητες εμφάνισης βλαβών πρέπει να δημιουργηθούν. Επιπλέον τα σύνολα των υπόλοιπων εξισώσεων πρέπει να τροποποιηθούν δραστικά για να συμπεριλάβουν την ύπαρξη των δυο τύπου προϊόντων.
Οι χρόνοι επεξεργασίας όλων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών είναι σταθεροί και ίσοι μεταξύ τους και χωρίς βλάβη της γενικότητας λαμβάνονται να είναι ίσοι με μια μονάδα χρόνου.
Εάν μια μηχανή $M_u(i,A)$, $M_u(i,B)$, i=1,2,5, βρίσκεται σε λειτουργία και δεν είναι μπλοκαρισμένη στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε μπορεί να παρουσιάσει βλάβη στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα $p_u(i,A)$ και $p_u(i,B)$, αντίστοιχα.
Επίσης εάν μια μηχανή $M_{u_1}((3,4),A), M_{u_2}((3,4),A), M_{u_1}((3,4),B), M_{u_2}((3,4),B)$ βρίσκεται σε λειτουργία και δεν είναι μπλοκαρισμένη στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε μπορεί να παρουσιάσει βλάβη στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα $p_{u_1}((3,4),A), p_{u_2}((3,4),A), p_{u_1}((3,4),B), p_{u_2}((3,4),B)$, αντίστοιχα.
Ομοίως αν μια μηχανή $M_d(i,A)$, $M_d(i,B)$, i=1,2,5, $M_d((3,4),A)$, $M_d((3,4),B)$ βρίσκεται σε λειτουργία και δεν είναι άδεια στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε μπορεί να παρουσιάσει βλάβη στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα $p_d(i,A)$, $p_d(i,B), p_d((3,4),A), p_d((3,4),B)$, αντίστοιχα.
Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται και ο νέος τύπος βλαβών αδράνειας (idleness failures).
Εάν μια μηχανή $M_u(i,A)$, $M_u(i,B)$, i=1,2,5, βρίσκεται σε λειτουργία και είναι μπλοκαρισμένη στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε μπορεί να παρουσιάσει βλάβη αδράνειας στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα $v_u(i,A)$ και $v_u(i,B)$, αντίστοιχα.
Επίσης εάν μια μηχανή $M_{u_1}((3,4),A), M_{u_2}((3,4),A), M_{u_1}((3,4),B), M_{u_2}((3,4),B)$ βρίσκεται σε λειτουργία και είναι μπλοκαρισμένη στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε μπορεί να παρουσιάσει βλάβη αδράνειας στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα $v_{u_1}((3,4),A), v_{u_2}((3,4),A), v_{u_1}((3,4),B), v_{u_2}((3,4),B)$, αντίστοιχα.
Ομοίως αν μια μηχανή $M_d(i,A)$, $M_d(i,B)$, i=1,2,5, $M_d((3,4),A)$, $M_d((3,4),B)$ βρίσκεται σε λειτουργία και είναι άδεια στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε μπορεί να παρουσιάσει βλάβη αδράνειας στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα $v_d(i,A)$, $v_d(i,B)$, $v_d((3,4),A), v_d((3,4),B)$, αντίστοιχα.
Εάν μια μηχανή $M_u(i,A)$, $M_u(i,B)$, i=1,2,5, είναι χαλασμένη στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε επισκευάζεται στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα $r_u(i,A), r_u(i,A)$, αντίστοιχα.
Επίσης εάν μια μηχανή $M_{u_1}((3,4),A), M_{u_2}((3,4),A), M_{u_1}((3,4),B), M_{u_2}((3,4),B)$ είναι χαλασμένη στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε επισκευάζεται στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα
$r_{u_1}((3,4),A), r_{u_2}((3,4),A), r_{u_1}((3,4),B), r_{u_2}((3,4),B)$, αντίστοιχα.
Ομοίως αν μια μηχανή $M_d(i,A)$, $M_d(i,B)$, i=1,2,5, $M_d((3,4),A)$, $M_d((3,4),B)$ είναι χαλασμένη στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε επισκευάζεται στο ξεκίνημα της

χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα $r_d(i,A)$, $r_d(i,B), r_d((3,4),A), r_d((3,4),B)$, αντίστοιχα.
Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η πιθανότητα επιδιόρθωσης μιας βλάβης μιας ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής είναι η ίδια ανεξάρτητα αν αυτή η βλάβη ήταν βλάβη αδράνειας η όχι. Όλες οι πιθανότητες εμφάνισης και επιδιόρθωσης βλαβών των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών υποθέτουμε ότι ακολουθούν γεωμετρική κατανομή

Το ζητούμενο από την εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης είναι η εύρεση των παραμέτρων των ΄΄εικονικών΄΄ σταθμών εργασίας κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1. Ο ρυθμός της ροής των προϊόντων προς και από τον αποθηκευτικό χώρο κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος, είναι ίδιος με το ρυθμό ροής προς και από τον αντίστοιχο αποθηκευτικό χώρο της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής L.

2. Η πιθανότητα επαναφοράς της ροής των προϊόντων από και προς τον αποθηκευτικό χώρο κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος, ύστερα από μια χρονική περίοδο κατά την οποία υπήρχε διακοπή της ροής, είναι ίση με την πιθανότητα του αντίστοιχου γεγονότος για τον αντίστοιχο αποθηκευτικό χώρο της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής L.

3. Η πιθανότητα ο αποθηκευτικός χώρος κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος να είναι γεμάτος η άδειος είναι ίδια με την αντίστοιχη πιθανότητα για τον αντίστοιχο αποθηκευτικό χώρο της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής L.

4. Ο μέσος αριθμός προϊόντων στον αποθηκευτικό χώρο κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος, είναι ίσος με τον μέσο αριθμό προϊόντων στον αντίστοιχο αποθηκευτικό χώρο της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής L.

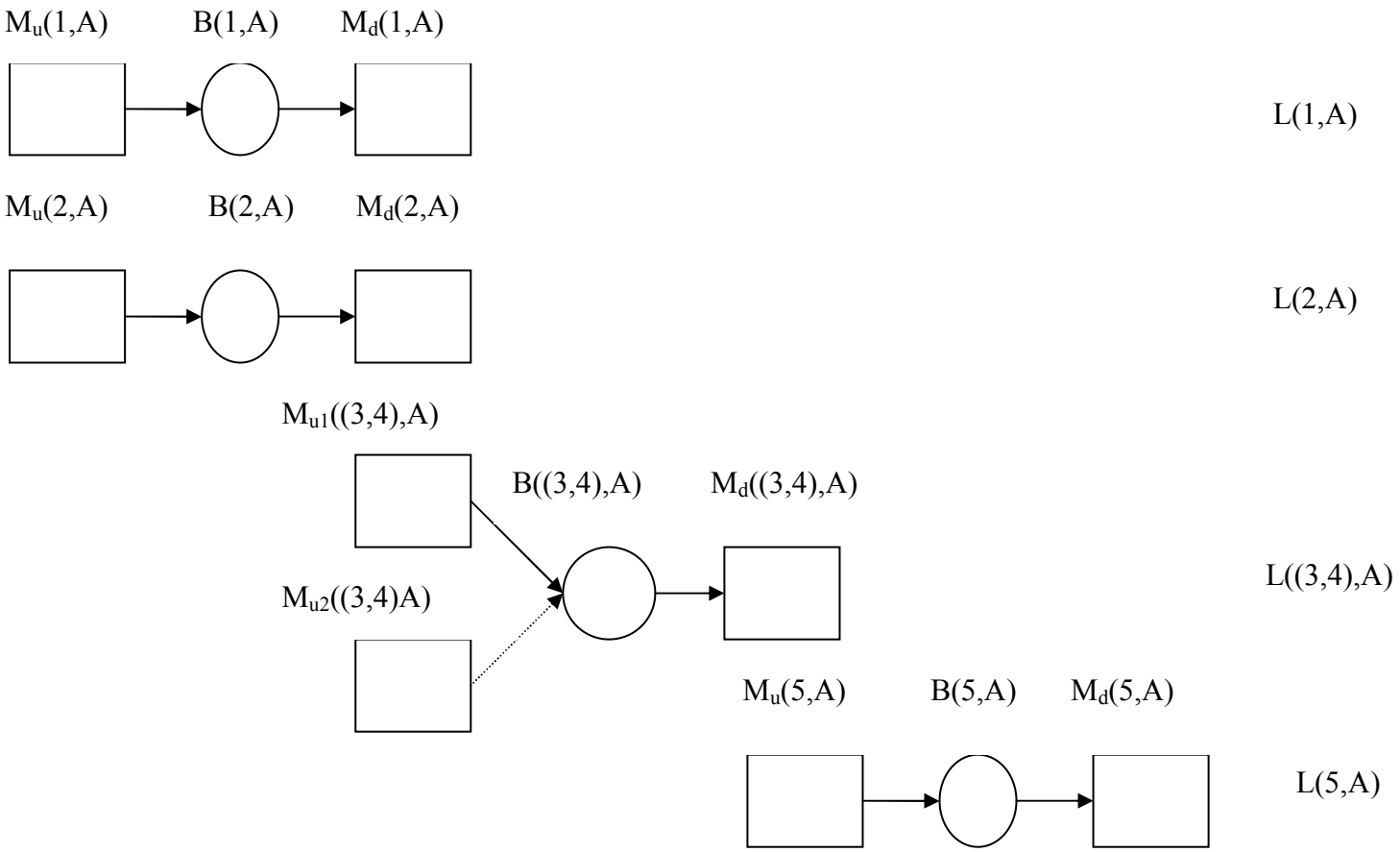
Για την εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης τα ακόλουθα τρία βήματα είναι απαραίτητο να υλοποιηθούν:

ΒΗΜΑ 1^{Ο} : Ανάλυση και υπολογισμός με απόλυτη ακρίβεια της απόδοσης και των δυο κατηγοριών δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης που εμπλέκονται στη μέθοδο της αποσύνθεσης (σχήματα 11 και 21). Η πρώτη κατηγορία αποτελείται από δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο (σχήμα 11) και έχει αναλυθεί με κάθε λεπτομέρεια από τον Nemec (1999), ενώ η δεύτερη κατηγορία αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο (σχήμα 21) και αναλύεται στην επόμενη ενότητα με χρήση Μαρκοβιανής ανάλυσης.

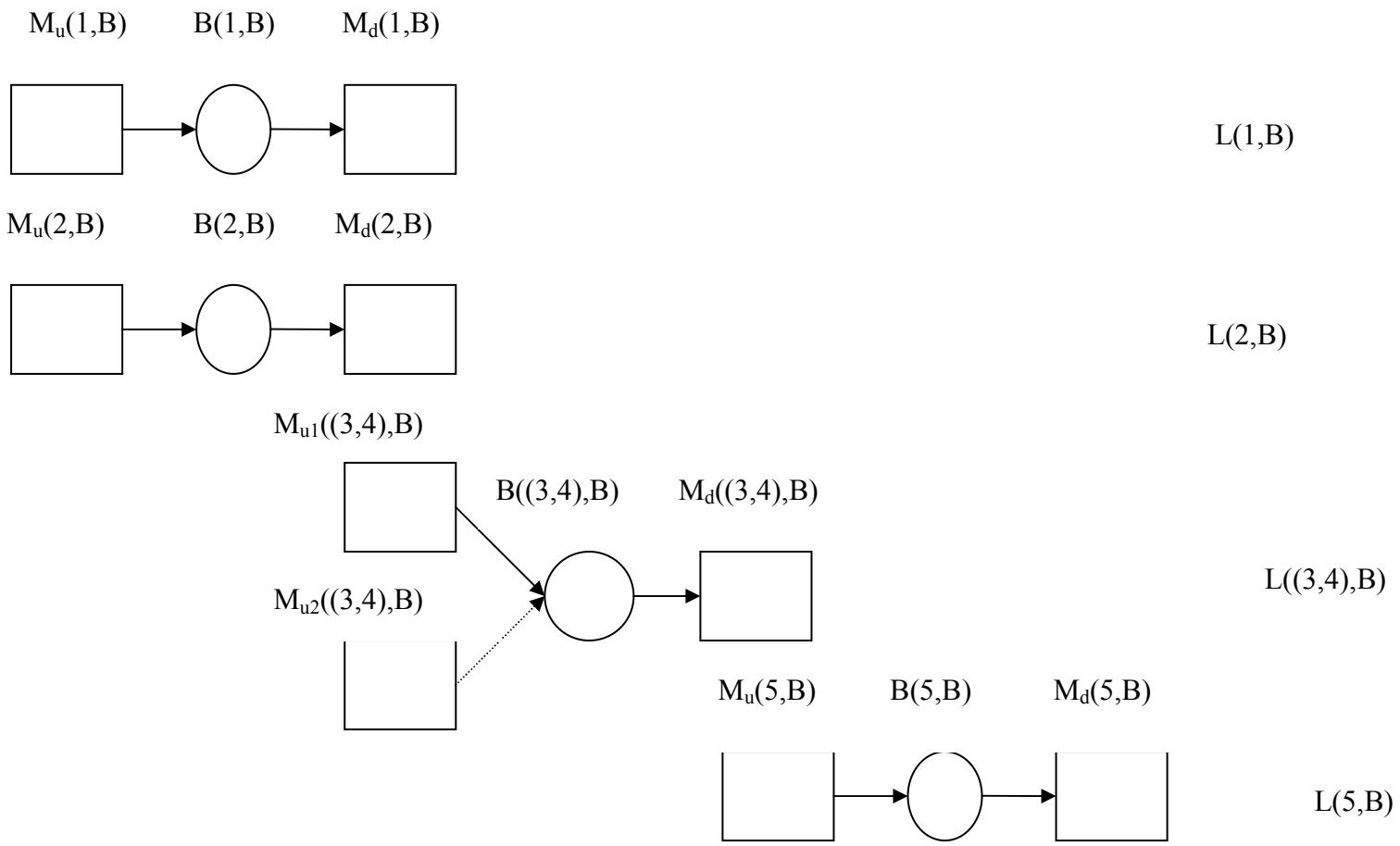
ΒΗΜΑ 2^{Ο} : Ανάπτυξη των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης, οι οποίες θα συσχετίζουν τις παραμέτρους των μηχανών της ΄΄πραγματικής γραμμής παραγωγής με τις παραμέτρους των αντίστοιχων ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών των εμπλεκόμενων δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης.

ΒΗΜΑ $3^{Ο}$:Δημιουργία ενός αλγόριθμου ο οποίος θα επιλύει ταυτόχρονα όλες τις εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης για τον υπολογισμό της απόδοσης της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής παραγωγής του σχήματος 18.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού, παρουσιάζεται η υλοποίηση των τριών αυτών βημάτων.



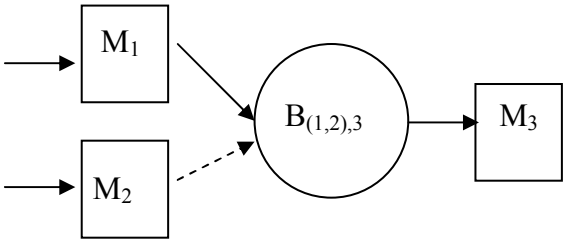
Σχήμα 19: Η μέθοδος της αποσύνθεσης για τα προϊόντα τύπου Α



Σχήμα 20: Η μέθοδος της αποσύνθεσης για τα προϊόντα τύπου Β

4.6 Το νέο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ο αλγόριθμος με τον οποίο μπορούν να υπολογιστούν όλες οι στάσιμες πιθανότητες των καταστάσεων και κατά συνέπεια τα μέτρα απόδοσης του συστήματος που αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο Το σύστημα αυτό απεικονίζεται στο σχήμα 21 και χρησιμοποιείται σαν δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης (ΔΣΜΑ) για τη μοντελοποίηση του τμήματος της πραγματικής γραμμής L στην οποία γίνονται εργασίες συγχώνευσης.



Σχήμα 21: Το νέο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης

Οι μηχανές M_1 και M_2 λειτουργούν παράλληλα τροφοδοτώντας τον αποθηκευτικό χώρο $B_{(1,2),3}$ και δεν δίνεται προτεραιότητα σε καμιά από τις δυο όπως γίνεται στο σύστημα του σχήματος 4. Όταν ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(1,2),3}$ γεμίσει τότε δίνεται προτεραιότητα στη μηχανή M_1 έναντι της M_2 να είναι εκείνη που θα αποθέσει πρώτη προϊόν στον αποθηκευτικό χώρο $B_{(1,2),3}$ μόλις αυτός πάψει να είναι γεμάτος.
Το σύστημα αυτό φαίνεται να είναι το ίδιο με εκείνο που αναλύθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και χρησιμοποιήθηκε σαν δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης για την ανάλυση γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης και δυνατότητα παραγωγής ενός μόνο τύπου προϊόντων. Η εισαγωγή των πιθανοτήτων εμφάνισης βλαβών αδράνειας (idleness failures) των μηχανών του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης που είναι απαραίτητες για τη μοντελοποίηση της ύπαρξης δυο τύπου προϊόντων, κάνει το σύστημα αυτό να συμπεριφέρεται τελείως διαφορετικά. Οι πιθανότητες μετάβασης, οι εξισώσεις που τις περιγράφουν και ο τύπος που δίνει την απόδοση του συστήματος αλλάζουν δραστικά όπως θα δούμε και στη συνέχεια.
Η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του συστήματος αυτού είναι η Μαρκοβιανή ανάλυση. Πριν προχωρήσουμε όμως στην επίλυση του συστήματος, θα δώσουμε μια αναλυτική περιγραφή των κύριων χαρακτηριστικών που το προσδιορίζουν.

4.6.1 Χαρακτηριστικά του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι υποθέσεις, η ορολογία και ο συμβολισμός που χρησιμοποιούνται για το σύστημα του σχήματος 21 που αποτελείται από τρεις μηχανές και έναν ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο και χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση των εργασιών συγχώνευσης.

1. Τα προϊόντα κινούνται εξωτερικά από το σύστημα προς τις μηχανές M_1 και M_2, στη συνέχεια προς τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((1,2),3)}$ και τέλος προς την μηχανή M_3 όπου μετά την επεξεργασία τους εξέρχονται του συστήματος.
2. Πριν τις μηχανές M_1 και M_2 υποθέτουμε ότι υπάρχει πάντοτε διαθέσιμο προϊόν για επεξεργασία (δηλαδή οι μηχανές M_1 και M_2 δεν είναι *ποτέ* άδειες). Επίσης υποθέτουμε ότι μετά τη μηχανή M_3 υπάρχει πάντοτε αποθηκευτικός χώρος για να αποθέσει η μηχανή M_3 τα προϊόντα που έχει ήδη επεξεργαστεί (δηλαδή η μηχανή M_3 δεν είναι *ποτέ* μπλοκαρισμένη).
3. Μια μηχανή λέμε ότι άδεια (statved) αν ο αποθηκευτικός χώρος που βρίσκεται πριν από αυτήν είναι άδειος, ενώ λέγεται μπλοκαρισμένη (blocked) αν ο αποθηκευτικός χώρος που υπάρχει μετά από αυτήν είναι γεμάτος.
4. Η χωρητικότητα σε προϊόντα του ενδιάμεσου αποθηκευτικού χώρου $B_{((1,2),3)}$ συμβολίζεται με C.
5. Η χωρητικότητα όλου του συστήματος N είναι διαφορετική από τη χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου $B_{((1,2),3)}$, C. Η χωρητικότητα του συστήματος N είναι ίση με τη χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου $B_{((1,2),3)}$ προσθέτοντας τα προϊόντα που κάθε μια από τις τρεις μηχανές μπορεί να διατηρήσει στη περιοχή εργασίας της. Κάθε μηχανή μπορεί να κρατήσει μέχρι ένα προϊόν στη περιοχή εργασίας της Λόγω του ότι υπάρχουν τρεις μηχανές στο σύστημα έχουμε ότι N=C+3. Ένα προϊόν λέμε ότι βρίσκεται στη περιοχή εργασίας των μηχανών M_1 ή M_2 αν έχει ήδη ολοκληρώσει την επεξεργασία του από την M_1 ή την M_2, αλλά ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((1,2),3)}$ είναι γεμάτος και ένα προϊόν ήδη βρίσκεται στη περιοχή εργασίας της M_3. Πρέπει να διευκρινιστεί ότι ένα προϊόν που βρίσκεται στη περιοχή εργασίας των M_1 ή M_2 χωρίς να έχει ολοκληρώσει την επεξεργασία του από την μηχανή M_1 ή M_2, ή περιμένει επιδιόρθωση μιας βλάβης, δεν υπολογίζεται στη συνολική χωρητικότητα του συστήματος διότι δεν είναι διαθέσιμο προς επεξεργασία από τη μηχανή M_3. Οι ακραίες τιμές της χωρητικότητας όλου του συστήματος είναι 0 όταν η μηχανή M_3 είναι άδεια και C+3 όταν οι M_1 και M_2 είναι μπλοκαρισμένες ταυτόχρονα.
6. Οι μηχανές M_1 και M_2 του συστήματος του σχήματος 21, βρίσκονται μπλοκαρισμένες μετά την ολοκλήρωση της επεξεργασίας του προϊόντος (Blocking After Service (BAS)). Αυτό σημαίνει ότι αν ένα προϊόν έχει ολοκληρώσει την επεξεργασία του αλλά εκείνη τη χρονική στιγμή ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((1,2),3)}$ είναι γεμάτος τότε το προϊόν παραμένει στη μηχανή μέχρις ότου ο αποθηκευτικός χώρος πάψει να είναι γεμάτος και η μηχανή θεωρείται μπλοκαρισμένη.
7. Όταν ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((1,2),3)}$ δεν είναι γεμάτος τότε οι μηχανές M_1 και M_2 λειτουργούν παράλληλα παράγοντας προϊόντα ίδιου τύπου. Όταν ο αποθηκευτικός χώρος είναι γεμάτος $B_{((1,2),3)}$ τότε η μηχανή M_1 έχει προτεραιότητα έναντι της M_2 να είναι εκείνη που θα αποθέσει πρώτη προϊόν στον αποθηκευτικό χώρο $B_{(1,2),3}$ μόλις αυτός πάψει να είναι γεμάτος.

8. Και οι τρεις μηχανές έχουν σταθερούς και ίσους μεταξύ τους χρόνους εξυπηρέτησης. Αυτό σημαίνει ότι οι χρόνοι επεξεργασίας και των τριών είναι σταθεροί και ταυτόσημοι μεταξύ τους και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι είναι ίσοι με μια μονάδα χρόνου.

9. Με $\alpha_i, i = 1,2,3$ συμβολίζουμε την κατάσταση στην οποία βρίσκεται η μηχανή M_i αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα αν $\alpha_i = 0$ τότε η μηχανή M_i είναι χαλασμένη (down), ενώ αν $\alpha_i = 1$ τότε η μηχανή M_i λειτουργεί κανονικά (up).

10. Οι μηχανές υποθέτουμε ότι έχουν γεωμετρικά κατανεμημένους χρόνους λειτουργίας μεταξύ των βλαβών τους. Εάν η μηχανή M_i, i=1,2 βρίσκεται σε λειτουργία και δεν είναι μπλοκαρισμένη στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε μπορεί να παρουσιάσει βλάβη στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα p_i, i=1,2, αντίστοιχα η οποία ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή. Επίσης αν η μηχανή M_3 βρίσκεται σε λειτουργία και δεν είναι άδεια στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε μπορεί να παρουσιάσει βλάβη στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα p_3.Αυτό σημαίνει ότι οι μέσοι χρόνοι λειτουργίας (σε χρονικές περιόδους) της μηχανής M_i , i=1,2,3 μεταξύ των βλαβών είναι $\frac{1}{p_i}, i = 1,2,3$, αντίστοιχα ή ισοδύναμα ότι ο μέσος χρόνος εμφάνισης βλαβών για τη μηχανή M_i, i=1,2,3 είναι $\frac{1}{p_i}, i = 1,2,3$, αντίστοιχα.

11. Η πιθανότητα η μηχανή M_i, i=1,2 να παρουσιάσει βλάβη στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 ενώ ήταν μπλοκαρισμένη τη χρονική στιγμή t συμβολίζεται με v_i. Επίσης η πιθανότητα μηχανή M_3 να παρουσιάσει βλάβη στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 ενώ ήταν άδεια τη χρονική στιγμή t συμβολίζεται με v_3. Αυτό το είδος βλάβης που εμφανίζεται όταν η μηχανή είναι σε αδράνεια (δηλαδή είναι μπλοκαρισμένη ή άδεια), λέγεται βλάβη αδράνειας (idleness failure). Οι βλάβες αδράνειας ακολουθούν επίσης γεωμετρική κατανομή.

12. Εάν μια μηχανή M_i, i=1,2,3 είναι χαλασμένη στο τέλος της χρονικής περιόδου t, τότε επισκευάζεται στο ξεκίνημα της χρονικής περιόδου t+1 με πιθανότητα r_i, i=1,2,3, αντίστοιχα η οποία ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή. Αυτό σημαίνει ότι ο μέσος χρόνος επισκευής μιας βλάβης της μηχανής M_i, i=1,2,3, είναι $\frac{1}{r_i}, i = 1,2,3$, αντίστοιχα. Η πιθανότητα επιδιόρθωσης της βλάβης είναι ίδια ανεξάρτητα από το είδος της βλάβης (βλάβη αδράνειας η όχι).

13. Ο αριθμός των προϊόντων που βρίσκονται στο σύστημα τη χρονική στιγμή t συμβολίζεται με n(t) και είναι προφανές ότι $0 \le n(t) \le N$.

14. Η κατάσταση στην οποία μπορεί να βρεθεί το σύστημα του σχήματος 21 περιγράφεται από το διάνυσμα $S = (n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, όπου $0 \le n \le N$ και $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{0,1\}$. Οι χρόνοι μετακίνησης των προϊόντων μεταξύ των μηχανών και των αποθηκευτικών χώρων θεωρούνται αμελητέοι σε σύγκριση με τους χρόνους επεξεργασίας.

15. Οι βλάβες και οι επιδιορθώσεις των μηχανών εμφανίζονται στο ξεκίνημα των χρονικών περιόδων, ενώ οι μεταβολές στον αριθμό των προϊόντων που βρίσκονται στον αποθηκευτικό χώρο γίνονται στο τέλος των χρονικών περιόδων.

Για την ανάλυση του συστήματος του σχήματος 21 με χρήση Μαρκοβιανής ανάλυσης, με σκοπό τον υπολογισμό των στάσιμων πιθανοτήτων όλων των καταστάσεων και κατά συνέπεια των μέτρων απόδοσής του, τα ακόλουθα βήματα πρέπει να υλοποιηθούν.

Βήμα 1^{ο} : Δημιουργία όλων των εξισώσεων μετάβασης (εσωτερικών, κάτω οριακών και άνω οριακών) του Μαρκοβιανού μοντέλου.

Βήμα 2^{ο} : Ανάπτυξη ενός αλγόριθμου για τη γέννηση του πίνακα μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή N (N=C+3) της συνολικής χωρητικότητας του συστήματος.

Βήμα 3^{ο} : Αριθμητικός υπολογισμός όλων των στάσιμων πιθανοτήτων και των μέτρων απόδοσης του συστήματος όπως π.χ. η απόδοση και ο αριθμός των ημιακατέργαστων προϊόντων στο σύστημα (Work-In-Progress: WIP).

4.7 Οι εξισώσεις μετάβασης

Το σύστημα του σχήματος 21 μπορεί να μεταβαίνει από μια κατάσταση τη χρονική στιγμή t σε μια άλλη τη χρονική στιγμή t+1 με μια συγκεκριμένη πιθανότητα η οποία εξαρτάται από τις παραμέτρους του συστήματος. Η πιθανότητα αυτή ονομάζεται πιθανότητα μετάβασης και οι εξισώσεις που περιέχουν τις πιθανότητες αυτές και περιγράφουν τις μεταβάσεις από κατάσταση σε κατάσταση λέγονται εξισώσεις μετάβασης.
Για παράδειγμα η μετάβαση από την κατάσταση (0,0,0,1) τη χρονική στιγμή t στη κατάσταση (0,0,0,0) τη χρονική στιγμή t+1 γίνεται ως εξής:
Τη χρονική στιγμή t οι μηχανές M_1 και M_2 είναι χαλασμένες, ενώ η μηχανή M_3 είναι άδεια αλλά λειτουργεί (είναι up). Αυτό σημαίνει ότι η μηχανή M_3 είναι αδρανής. Τη χρονική στιγμή t+1 οι μηχανές M_1 και M_2 εξακολουθούν να είναι χαλασμένες (δηλαδή δεν έχουν επιδιορθωθεί) γεγονός που μπορεί να συμβεί με πιθανότητα $(1-r_1)$ και $(1-r_2)$ αντίστοιχα. Η μηχανή M_3 τη χρονική στιγμή t+1 βρίσκεται να είναι χαλασμένη ($\alpha_3(t+1)=0$). Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η μηχανή M_3 να παρουσιάσει βλάβη αδράνειας με πιθανότητα v_3.
Συνολικά η πιθανότητα μετάβασης από τη κατάσταση (0,0,0,1) τη χρονική στιγμή t στην κατάσταση (0,0,0,0) τη χρονική στιγμή t+1 είναι $(1-r_1)(1-r_2)v_3$. Η εξίσωση που περιγράφει τη μετάβαση αυτή είναι $p[0,0,0,0] = (1-r_1)(1-r_2)v_3\ p[0,0,0,1]$.
Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε όλες τις πιθανότητες μετάβασης από μια κατάσταση σε μια άλλη για το χρονικό διάστημα (t,t+1). Στη συνέχεια παρουσιάζονται όλες οι εξισώσεις μετάβασης από μια κατάσταση σε μια άλλη κατάσταση κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος (t,t+1).
Λόγω των προϋποθέσεων του συστήματος υπάρχουν κάποιες καταστάσεις οι οποίες έχουν **πάντοτε** μηδενική στάσιμη πιθανότητα. Οι καταστάσεις αυτές ονομάζονται παροδικές καταστάσεις (transient states) Η ιδιομορφία των καταστάσεων αυτών είναι ότι το σύστημα δεν μπορεί να μεταβεί σε αυτές από καμιά άλλη κατάσταση, εκτός ενδεχομένως από άλλες παροδικές καταστάσεις.

Για παράδειγμα η κατάσταση (0,0,1,1) είναι παροδική διότι δεν μπορεί το σύστημα να μεταβεί σε αυτή τη κατάσταση από καμιά άλλη κατάσταση.
Ας υποθέσουμε ότι βρίσκουμε το σύστημα τη χρονική στιγμή t+1 στη κατάσταση (0,0,1,1). Αν τη χρονική στιγμή t, είχαμε n(t)=0, τότε επειδή a_1(t+1)=0, a_2(t+1)=1, a_3(t+1)=1 τότε η μηχανή M_2 θα έπρεπε να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος τη χρονική στιγμή t+1 γιατί δεν ήταν μπλοκαρισμένη τη χρονική στιγμή t. Η μηχανή M_3 ήταν άδεια τη χρονική στιγμή t άρα δεν μπορεί να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος τη χρονική στιγμή t+1. Επίσης η μηχανή M_1 δεν μπορεί να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος γιατί είναι χαλασμένη τη χρονική στιγμή t+1. Λαμβάνοντας υπόψη όλα αυτά θα έπρεπε n(t+1)=1 που είναι άτοπο γιατί n(t+1)=0.
Αν είχαμε n(t)>0 και a_1(t+1)=0, a_2(t+1)=1, a_3(t+1)=1, τότε οι μηχανές M_2 και M_3 θα μπορούσαν να ολοκληρώσουν την επεξεργασία ενός προϊόντος η κάθε μια, ενώ η μηχανή M_1 δεν θα μπορούσε, με αποτέλεσμα η χωρητικότητα του συστήματος τη χρονική στιγμή t+1 να είναι ίδια με τη χωρητικότητα του συστήματος τη χρονική στιγμή t. Άρα θα έπρεπε n(t+1)=n(t)>0 που είναι άτοπο, άρα

$$p[0,0,1,1,] = 0$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι οι παρακάτω καταστάσεις είναι παροδικές (0,0,1,0), (0,1,0,0), (0,1,0,1), (0,1,1,0), (0,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,1,1), (N,0,0,1), (N,0,1,1), (N,1,0,1) και (N,1,1,1)..

Η εισαγωγή των βλαβών αδράνειας επηρεάζει τις εξισώσεις μετάβασης του συστήματος αυτού σε σχέση με το παρόμοιο σύστημα που εξετάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και χρησιμοποιήθηκε σαν δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης και δυνατότητα παραγωγής ενός τύπου προϊόντων. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι καταστάσεις που ήταν ανέφικτες για το σύστημα του προηγούμενου κεφαλαίου (όπως παραδείγματος χάρη οι καταστάσεις (0,0,0,0) και (N,0,0,0)), δεν είναι πλέον ανέφικτες στο σύστημα που εξετάζεται στο κεφάλαιο αυτό και έχουν μη μηδενική στάσιμη πιθανότητα.

Ανάλογα με την τιμή του αριθμού των προϊόντων στο σύστημα n, οι καταστάσεις του συστήματος διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες:: *΄΄κάτω οριακές καταστάσεις΄΄, ΄΄εσωτερικές καταστάσεις΄΄,* και *΄΄΄άνω οριακές καταστάσεις΄΄*.

Παρόμοια ονοματολογία χρησιμοποιείται και για τις εξισώσεις που οδηγούν στις καταστάσεις αυτές. Έτσι λοιπόν διακρίνουμε τρεις κατηγορίες εξισώσεων μετάβασης

(α) Εσωτερικές εξισώσεις μετάβασης
(β) Κάτω οριακές εξισώσεις μετάβασης
(γ) Άνω οριακές εξισώσεις μετάβασης

Εσωτερικές εξισώσεις μετάβασης
Καταστάσεις της μορφής (n, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$), όπου 2< n < N-2, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{0,1\}$ ονομάζονται εσωτερικές καταστάσεις. Οι εξισώσεις αυτές περιέχουν το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων μετάβασης που οδηγούν σε εσωτερικές καταστάσεις και λέγονται εσωτερικές εξισώσεις μετάβασης. Χρησιμοποιούνται για την εύρεση των

στάσιμων πιθανοτήτων των καταστάσεων αυτών. Οι εξισώσεις αυτές έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$p[n,0,0,0] = (1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)\,p[n,0,0,0] + (1-r_1)(1-r_2)\,p_3\,p[n,0,0,1] + (1-r_1)\,p_2\,(1-r_3)\,p[n,0,1,0] + (1-r_1)\,p_2\,p_3\,p[n,0,1,1] + p_1\,(1-r_2)(1-r_3)\,p[n,1,0,0] + p_1\,(1-r_2)\,p_3\,p[n,1,0,1] + p_1\,p_2\,(1-r_3)\,p[n,1,1,0] + p_1\,p_2\,p_3\,p[n,1,1,1] \quad (103)$$

$$p[n,0,0,1] = (1-r_1)(1-r_2)\,r_3\,p[n+1,0,0,0] + (1-r_1)(1-r_2)(1-p_3)\,p[n+1,0,0,1] + (1-r_1)\,p_2\,r_3\,p[n+1,0,1,0] + (1-r_1)\,p_2\,(1-p_3)\,p[n+1,0,1,1] + p_1\,(1-r_2)\,r_3\,p[n+1,1,0,0] + p_1\,(1-r_2)(1-p_3)\,p[n+1,1,0,1] + p_1\,p_2\,r_3\,p[n+1,1,1,0] + p_1\,p_2\,(1-p_3)\,p[n+1,1,1,1] \quad (104)$$

$$p[n,0,1,0,] = (1-r_1)r_2(1-r_3)p[n-1,0,0,0]+ (1-r_1)r_2p_3p[n-1,0,0,1]+ (1-r_1)(1-p_2)(1-r_3)p[n-1,0,1,0]+(1-r_1)(1-p_2)p_3p[n-1,0,1,1]+ p_1r_2(1-r_3)p[n-1,1,0,0]+p_1r_2p_3p[n-1,1,0,1]+ p_1(1-p_2)(1-r_3)p[n-1,1,1,0]+p_1(1-p_2)p_3p[n-1,1,1,1] \quad (105)$$

$$p[n,0,1,1]= (1-r_1)r_2r_3p[n,0,0,0]+ (1-r_1)r_2(1-p_3)p[n,0,0,1]+ (1-r_1)(1-p_2)r_3p[n,0,1,0]+ (1-r_1)(1-p_2)(1-p_3)p[n,0,1,1]+p_1r_2r_3p[n,1,0,0]+p_1r_2(1-p_3)p[n,1,0,1]+ p_1(1-p_2)r_3p[n,1,1,0]+p_1(1-p_2)(1-p_3)p[n,1,1,1] \quad (106)$$

$$p[n,1,0,0] = r_1(1-r_2)(1-r_3)p[n-1,0,0,0]+ r_1(1-r_2)p_3p[n-1,0,0,1]+ r_1p_2(1-r_3)p[n-1,0,1,0]+ r_1p_2p_3p[n-1,0,1,1]+ (1-p_1)(1-r_2)(1-r_3)\,p[n-1,1,0,0,]+ (1-p_1)(1-r_2)p_3p[n-1,1,0,1]+ (1-p_1)p_2(1-r_3)p[n-1,1,1,0]+ (1-p_1)p_2p_3p[n-1,1,1,1] \quad (107)$$

$$p[n,1,0,1] = r_1(1-r_2)r_3p[n,0,0,0]+ r_1(1-r_2)(1-p_3)p[n,0,0,1]+ r_1p_2r_3p[n,0,1,0]+ r_1p_2(1-p_3)p[n,0,1,1]+ (1-p_1)(1-r_2)r_3p[n,1,0,0]+ (1-p_1)(1-r_2)(1-p_3)p[n,1,0,1]+(1-p_1)p_2r_3p[n,1,1,0]+ (1-p_1)p_2(1-p_3)p[n,1,1,1] \quad (108)$$

$$p[n,1,1,0] = r_1r_2(1-r_3)p[n-2,0,0,0]+ r_1r_2p_3p[n-2,0,0,1]+ r_1(1-p_2)(1-r_3)p[n-2,0,1,0]+ r_1(1-p_2)p_3p[n-2,0,1,1]+ (1-p_1)r_2(1-r_3)p[n-2,1,0,0]+ (1-p_1)r_2p_3p[n-2,1,0,1]+ (1-p_1)(1-p_2)(1-r_3)p[n-2,1,1,0]+(1-p_1)(1-p_2)p_3p[n-2,1,1,1] \quad (109)$$

$$p[n,1,1,1] = r_1r_2r_3p[n-1,0,0,0]+ r_1r_2(1-p_3)p[n-1,0,0,1]+ r_1(1-p_2)r_3p[n-1,0,1,0]+ r_1(1-p_2)(1-p_3)p[n-1,0,1,1]+ (1-p_1)r_2r_3p[n-1,1,0,0]+ (1-p_1)r_2(1-p_3)p[n-1,1,0,1]+(1-p_1)(1-p_2)r_3p[n-1,1,1,0]+ (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)p[n-1,1,1,1] \quad (110)$$

Κάτω οριακές εξισώσεις μετάβασης:

Καταστάσεις της μορφής (n, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$), όπου n=0,1,2, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \{0,1\}$ ονομάζονται κάτω οριακές καταστάσεις. Οι εξισώσεις αυτές περιέχουν το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων μετάβασης που οδηγούν σε κάτω οριακές καταστάσεις και λέγονται κάτω οριακές εξισώσεις μετάβασης. Χρησιμοποιούνται για την εύρεση των στάσιμων πιθανοτήτων των καταστάσεων αυτών. Οι εξισώσεις αυτές έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$p[0,0,0,1] = (1-r_1)(1-r_2)r_3\,p[0,0,0,0]+(1-r_1)(1-r_2)(1-v_3)\,p[0,0,0,1] + (1-r_1)\,p_2\,r_3\,p[0,0,1,0]+(1-r_1)\,p_2\,(1-v_3)\,p[0,0,1,1] + p_1\,(1-r_2)\,r_3\,p[0,1,0,0] + p_1(1-r_2)(1-v_3)p[0,1,0,1] +p_1\,p_2\,r_3\,p[0,1,1,0] + p_1\,p_2\,(1-v_3)\,p[0,1,1,1] + (1-r_1)(1-r_2)\,r_3\,p[1,0,0,0] +(1-r_1)(1-r_2)(1-p_3)\,p[1,0,0,1] + (1-r_1)\,p_2\,r_3\,p[1,0,1,0] + (1-r_1)\,p_2\,(1-p_3)\,p[1,0,1,1] +p_1\,(1-r_2)\,r_3\,p[1,1,0,0]+ p_1\,(1-r_2)\,(1-p_3)\,p[1,1,0,1] + p_1\,p_2\,r_3\,p[1,1,1,0] + p_1\,p_2\,(1-p_3)\,p[1,1,1,1] \quad (111)$$

$$p[1,0,0,1] = (1-r_1)(1-r_2)\,r_3\,p[2,0,0,0] + (1-r_1)(1-r_2)(1-p_3)\,p[2,0,0,1] + (1-r_1)\,p_2\,r_3\,p[2,0,1,0] +(1-r_1)\,p_2\,(1-p_3)\,p[2,0,1,1] + p_1\,(1-r_2)\,r_3\,p[2,1,0,0] + p_1\,(1-r_2)\,(1-p_3)\,p[2,1,0,1] +p_1\,p_2\,r_3\,p[2,1,1,0] + p_1\,p_2\,(1-p_3)\,p[2,1,1,1] \quad (112)$$

$$p[0,0,0,0] = (1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)p[0,0,0,0]+ (1-r_1)(1-r_2)v_3p[0,0,0,1]+ (1-r_1)p_2(1-r_3)p[0,0,1,0]+(1-r_1)p_2v_3p[0,0,1,1]+ p_1(1-r_2)(1-r_3)p[0,1,0,0]+p_1(1-r_2)v_3p[0,1,0,1]+p_1p_2(1-r_3)p[0,1,1,0]+ p_1p_2v_3p[0,1,1,1] \quad (113)$$

$$p[1,0,0,0] = (1-r_1)\,(1-r_2)\,(1-r_3)\,p[1,0,0,0] + (1-r_1)\,(1-r_2)\,p_3\,p[1,0,0,1] + (1-r_1)\,p_2\,(1-r_3)\,p[1,0,1,0] + (1-r_1)\,p_2\,p_3\,p[1,0,1,1] + p_1\,(1-r_2)\,(1-r_3)\,p[1,1,0,0] + p_1\,(1-r_2)\,p_3\,p[1,1,0,1] + p_1\,p_2\,(1-r_3)\,p[1,1,1,0] + p_1\,p_2\,p_3\,p[1,1,1,1] \quad (114)$$

$$p[1,0,1,0] = (1-r_1)r_2(1-r_3)p[0,0,0,0]+ (1-r_1)r_2v_3p[0,0,0,1]+ (1-r_1)(1-p_2)(1-r_3)p[0,0,1,0]+ (1-r_1)(1-p_2)v_3p[0,0,1,1]+p_1r_2(1-r_3)p[0,1,0,0]+p_1r_2v_3p[0,1,0,1]+ p_1(1-p_2)(1-r_3)p[0,1,1,0]+p_1(1-p_2)v_3p[0,1,1,1] \quad (115)$$

$$p[1,0,1,1] = (1-r_1)r_2r_3p[0,0,0,0]+ (1-r_1)r_2(1-v_3)p[0,0,0,1]+ (1-r_1)(1-p_2)r_3p[0,0,1,0]+ (1-r_1)(1-p_2)(1-v_3)p[0,0,1,1]+p_1r_2r_3p[0,1,0,0]+p_1r_2(1-v_3)p[0,1,0,1]+ p_1(1-p_2)r_3p[0,1,1,0]+ p_1(1-p_2)(1-v_3)p[0,1,1,1]+ (1-r_1)r_2r_3p[1,0,0,0]+ (1-r_1)r_2(1-p_3)p[1,0,0,1]+ (1-r_1)(1-p_2)r_3p[1,0,1,0]+ (1-r_1)(1-p_2)(1-p_3)p[1,0,1,1]+p_1r_2r_3p[1,1,0,0]+p_1r_2(1-p_3)p[1,1,0,1]+ p_1(1-p_2)r_3p[1,1,1,0]+p_1(1-p_2)(1-p_3)p[1,1,1,1] \quad (116)$$

$$p[1,1,0,0] = r_1(1-r_2)(1-r_3)p[0,0,0,0]+ r_1(1-r_2)v_3p[0,0,0,1]+ r_1p_2(1-r_3)p[0,0,1,0]+ r_1p_2v_3p[0,0,1,1]+ (1-p_1)(1-r_2)(1-r_3)\,p[0,1,0,0,]+ (1-p_1)(1-r_2)v_3p[0,1,0,1]+ (1-p_1)p_2(1-r_3)p[0,1,1,0]+ (1-p_1)p_2v_3p[0,1,1,1] \quad (117)$$

$$p[1,1,0,1]= r_1(1-r_2)r_3p[0,0,0,0]+ r_1(1-r_2)(1-v_3)p[0,0,0,1]+ r_1p_2r_3p[0,0,1,0]+ r_1p_2(1-v_3)p[0,0,1,1]+ (1-p_1)(1-r_2)r_3p[0,1,0,0]+ (1-p_1)(1-r_2)(1-v_3)p[0,1,0,1]+ (1-p_1)p_2r_3p[0,1,1,0]+ (1-p_1)p_2(1-v_3)p[0,1,1,1]+ r_1(1-r_2)r_3p[1,0,0,0]+ r_1(1-r_2)(1-p_3)p[1,0,0,1]+ r_1p_2r_3p[1,0,1,0]+ r_1p_2(1-p_3)p[1,0,1,1]+ (1-p_1)(1-r_2)r_3p[1,1,0,0]+ (1-p_1)(1-r_2)(1-p_3)p[1,1,0,1]+(1-p_1)p_2r_3p[1,1,1,0]+ (1-p_1)p_2(1-p_3)p[1,1,1,1] \quad (118)$$

Οι εξισώσεις μετάβασης που οδηγούν στις καταστάσεις (2,0,0,0), (2,0,0,1), (2,0,1,0), (2,0,1,1), (2,1,0,0), (2,1,0,1) έχουν ακριβώς την ίδια μορφή με τις εσωτερικές εξισώσεις μετάβασης που οδηγούν στις καταστάσεις (n,0,0,0), (n,0,0,1), (n,0,1,0), (n,0,1,1), (n,1,0,0), (n,1,0,1), αντικαθιστώντας όπου n=2.

$$p[2,1,1,0] = r_1r_2(1-r_3)p[0,0,0,0]+ r_1r_2v_3p[0,0,0,1]+ r_1(1-p_2)(1-r_3)p[0,0,1,0]+ r_1(1-p_2)v_3p[0,0,1,1]+ (1-p_1)r_2(1-r_3)p[0,1,0,0]+ (1-p_1)r_2v_3p[0,1,0,1]+ (1-p_1)(1-p_2)(1-r_3)p[0,1,1,0]+(1-p_1)(1-p_2)v_3p[0,1,1,1] \quad (119)$$

$$p[2,1,1,1] = r_1r_2r_3p[0,0,0,0]+ r_1r_2(1-v_3)p[0,0,0,1]+ r_1(1-p_2)r_3p[0,0,1,0]+ r_1(1-p_2)(1-v_3)p[0,0,1,1]+ (1-p_1)r_2r_3p[0,1,0,0]+ (1-p_1)r_2(1-v_3)p[0,1,0,1]+ (1-p_1)(1-p_2)r_3p[0,1,1,0]+ (1-p_1)(1-p_2)(1-v_3)p[0,1,1,1] \quad (120)$$

Άνω οριακές εξισώσεις μετάβασης

Καταστάσεις της μορφής (n, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$), όπου n=N-1, N-2, N, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \{0,1\}$ ονομάζονται άνω οριακές καταστάσεις. Οι εξισώσεις αυτές περιέχουν το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων μετάβασης που οδηγούν σε άνω οριακές καταστάσεις και λέγονται άνω οριακές εξισώσεις μετάβασης. Χρησιμοποιούνται για την εύρεση των στάσιμων πιθανοτήτων των καταστάσεων αυτών. Οι εξισώσεις αυτές έχουν την ακόλουθη μορφή:

Οι εξισώσεις μετάβασης που οδηγούν στις καταστάσεις (N-2,0,0,0), (N-2,0,1,0), (N-2,1,0,0), (N-2,1,0,1), (N-2,1,1,0) και (N-2,1,1,1) έχουν ακριβώς την ίδια μορφή με τις εσωτερικές εξισώσεις μετάβασης που οδηγούν στις καταστάσεις (n,0,0,0), (n,0,1,0), (n,1,0,0), (n,1,0,1), (n,1,1,0), (n,1,1,1), αντικαθιστώντας όπου n=N-2.

$$p[N,0,0,0] = (1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)p[N,0,0,0] + (1-r_1)(1-r_2)p_3\,p[N,0,0,1] + (1-r_1)v_2(1-r_3)p[N,0,1,0]+(1-r_1)v_2p_3\,p[N,0,1,1] + v_1(1-r_2)(1-r_3)p[N,1,0,0] + v_1(1-r_2)p_3\,p[N,1,0,1] + v_1v_2(1-r_3)p[N,1,1,0] + v_1v_2p_3\,p[N,1,1,1] \quad (121)$$

$$p[N-1,1,1,0] = r_1r_2(1-r_3)p[N-3,0,0,0] + r_1r_2p_3\,p[N-3,0,0,1] + r_1(1-p_2)(1-r_3)p[N-3,0,1,0] + r_1(1-p_2)p_3\,p[N-3,0,1,1] + (1-p_1)r_2(1-r_3)p[N-3,1,0,0] + (1-p_1)r_2p_3\,p[N-3,1,0,1] + (1-p_1)(1-p_2)(1-r_3)p[N-3,1,1,0] + (1-p_1)(1-p_2)p_3\,p[N-3,1,1,1] \quad (122)$$

$$p[N-2,0,0,1] = (1-r_1)(1-r_2)r_3\,p[N-1,0,0,0] + (1-r_1)(1-r_2)(1-p_3)p[N-1,0,0,1] + (1-r_1)v_2r_3\,p[N-1,0,1,0] + (1-r_1)v_2(1-p_3)p[N-1,0,1,1] + p_1(1-r_2)r_3\,p[N-1,1,0,0] + p_1(1-r_2)(1-p_3)p[N-1,1,0,1] + p_1v_2r_3\,p[N-1,1,1,0] + p_1v_2(1-p_3)p[N-1,1,1,1] \quad (123)$$

$$p[N-2,0,1,1]= (1-r_1)r_2r_3p[N-2,0,0,0]+ (1-r_1)r_2(1-p_3)p[N-2,0,0,1]+ (1-r_1)(1-p_2)r_3p[N-2,0,1,0]+(1-r_1)(1-p_2)(1-p_3)p[N-2,0,1,1]+ p_1r_2r_3p[N-2,1,0,0]+p_1r_2(1-p_3)p[N-2,1,0,1]+p_1(1-p_2)r_3p[N-2,1,1,0]+ p_1(1-p_2)(1-p_3)p[N-2,1,1,1]+ (1-r_1)r_2r_3p[N-1,0,0,0]+ (1-r_1)r_2(1-p_3)p[N-1,0,0,1]+ (1-r_1)(1-v_2)r_3p[N-1,0,1,0]+ (1-r_1)(1-v_2)(1-p_3)p[N-1,0,1,1]+p_1r_2r_3p[N-1,1,0,0]+p_1r_2(1-p_3)p[N-1,1,0,1]+ p_1(1-v_2)r_3p[N-1,1,1,0]+p_1(1-v_2)(1-p_3)p[N-1,1,1,1] \quad (124)$$

$$p[N-1,0,0,0] = (1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)\,p[N-1,0,0,0] + (1-r_1)(1-r_2)\,p_3\,p[N-1,0,0,1] + (1-r_1)\,v_2\,(1-r_3)\,p[N-1,0,1,0] + (1-r_1)\,v_2\,p_3\,p[N-1,0,1,1] + p_1\,(1-r_2)(1-r_3)\,p[N-1,1,0,0] + p_1\,(1-r_2)\,p_3\,p[N-1,1,0,1] + p_1\,v_2\,(1-r_3)\,p[N-1,1,1,0] + p_1\,v_2\,p_3\,p[N-1,1,1,1] \quad (125)$$

$$p[N-1,0,0,1] = (1-r_1)(1-r_2)\,r_3\,p[N,0,0,0] + (1-r_1)(1-r_2)(1-p_3)\,p[N,0,0,1] + (1-r_1)\,v_2\,r_3\,p[N,0,1,0] + (1-r_1)\,v_2\,(1-v_3)\,p[N,0,1,1] + v_1\,(1-r_2)\,r_3\,p[N,1,0,0] + v_1\,(1-r_2)(1-p_3)\,p[N,1,0,1] + v_1\,v_2\,r_3\,p[N,1,1,0] + v_1\,v_2\,(1-p_3)\,p[n+1,1,1,1] \quad (126)$$

$$p[N-1,0,1,0,] = (1-r_1)r_2(1-r_3)p[N-1,0,0,0]+ (1-r_1)r_2p_3p[N-1,0,0,1]+ (1-r_1)(1-v_2)(1-r_3)p[N-1,0,1,0]+ (1-r_1)(1-v_2)p_3p[N-1,0,1,1]+ p_1r_2(1-r_3)p[N-1,1,0,0]+p_1r_2p_3p[N-1,1,0,1]+ p_1(1-v_2)(1-r_3)p[N-1,1,1,0]+p_1(1-v_2)p_3p[N-1,1,1,1]+ (1-r_1)r_2(1-r_3)p[N-2,0,0,0]+ (1-r_1)r_2p_3p[N-2,0,0,1]+ (1-r_1)(1-p_2)(1-r_3)p[N-2,0,1,0]+(1-r_1)(1-p_2)p_3p[N-2,0,1,1]+ p_1r_2(1-r_3)p[N-2,1,0,0]+p_1r_2p_3p[N-2,1,0,1]+ p_1(1-p_2)(1-r_3)p[N-2,1,1,0]+p_1(1-p_2)p_3p[N-2,1,1,1] \quad (127)$$

$$p[N-1,0,1,1]= (1-r_1)r_2r_3p[N,0,0,0]+ (1-r_1)r_2(1-p_3)p[N,0,0,1]+ (1-r_1)(1-v_2)r_3p[N,0,1,0]+ (1-r_1)(1-v_2)(1-p_3)p[N,0,1,1]+v_1r_2r_3p[N,1,0,0]+v_1r_2(1-p_3)p[N,1,0,1]+ v_1(1-v_2)r_3p[N,1,1,0]+v_1(1-v_2)(1-p_3)p[N,1,1,1] \quad (128)$$

$$p[N-1,1,0,0] = r_1(1-r_2)(1-r_3)p[N-2,0,0,0]+ r_1(1-r_2)p_3p[N-2,0,0,1]+ r_1p_2(1-r_3)p[N-2,0,1,0]+r_1p_2p_3p[N-2,0,1,1]+ (1-p_1)(1-r_2)(1-r_3)\,p[N-2,1,0,0,]+ (1-p_1)(1-r_2)p_3p[N-2,1,0,1]+ (1-p_1)p_2(1-r_3)p[N-2,1,1,0]+ (1-p_1)p_2p_3p[N-2,1,1,1] \quad (129)$$

$$p[N-1,1,0,1] = r_1(1-r_2)r_3p[N-1,0,0,0]+ r_1(1-r_2)(1-p_3)p[N-1,0,0,1]+ r_1v_2r_3p[N-1,0,1,0]+ r_1v_2(1-p_3)p[N-1,0,1,1]+ (1-p_1)(1-r_2)r_3p[N-1,1,0,0]+ (1-p_1)(1-r_2)(1-p_3)p[N-1,1,0,1]+ (1-p_1)v_2r_3p[N-1,1,1,0]+ (1-p_1)v_2(1-p_3)p[N-1,1,1,1]+ r_1(1-r_2)r_3p[N,0,0,0]+ r_1(1-r_2)(1-p_3)p[N,0,0,1]+ r_1v_2r_3p[N,0,1,0]+ r_1v_2(1-p_3)p[N,0,1,1]+ (1-v_1)(1-r_2)r_3p[N,1,0,0]+ (1-v_1)(1-r_2)(1-p_3)p[N,1,0,1]+ (1-v_1)v_2r_3p[N,1,1,0]+ (1-v_1)v_2(1-p_3)p[N,1,1,1] \quad (130)$$

$$p[N-1,1,1,1] = r_1r_2r_3p[N-1,0,0,0]+ r_1r_2(1-p_3)p[N-1,0,0,1]+ r_1(1-v_2)r_3p[N-1,0,1,0]+ r_1(1-v_2)(1-p_3)p[N-1,0,1,1]+ (1-p_1)r_2r_3p[N-1,1,0,0]+ (1-p_1)r_2(1-p_3)p[N-1,1,0,1]+(1-p_1)(1-v_2)r_3p[N-1,1,1,0]+ (1-p_1)(1-v_2)(1-p_3)p[N-1,1,1,1]+ r_1r_2r_3p[N-2,0,0,0]+ r_1r_2(1-p_3)p[N-2,0,0,1]+ r_1(1-p_2)r_3p[N-2,0,1,0]+ r_1(1-p_2)(1-p_3)p[N-2,0,1,1]+(1-p_1)r_2r_3p[N-2,1,0,0]+ (1-p_1)r_2(1-p_3)p[N-2,1,0,1]+ (1-p_1)(1-p_2)r_3p[N-2,1,1,0]+ (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)p[N-2,1,1,1]+ r_1r_2r_3p[N,0,0,0]+ r_1r_2(1-p_3)p[N,0,0,1]+ r_1(1-v_2)r_3p[N,0,1,0]+ r_1(1-v_2)(1-p_3)p[N,0,1,1]+ (1-v_1)r_2r_3p[N,1,0,0]+ (1-v_1)r_2(1-p_3)p[N,1,0,1]+ (1-v_1)(1-v_2)r_3p[N,1,1,0]+ (1-v_1)(1-v_2)(1-p_3)p[N,1,1,1] \quad (131)$$

$$p[N,0,1,0] = (1-r_1)r_2(1-r_3)p[N,0,0,0]+ (1-r_1)r_2p_3p[N,0,0,1]+ (1-r_1)(1-v_2)(1-r_3)p[N,0,1,0]+(1-r_1)(1-v_2)p_3p[N,0,1,1]+ v_1r_2(1-r_3)p[N,1,0,0]+v_1r_2p_3p[n-1,1,0,1]+v_1(1-v_2)(1-r_3)p[N,1,1,0]+ v_1(1-v_2)p_3p[N,1,1,1] \quad (132)$$

$$p[N,1,0,0] = r_1(1-r_2)(1-r_3)p[N-1,0,0,0]+ r_1(1-r_2)p_3p[N-1,0,0,1]+ r_1v_2(1-r_3)p[N-1,0,1,0]+r_1v_2p_3p[N-1,0,1,1]+ (1-p_1)(1-r_2)(1-r_3)\ p[N-1,1,0,0,]+ (1-p_1)(1-r_2)p_3p[N-1,1,0,1]+ (1-p_1)v_2(1-r_3)p[N-1,1,1,0]+ (1-p_1)v_2p_3p[N-1,1,1,1]+ r_1(1-r_2)(1-r_3)p[N,0,0,0]+ r_1(1-r_2)p_3p[N,0,0,1]+ r_1v_2(1-r_3)p[N,0,1,0]+ r_1v_2p_3p[N,0,1,1]+ (1-v_1)(1-r_2)(1-r_3)\ p[N,1,0,0,]+ (1-v_1)(1-r_2)p_3p[N,1,0,1]+ (1-v_1)v_2(1-r_3)p[N,1,1,0]+ (1-v_1)v_2p_3p[N,1,1,1] \quad (133)$$

$$p[N,1,1,0] = r_1r_2(1-r_3)p[N-2,0,0,0]+ r_1r_2p_3p[N-2,0,0,1]+ r_1(1-p_2)(1-r_3)p[N-2,0,1,0]+ r_1(1-p_2)p_3p[N-2,0,1,1]+ (1-p_1)r_2(1-r_3)p[N-2,1,0,0]+ (1-p_1)r_2p_3p[N-2,1,0,1]+(1-p_1)(1-p_2)(1-r_3)p[N-2,1,1,0]+ (1-p_1)(1-p_2)p_3p[N-2,1,1,1]+r_1r_2(1-r_3)p[N-1,0,0,0]+r_1r_2p_3p[N-1,0,0,1]+ r_1(1-v_2)(1-r_3)p[N-1,0,1,0]+ r_1(1-v_2)p_3p[N-1,0,1,1]+ (1-p_1)r_2(1-r_3)p[N-1,1,0,0]+ (1-p_1)r_2p_3p[N-1,1,0,1]+ (1-p_1)(1-v_2)(1-r_3)p[N-1,1,1,0]+(1-p_1)(1-v_2)p_3p[N-1,1,1,1]+ r_1r_2(1-r_3)p[N,0,0,0]+ r_1r_2p_3p[N,0,0,1]+ r_1(1-v_2)(1-r_3)p[N,0,1,0]+ r_1(1-v_2)p_3p[N,0,1,1]+(1-v_1)r_2(1-r_3)p[N,1,0,0]+ (1-v_1)r_2p_3p[N,1,0,1]+ (1-v_1)(1-v_2)(1-r_3)p[N,1,1,0]+(1-v_1)(1-v_2)p_3p[N,1,1,1] \quad (134)$$

Η ταυτόχρονη επίλυση και των τριών αυτών κατηγοριών εξισώσεων οδηγεί στην εύρεση των στάσιμων πιθανοτήτων όλων των πιθανών καταστάσεων του συστήματος με χρήση των οποίων μπορούμε να βρούμε τα μέτρα απόδοσης του συστήματος.
Είναι προφανές ότι το πλήθος των εξισώσεων αυξάνεται καθώς η συνολική χωρητικότητα N του συστήματος αυξάνει. Επειδή όμως όπως ήδη έχουμε αναφέρει N=C+3 ισοδύναμα το πλήθος των εξισώσεων αυξάνει καθώς η χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου αυξάνει. Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος ο οποίος σχηματίζει αυτόματα όλες τις εξισώσεις μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή του N.

4.8 Αλγόριθμος για τη δημιουργία του πίνακα μετάβασης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος με χρήση του οποίου σχηματίζεται ο πίνακας μετάβασης του συστήματος του σχήματος 21 για οποιαδήποτε τιμή της χωρητικότητας του συστήματος N>5. Ο αλγόριθμος αυτός είναι επαναληπτικός και χρησιμοποιεί σαν αρχική τιμή τον αντίστοιχο πίνακα μετάβασης όταν N=5. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα μετάβασης αυτόν, μπορεί να υπολογίσει κάποιος τις εξισώσεις μετάβασης και τον αντίστοιχο πίνακα μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή του N>5.

4.8.1 Ο αριθμός των πιθανών καταστάσεων

Πριν προχωρήσουμε στη παρουσίαση του αλγόριθμου για τη δημιουργία του πίνακα μετάβασης, παρουσιάζεται ένας τύπος με βάση τον οποίο μπορεί να υπολογιστεί ο

αριθμός των πιθανών καταστάσεων (εξαιρουμένων των παροδικών καταστάσεων), για οποιαδήποτε τιμή του $N \geq 5$. Για κάθε τιμή n της συνολικής χωρητικότητας N του συστήματος υπάρχουν 8 πιθανές καταστάσεις εκτός όταν n=0,1,N. Όταν n=0,1,N υπάρχουν λιγότερες καταστάσεις διότι για τις συγκεκριμένες τιμές του n υπάρχουν οι παροδικές καταστάσεις που επειδή έχουν μηδενική στάσιμη πιθανότητα δεν χρειάζεται να λαμβάνονται υπόψη. Όταν n=0 υπάρχουν 2 πιθανές καταστάσεις, όταν n=1 υπάρχουν 6 πιθανές καταστάσεις και όταν n=N υπάρχουν 4 πιθανές καταστάσεις. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι N=5, τότε για κάθε n=2,3,4 υπάρχουν 8 καταστάσεις της μορφής (n, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$), $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{0,1\}$. Όταν n=0 υπάρχουν 2 πιθανές καταστάσεις οι (0,0,0,0), (0,0,0,1), όταν n=1 υπάρχουν 6 πιθανές καταστάσεις οι (1,0,0,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), (1,0,1,1), (1,1,0,0), (1,1,0,1) και όταν n=N υπάρχουν 4 πιθανές καταστάσεις οι (5,0,0,0), (5,0,1,0). (5,1,0,0), (5,1,1,0)
Με $S_{j,N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των πιθανών καταστάσεων του συστήματος (εξαιρουμένων των παροδικών καταστάσεων) όταν ο αριθμός των προϊόντων είναι ίσος με j $0 \leq j \leq N$ και η συνολική χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου είναι ίση με N. Τα σύνολα $S_{J,N}$, j=0,…,N όταν N=5 έχουν ως εξής:

$S_{0,N}$ = { (0,0,0,0), (0,0,0,1) }
$S_{1,N}$ = { (1,0,0,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), (1,0,1,1), (1,1,0,0), (1,1,0,1) }
$S_{i,N}$ = { (i,0,0,0), (i,0,0,1), (i,0,1,0), (i,0,1,1), (i,1,0,0), (i,1,0,1), (i,1,1,0),(i,1,1,1) }, i=2,…,N-1
$S_{N,N}$ = { (N,0,0,0), (N,0,1,0), (N,1,0,0), (N,1,1,0) }

Ο αριθμός των καταστάσεων του συστήματος είναι ίσος με

$$S_{0,N}+S_{1,N}+S_{2,N}+\ldots+S_{N-1,N}+S_{N,N} = 2+6+8+\ldots+8+4 =$$
$$= 2+6+[(N-2)x8]+4 =$$
$$= 12+[(N-2)x8] =$$
$$= 12+(8xN)-16 =$$
$$= 8 \cdot N - 4$$

Για οποιαδήποτε τιμή N της συνολικής χωρητικότητας του συστήματος, ο αριθμός των καταστάσεων του συστήματος m_N με μη μηδενική στάσιμη πιθανότητα δίνεται από τον τύπο

$$m_N = 8 \cdot N - 4 \qquad (135)$$

4.8.2 Ο πίνακας μετάβασης για N=5

Η μορφή του πίνακα μετάβασης όταν η συνολική χωρητικότητα του συστήματος είναι ίση με πέντε προϊόντα (N=5), παρουσιάζεται στην ενότητα αυτή. Με βάση τον πίνακα αυτό μπορεί να σχηματιστεί οποιοσδήποτε άλλος πίνακας μετάβασης του συστήματος για οποιαδήποτε τιμή του N.
Ο πίνακας μετάβασης είναι ένας πίνακας του οποίου οι γραμμές και οι στήλες αποτελούνται από τις πιθανές καταστάσεις του συστήματος. Είναι προφανές ότι η διάσταση του πίνακα μετάβασης P_N για οποιαδήποτε τιμή του N είναι $m_N X m_N$.

Επίσης ένα στοιχείο $p_{i,j}$, i,j=0,…, m_N του πίνακα μετάβασης P_N συμβολίζει τη πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j.
Είναι προφανές ότι όταν N=5 η διάσταση του πίνακα μετάβασης P_5 είναι ίση με $m_5 X m_5 = 36 X 36$.Ο πίνακας μετάβασης P_5 έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας 13: Ο πίνακας μετάβασης όταν N=5

$$P_5 = \begin{vmatrix} S_{0,5}S_{0,5} & S_{0,5}S_{1,5} & S_{0,5}S_{2,5} & S_{0,5}S_{3,5} & S_{0,5}S_{4,5} & S_{0,5}S_{5,5} \\ S_{1,5}S_{0,5} & S_{1,5}S_{1,5} & S_{1,5}S_{2,5} & S_{1,5}S_{3,5} & S_{1,5}S_{4,5} & S_{1,5}S_{5,5} \\ S_{2,5}S_{0,5} & S_{2,5}S_{1,5} & S_{2,5}S_{2,5} & S_{2,5}S_{3,5} & S_{2,5}S_{4,5} & S_{2,5}S_{5,5} \\ S_{3,5}S_{0,5} & S_{3,5}S_{1,5} & S_{3,5}S_{2,5} & S_{3,5}S_{3,5} & S_{3,5}S_{4,5} & S_{3,5}S_{5,5} \\ S_{4,5}S_{0,5} & S_{4,5}S_{1,5} & S_{4,5}S_{2,5} & S_{4,5}S_{3,5} & S_{4,5}S_{4,5} & S_{4,5}S_{5,5} \\ S_{5,5}S_{0,5} & S_{5,5}S_{1,5} & S_{5,5}S_{2,5} & S_{5,5}S_{3,5} & S_{5,5}S_{4,5} & S_{5,5}S_{5,5} \end{vmatrix}$$

Οι υποπίνακες $S_{i,5}S_{j,5}$,i, ,j = 0,1,2,3,4,5 είναι (k x ℓ) υποπίνακες του πίνακα P_5, οι οποίοι περιγράφουν τις πιθανότητες μετάβασης από τις καταστάσεις {i, a_1, a_2, a_3} στις καταστάσεις {j, a_1, a_2, a_3}. Όπου k είναι ο πληθάριθμος του συνόλου $S_{i,5}$. και ℓ είναι ο πληθάριθμος του συνόλου $S_{j,5}$.

Για παράδειγμα ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{1,5}$ είναι ένας υποπίνακας (6 x 6) διότι το σύνολο $S_{1,5}$ αποτελείται από 6 καταστάσεις οι οποίες περιγράφουν τις πιθανότητες μετάβασης από τις καταστάσεις {1, a_1, a_2, a_3} στις καταστάσεις {1, a_1, a_2, a_3} και παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα. Όλοι οι υπόλοιποι υποπίνακες που χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία του πίνακα μετάβασης P_5 παρουσιάζονται αναλυτικά στο παράρτημα Β.

Πίνακας 14: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{1,5}$

States	(1,0,0,0)	(1,0,0,1)	(1,0,1,0)	(1,0,1,1)	(1,1,0,0)	(1,1,0,1)
(1,0,0,0)	$(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$(1-r_1)r_2r_3$	0	$r_1(1-r_2)r_3$
(1,0,0,1)	$(1-r_1)(1-r_2)p_3$	0	0	$(1-r_1)r_2(1-p_3)$	0	$r_1(1-r_2)(1-p_3)$
(1,0,1,0)	$(1-r_1)p_2(1-r_3)$	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)r_3$	0	$r_1p_2r_3$
(1,0,1,1)	$(1-r_1)p_2p_3$	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)(1-p_3)$	0	$r_1p_2(1-p_3)$
(1,1,0,0)	$p_1(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$p_1r_2r_3$	0	$(1-p_1)(1-r_2)r_3$
(1,1,0,1)	$p_1(1-r_2)p_3$	0	0	$p_1r_2(1-p_3)$	0	$(1-p_1)(1-r_2)(1-p_3)$

Για παράδειγμα το στοιχείο που ανήκει στη δεύτερη γραμμή και τέταρτη στήλη του υποπίνακα $S_{1,5}S_{1,5}$ περείεχει τη πιθανότητα μετάβασης από τη κατάσταση (1,0,0,1) στη κατάσταση (1,0,1,1) και είναι ίση με $(1-r_1)r_2(1-p_3)$.

4.8.3 Ο αλγόριθμος για τη γένεση του πίνακα μετάβασης P_N

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ο αλγόριθμος που υπολογίζει τον πίνακα μετάβασης του συστήματος του σχήματος 21 για οποιαδήποτε τιμή N του συνολικού αποθηκευτικού χώρου. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί σαν βασικό δομικό στοιχείο τον πίνακα μετάβασης για N=5 και τους υποπίνακες $S_{i,5}S_{j,5}$,i, ,j = 0,1,2,3,4,5 που παρουσιάστηκαν πριν. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο αυτό, δεν είναι αναγκαίο κάθε φορά για κάθε τιμή του N, να υπολογίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ καταστάσεων του συστήματος. Αυτό που αρκεί είναι η γνώση των πιθανοτήτων μετάβασης για N=5 και με βάση τις πιθανότητες αυτές είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε κάθε πιθανότητα μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή του N.
Μετά τον υπολογισμό του πίνακα μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή του N, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε όλες τις στάσιμες πιθανότητες και κατά συνέπεια τα μέτρα απόδοσης του συστήματος.
Ένας παρόμοιος αλγόριθμος ο οποίος γεννά τους πίνακες μετάβασης για σειριακές γραμμές παραγωγής με εκθετικά κατανεμημένους χρόνους επεξεργασίας παρουσιάσθηκε από τους Papadopoulos and O'Kelly (1989).
Ο αλγόριθμος αποτελείται από τρία βήματα τα οποία έχουν ως εξής:

Βήμα 1: Δημιουργία υποπινάκων οι οποίοι περιέχουν τις πιθανότητες μετάβασης που οδηγούν σε καταστάσεις με n=0,1.
Βήμα 2: Δημιουργία υποπινάκων οι οποίοι περιέχουν τις πιθανότητες μετάβασης που οδηγούν σε καταστάσεις με n=2,…N-2.
Βήμα 3: Δημιουργία υποπινάκων οι οποίοι περιέχουν τις πιθανότητες μετάβασης που οδηγούν σε καταστάσεις με n=N-1, N.

Τα βήματα του αλγόριθμου παρουσιάζονται υπό μορφή ψευτοκώδικα και έχουν ως εξής:

Βήμα 1^{ο} : (Δημιουργία των πιθανοτήτων μετάβασης που οδηγούν σε καταστάσεις με n=0,1)

Δημιούργησε τους υποπίνακες $S_{0,N}S_{i,N}$, $S_{1,N}S_{i,N}$, $0 \le i \le 5$, ως εξής:

$$S_{j,N}S_{i,N} = S_{j,5}S_{i,5} \;\forall\; N \ge 6,\ 0 \le i \le 5,\ j = 0,1$$

$$\forall\, i \ge 6 \quad S_{j,N}S_{i,N} = 0, \quad N \ge 6 \text{ and } j = 0,1$$

Βήμα 2^{ο}: (Δημιουργία των πιθανοτήτων μετάβασης που οδηγούν σε καταστάσεις με n=2,…, N-2)

$\forall\, N \ge 6,\ 2 \le K \le N-2,\ M = 0,...,N$ *:*

For K=2 **to** N-2 **do**

For M = 0 **to** M = N **do**

Δημιουργία των υποπινάκων $S_{K,N}S_{M,N}$

Case 1:

$K > M$ and $K - M > 1$ set $S_{K,N}S_{M,N} = 0$

Case 2

$K=2$ and $M=1$ set $S_{K,N}S_{M,N} = S_{2,5}S_{1,5}$

Case 3:

$K > M$ and $K - M = 1$ and $K+M \neq 3$ set $S_{K,N}S_{M,N} = S_{3,5}S_{2,5}$

Case 4:

$K = M$ set $S_{K,N}S_{M,N} = S_{3,5}S_{3,5}$

Case 5:

$M>K$ and $M-K=1$ and $N-M= 1$ set $S_{K,N}S_{M,N} = S_{3,5}S_{4,5}$

Case 6:

$M>K$ and $M-K= 1$ and $N-M>1$ set $S_{K,N}S_{M,N} = S_{2,5}S_{3,5}$

Case 7:

$M>K$ and $M-K=2$ and $N-M=0$ set $S_{K,N}S_{M,N} = S_{3,5}S_{5,5}$

Case 8:

$M>K$ and $M-K=2$ and $N-M=1$ set $S_{K,N}S_{M,N} = S_{2,5}S_{4,5}$

Case 9:

$M>K$ and $M-K=2$ and $N-M>1$ set $S_{K,N}S_{M,N} = S_{2,5}S_{4,5}$

Case 10:

$M - K > 2$ set $S_{K,N}S_{M,N} = 0$

End for

End For

Βήμα 3^o : (Δημιουργία των πιθανοτήτων μετάβασης που οδηγούν σε καταστάσεις με n=N-1,N)

$\forall\ N \geq 6$ *, M = 0,1,2,...,N:*

For M = 0 **to** M = N **do**

Δημιουργία των υποπινάκων $S_{N-1,N}S_{M,N}$

Case 1:

$(N-1) - M \geq 2$ set $S_{N-1,N}S_{M,N} = 0$

Case 2:

$(N-1) - M = 1$ set $S_{N-1,N}S_{M,N} = S_{4,5}S_{3,5}$

Case 3:

$N-1 = M$ set $S_{N-1,N}S_{M,N} = S_{4,5}S_{4,5}$

Case 4:

M > N-1 and M - (N-1) = 1 then $S_{N-1,N}S_{M,N} = S_{4,5}S_{5,5}$

End For

For M = 0 **to** M = N **do**

Δημιουργία των υποπινάκων $S_{N,N}S_{M,N}$

Case 1:

$N - M \geq 2$ set $S_{N,N}S_{M,N} = 0$

Case 2:

$N - M = 1$ set $S_{N,N}S_{M,N} = S_{5,5}S_{4,5}$

Case 3:

$N = M$ set $S_{N,N}S_{M,N} = S_{5,5}S_{5,5}$

End For

4.9 Μέτρα απόδοσης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα μέτρα απόδοσης του συστήματος του σχήματος 21. Αν θεωρήσουμε ότι όλες οι στάσιμες πιθανότητες $p[n, a_1, a_2, a_3]$, n=0,…,N των καταστάσεων του συστήματος είναι γνωστές, τα μέτρα απόδοσης του συστήματος είναι δυνατό να υπολογιστούν.

Ο αριθμός των ημι-ακατέργαστων προϊόντων που υπάρχουν στο σύστημα (WIP), $\bar{n}$ του συστήματος δίνεται από τον τύπο

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{a_1=0}^{1} \sum_{a_2=0}^{1} \sum_{a_3=0}^{1} n \; p[n, a_1, a_2, a_3] \tag{136}$$

Αν p_i και r_i είναι οι πιθανότητες εμφάνισης και επιδιόρθωσης βλαβών της μηχανής M_i, αντίστοιχα, τότε με $e_i = \frac{r_i}{r_i + p_i}$, i=1,2,3 συμβολίζουμε το ποσοστό του χρόνου στο οποίο η μηχανή M_i λειτουργεί. Οι βλάβες αδράνειας δεν λαμβάνονται υπόψη στον υπολογισμό της ποσότητας e_i διότι παρουσιάζονται όταν η μηχανή $M_ι$ είναι σε αδράνεια και κατά συνέπεια δεν παίζουν κανένα ρόλο στο χρονικό διάστημα στο οποίο η μηχανή $M_ι$ λειτουργεί.

Με άλλα λόγια η ποσότητα $e_i, i = 1,2,3$ εκφράζει την απόδοση της μηχανής M_i, αντίστοιχα, αν αυτή λειτουργούσε μόνη της απομονωμένη από το υπόλοιπο σύστημα, χωρίς την παρουσία άλλων μηχανών και του ενδιάμεσου αποθηκευτικού χώρου.

Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 είναι ίση με την απόδοση της μηχανής M_3.

$$PR = e_3(1 - p_s) + e_3 v_3 p_s \left[\frac{r_3 + p_3 - 1}{r_3} - \frac{(1 - r_1)(1 - r_2)(p_3 + r_3)}{1 - (1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_3)} \right] \tag{137}$$

όπου, p_s =p[0,0,0,1] είναι η πιθανότητα η μηχανή M_3 να είναι άδεια και v_3 πιθανότητα εμφάνισης βλάβης αδράνειας της μηχανής M_3.
Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε την πιθανότητα εμφάνισης βλάβης αδράνειας v_3 να είναι ίση με μηδέν, τότε ο τύπος που περιγράφει την απόδοση του συστήματος γίνεται $PR = e_3(1 - p_s)$ και είναι ο ίδιος με τον τύπο που περιγράφει την απόδοση του παρόμοιου συστήματος που χρησιμοποιήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο σαν δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης για την ανάλυση γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης και δυνατότητα παραγωγής ενός τύπου προϊόντων.

Η απόδειξη για τον τύπο αυτό είναι η εξής

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 δίνεται από τον τύπο (137)

Απόδειξη:

Για τη μηχανή M_3 του συστήματος του σχήματος 21 ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα

$$\begin{aligned} A_3 &= \Pr[\alpha_3(t) = 1 \cap n(t) > 0] \\ D_3 &= \Pr[\alpha_3(t) = 0 \cap n(t) > 0] \\ F_3 &= \Pr[\alpha_3(t) = 0 \cap n(t) = 0] \\ p_s &= \Pr[\alpha_3(t) = 1 \cap n(t) = 0] \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι ισχύει

$$A_3+D_3+F_3+p_s=1 \qquad (138)$$

Επειδή στη στάσιμη κατάσταση του συστήματος για κάθε βλάβη θα πρέπει να υπάρχει και μια αντίστοιχη επιδιόρθωση (ή ισοδύναμα η συχνότητα εμφάνισης βλαβών είναι ίση με τη συχνότητα που γίνονται οι επιδιορθώσεις των βλαβών), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &r_3 \Pr[\alpha_3(t) = 0 \cap n(t) > 0] + r_3 \Pr[\alpha_3(t) = 0 \cap n(t) = 0] = \\ &= p_3 \Pr[\alpha_3(t) = 1 \cap n(t) > 0] + v_3 \Pr[\alpha_3(t) = 1 \cap n(t) = 0] \end{aligned} \qquad (139)$$

Η απόδοση της μηχανής M_3 και κατά συνέπεια και του συστήματος PR δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} PR = \Pr[\alpha_3(t+1) = 1 \cap n(t) > 0] &= \Pr[\alpha_3(t+1) = 1 / \alpha_3(t) = 1 \cap n(t) > 0] \Pr[\alpha_3(t) = 1 \cap n(t) > 0] + \\ &\Pr[\alpha_3(t+1) = 1 / \alpha_3(t) = 0 \cap n(t) > 0] \Pr[\alpha_3(t) = 0 \cap n(t) > 0] \\ &= (1 - p_3) \Pr[\alpha_3(t) = 1 \cap n(t) > 0] + r_3 \Pr[\alpha_3(t) = 0 \cap n(t) > 0] \\ &= \Pr[\alpha_3(t) = 1 \cap n(t) > 0] - p_3 \Pr[\alpha_3(t) = 1 \cap n(t) > 0] + \\ &\quad r_3 \Pr[\alpha_3(t) = 0 \cap n(t) > 0] \end{aligned}$$

(140)

Χρησιμοποιώντας την ισότητα (139), η ισότητα (140) γίνεται

$$PR = \Pr[\alpha_3(t)=1 \cap n(t)>0] + v_3 \Pr[\alpha_3(t)=1 \cap n(t)=0] - r_3 \Pr[\alpha_3(t)=0 \cap n(t)=0] = \\ = A_3 + v_3 p_s - r_3 F_3 \Rightarrow A_3 = PR - v_3 p_s + r_3 F_3 \tag{141}$$

Ξαναγράφοντας την εξίσωση (139) και χρησιμοποιώντας τα γεγονότα A_3,D_3,F_3 και p_s έχουμε ότι

$$r_3 D_3 + r_3 F_3 = p_3 A_3 + v_3 p_s \tag{142}$$

Αν αντικαταστήσουμε την ισότητα (141) στην ισότητα (142) έχουμε ότι

$$r_3 D_3 + r_3 F_3 = p_3 (PR - v_3 p_s + r_3 F_3) + v_3 p_s \Rightarrow r_3 D_3 = p_3 (PR - v_3 p_s + r_3 F_3) - r_3 F_3 + v_3 p_s \Rightarrow \\ r_3 D_3 = p_3 PR - p_3 v_3 p_s + p_3 r_3 F_3 - r_3 F_3 + v_3 p_s = p_3 PR + (1-p_3) v_3 p_s - (1-p_3) r_3 F_3 \Rightarrow \\ D_3 = \frac{p_3}{r_3} PR + \frac{(1-p_3)}{r_3} v_3 p_s - (1-p_3) F_3$$

Από την εξίσωση (138) έχουμε ότι

$$A_3 + D_3 = 1 - p_s - F_3 \tag{143}$$

Αντικαθιστώντας τις ισότητες (141) και (142) στην ισότητα (143):

$$PR - v_3 p_s + r_3 F_3 + \frac{p_3}{r_3} PR + \frac{(1-p_3)}{r_3} v_3 p_s - (1-p_3) F_3 = 1 - p_s - F_3 \Rightarrow \\ PR\left(1 + \frac{p_3}{r_3}\right) + v_3 p_s \left(\frac{1-p_3}{r_3} - 1\right) + F_3 (r_3 - (1-p_3)) = 1 - p_s - F_3 \Rightarrow \\ PR\left(1 + \frac{p_3}{r_3}\right) = -v_3 p_s \left(\frac{1-p_3}{r_3} - 1\right) - F_3 (r_3 - (1-p_3)) + 1 - p_s - F_3 \Rightarrow \\ PR\left(1 + \frac{p_3}{r_3}\right) = -v_3 p_s \left(\frac{1-p_3}{r_3} - 1\right) - F_3 (p_3 + r_3) + 1 - p_s \tag{144}$$

Όμως ο όρος F_3 είναι ίσος με τη στάσιμη πιθανότητα p(0,0,0,0) δηλαδή

$$F_3 = p(0,0,0,0)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση μετάβασης για την πιθανότητα p(0,0,0,0) έχουμε ότι

$$p(0,0,0,0) = \frac{(1-r_1)(1-r_2)v_3}{1-(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)} p_s$$

Αντικαθιστώντας τη ποσότητα F_3 με την p(0,0,0,0) στην ισότητα (144):

$$PR\left(1+\frac{p_3}{r_3}\right)=-v_3p_s\left(\frac{1-p_3}{r_3}-1\right)-\frac{(1-r_1)(1-r_2)v_3}{1-(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)}p_s(p_3+r_3)+1-p_s \Rightarrow$$

$$PR\left(\frac{p_3+r_3}{r_3}\right)=-v_3p_s\left[\left(\frac{1-p_3}{r_3}-1\right)+\frac{(1-r_1)(1-r_2)}{1-(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)}(p_3+r_3)\right]+1-p_s \overset{e_3=\frac{r_3}{r_3+p_3}}{\Rightarrow}$$

$$\frac{PR}{e_3}=-v_3p_s\left[\left(\frac{1-p_3}{r_3}-1\right)+\frac{(1-r_1)(1-r_2)}{1-(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)}(p_3+r_3)\right]+1-p_s \Rightarrow$$

$$PR=e_3(1-p_s)+e_3v_3p_s\left[\frac{r_3+p_3-1}{r_3}-\frac{(1-r_1)(1-r_2)(p_3+r_3)}{1-(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)}\right] \tag{145}$$

4.10 Αριθμητικά αποτελέσματα

Ο αλγόριθμος για τον υπολογισμό του πίνακα μετάβασης προγραμματίστηκε στη γλώσσα προγραμματισμού C++. Η επίλυση των εξισώσεων μετάβασης και ο υπολογισμός των στάσιμων πιθανοτήτων για την εκτίμηση της απόδοσης του συστήματος, για κάθε τιμή του N, γίνεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Για να διαπιστωθεί η ορθότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την εφαρμογή του αλγόριθμου, ένα μοντέλο προσομοίωσης που προσομοιώνει τη λειτουργία του συστήματός του σχήματος 21 δημιουργήθηκε στο πρόγραμμα προσομοίωσης ARENA 3.0. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το μοντέλο της προσομοίωσης σε σύγκριση με αυτά του προτεινόμενου αλγόριθμου μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο αλγόριθμος προσδιορίζει την απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Για τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το μοντέλο της προσομοίωσης δίνονται 95% διαστήματα εμπιστοσύνης για την εκτίμηση της απόδοσης. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου και του μοντέλου της προσομοίωσης παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες 15-22.

Η πρώτη στήλη σε όλους τους πίνακες που ακολουθούν παρουσιάζει την τιμή της συνολικής χωρητικότητας N του συστήματος. Στη δεύτερη στήλη παρουσιάζεται η εκτίμηση της απόδοσης που προκύπτει από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου, ενώ στη τρίτη στήλη παρουσιάζονται τα 95% διαστήματα εμπιστοσύνης για την απόδοση του συστήματος που προκύπτουν από το μοντέλο της προσομοίωσης. Η τελευταία στήλη παρουσιάζει το χρόνο (CPU time) σε δευτερόλεπτα που χρειάζονται από τον προτεινόμενο αλγόριθμο για την εκτίμηση της απόδοσης.

Για τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους πίνακες 15 και 16 οι πιθανότητες εμφάνισης βλαβών, οι πιθανότητες εμφάνισης βλαβών αδράνειας και η πιθανότητες επιδιόρθωσης των βλαβών του συστήματος του σχήματος 21 είναι p_i=0.01, v_i=0.01 and r_i=0.1, i=1,2,3, αντίστοιχα.
Επειδή όμως η περίπτωση στην οποία και οι τρεις μηχανές του συστήματος του σχήματος 21 έχουν ίσες πιθανότητες εμφάνισης βλαβών ή επιδιόρθωσης δεν είναι και τόσο ρεαλιστική, διότι ένα τέτοιο σύστημα είναι αρκετά ισορροπημένο ο αλγόριθμος

εφαρμόστηκε για συνδυασμό περιπτώσεων στις οποίες κάποια από τις παραμέτρους του συστήματος αλλάζει συστηματικά.
Για τα παραδείγματα που παρουσιάζονται στον πίνακα 17 (πίνακα 18 και πίνακα 19, αντίστοιχα) η πιθανότητα εμφάνισης βλάβης p_1 (p_2 και p_3, αντίστοιχα) μεταβάλλεται από 0,02 έως 0,06 με βήμα 0,01. Η πιθανότητα εμφάνισης βλαβών για τις δυο άλλες μηχανές παραμένει σταθερή και ίση με 0,01. Επίσης οι υπόλοιπες παράμετροι τίθενται r_i=0.1, v_i=0.01, για i=1,2,3.
Ομοίως για τα παραδείγματα που παρουσιάζονται στον πίνακα 20 (πίνακα 21 και πίνακα 22, αντίστοιχα) η πιθανότητα εμφάνισης βλάβης αδράνειας v_1 (v_2 και v_3, αντίστοιχα) μεταβάλλεται από 0,02 έως 0,06 με βήμα 0,01. Η πιθανότητα εμφάνισης βλαβών για τις δυο άλλες μηχανές παραμένει σταθερή και ίση με 0,01. Επίσης οι υπόλοιπες παράμετροι τίθενται r_i=0.1, p_i=0.01, για i=1,2,3.

Πίνακας 15: Απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 για N=5, 10, 15, 20, 30, 40

(N)	($PR_{algorithm}$)	95% διάστημα εμπιστοσύνης	CPU Time
5	0.90461	(0.90422 , 0,91155)	0.0008
10	0.90743	(0.90549 , 0.91255)	0.0099
15	0.90848	(0.90423 , 0.91160)	0.0099
20	0.90886	(0.90549 , 0.91255)	0.04
30	0.90906	(0.90595 , 0.91378)	0.0899
40	0.90908	(0.90595 , 0.91378)	0.23

Πίνακας 16: Απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 για N=50,60,…,100,150,200,250

(N)	($PR_{algorithm}$)	95% διάστημα εμπιστοσύνης	CPU Time
50	0.90909	(0.90601 , 0,91399)	0.46
60	0.9090908	(0.90720 , 0.91470)	0.78
70	0.9090909	(0.90654 , 0.91379)	1.301
80	0.909090934	(0.90641 , 0.91415)	1.826
90	0.909090935	(0.90641 , 0.91415)	2.613
100	0.909090936	(0.90641 , 0.91415)	3.574
150	0.909090936183928	(0.90599 , 0.91277)	11.915
200	0.909090936183929	(0.9077 , 0.91447)	28.418s
250	0.90909093618392944	(0.90794 , 0.91475)	55.454

Πίνακας 17: Απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 για p_1=0.02(0.01)0.06, p_2=p_3=v_i=0.01, i=1,2,3

(N)	($PR_{algorithm}$)	95% Διάστημα εμπιστοσύνης	p_1	CPU Time
10	0.90592	(0.90109 , 0,90670)	0.02	0.02
10	0.90447	(0.90202 , 0.9102)	0.03	0.03

10	0.90309	(0.88854 , 0.90748)	0.04	0.03
10	0.90179	(0.88684 , 0.90166)	0.05	0.04
10	0.90056	(0.88270 , 0.90864)	0.06	0.05

Πίνακας 18: Απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 για p_2=0.02(0.01)0.06 p_1=p_3=v_i=0.01, i=1,2,3

(N)	($PR_{algorithm}$)	95% Διάστημα εμπιστοσύνης	p_2	CPU Time
10	0.90649	(0.89638 , 0,91138)	0.02	0.1
10	0.90554	(0.89553 , 0.90863)	0.03	0.1
10	0.90460	(0.88810 , 0.90641)	0.04	0.1
10	0.90367	(0.89000 , 0.90440)	0.05	0.1
10	0.90270	(0.88150 , 0.90270)	0.06	0.1

Πίνακας 19: Απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 για p_3=0.02(0.01)0.06 p_1=p_2=v_i=0.01, i=1,2,3

(N)	($PR_{algorithm}$)	95% Διάστημα εμπιστοσύνης	p_3	CPU Time
20	0.83316	(0.83199 , 0,84529)	0.02	0.1
20	0.76910	(0.75637 , 0.77770)	0.03	0.1
20	0.71418	(0.70549 , 0.72632)	0.04	0.1
20	0.66659	(0.66202 , 0.68523)	0.05	0.1
20	0.62494	(0.61260 , 0.63856)	0.06	0.1

Πίνακας 20: Απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 για v_1=0.02(0.01)0.06 p_i=v_2=v_3=0.01, i=1,2,3

(N)	($PR_{algorithm}$)	95% Διάστημα εμπιστοσύνης	v_1	CPU Time
10	0.90737	(0.90549 , 0.91255)	0.02	0.05
15	0.90843	(0.90423 , 0.91160)	0.03	0.05
20	0.90884	(0.90549 , 0.91255)	0.04	0.06
30	0.90905	(0.90595 , 0.91378)	0.05	0.08
40	0.90908	(0.90595 , 0.91378)	0.06	1.36

Πίνακας 21: Απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 για v_2=0.02(0.01)0.06 p_i=v_1=v_3=0.01, i=1,2,3

(N)	($PR_{algorithm}$)	95% Διάστημα εμπιστοσύνης	v_2	CPU Time
10	0.90682	(0.90549 , 0.91255)	0.02	0.2
15	0.90806	(0.90423 , 0.91160)	0.03	0.2
20	0.90865	(0.90549 , 0.91255)	0.04	0.39

30	0.90902	(0.90595 , 0.91378)	0.05	0.88
40	0.90908	(0.90595 , 0.91378)	0.06	1.59

Πίνακας 22: Απόδοση του συστήματος του σχήματος 21 για v_3=0.02(0.01)0.06 $p_i=v_1=v_3$=0.01, i=1,2,3

(N)	($PR_{algorithm}$)	95% Διάστημα εμπιστοσύνης	v_2	CPU Time
10	0.90735	(0.90549 , 0.91255)	0.02	0.2
15	0.90841	(0.90423 , 0.91160)	0.03	0.2
20	0.90883	(0.90549 , 0.91255)	0.04	0.39
30	0.909054	(0.90595 , 0.91378)	0.05	0.88
40	0.909085	(0.90595 , 0.91378)	0.06	1.59

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους πίνακες 15-22 διαπιστώνουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις η τιμή της εκτίμησης της απόδοσης που προκύπτει από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου βρίσκεται πάντοτε εντός του διαστήματος εμπιστοσύνης για την απόδοση του συστήματος που προκύπτει από το μοντέλο της προσομοίωσης. Επίσης παρατηρούμε ότι ο χρόνος που απαιτείται από τον προτεινόμενο αλγόριθμο για την εκτίμηση της απόδοσης είναι πολύ μικρός για όλες τις περιπτώσεις ακόμη και όταν ο αριθμός του N γίνεται μεγάλος. Οι δυο αυτές διαπιστώσεις μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο αλγόριθμος είναι γρήγορος και υπολογίζει με ακρίβεια την απόδοση του συστήματος του σχήματος 21.

4.11 Τα σύνολα των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης

Στόχος των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης είναι ο προσδιορισμός των πιθανοτήτων εμφάνισης βλαβών (αδράνειας και μη) και επιδιόρθωσης, όλων των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων που εμπλέκονται στην ανάλυση της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής παραγωγής L.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω μέσω των εξισώσεων της τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης υπολογίζονται οι παράμετροι όλων των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων των σχημάτων 19 και 20. Εξετάζοντας τα εικονικά υποσυστήματα που εμπλέκονται στην ανάλυση της γραμμής παραγωγής L, παρατηρούμε τα εξής:
Οι παράμετροι των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(1,A)$, $M_u(1,B)$, $M_u(2,A)$ και $M_u(2,B)$ δεν χρειάζεται να υπολογιστούν διότι αντιστοιχούν στις πρώτες μηχανές (μηχανές εισόδου) της πραγματικής γραμμής L, M_1 και M_2 για τα προϊόντα τύπου A και B, αντίστοιχα. Οι αρχικές συνθήκες της μεθόδου της αποσύνθεσης θέτουν τις παραμέτρους αυτών των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών να είναι ίσες με τις παραμέτρους των αντίστοιχων ΄΄πραγματικών΄΄ μηχανών. Δηλαδή

$$r_u(1,A) = r_1,\ \mathrm{r_u}(1,\mathrm{B}) = \mathrm{r_1}\ r_u(2,A) = r_2, r_u(2,B) = r_2,$$
$$p_u(1,A) = p_1, p_u(1,B) = p_1,\ p_u(2,A) = p_2, p_u(2,B) = p_2.$$
$$v_u(1,A) = v_u(2,A) = v_u(1,B) = v_u(2,B) = 0$$

Επίσης οι εικονικές μηχανές $M_d(5,A)$ και $M_d(5,B)$ αντιστοιχούν στη μηχανή εξόδου (τελευταία μηχανή) M_6 του συστήματος και λόγω των αρχικών συνθηκών οι παράμετροι της ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_d(5,A)$ και $M_d(5,B)$ τίθενται ίσες με τις παραμέτρους της πραγματικής μηχανής M_6.
Δηλαδή

$$r_d(5,A) = r_6, r_d(5,B) = r_6 \text{ και } p_d(5,A) = p_6, p_d(5,B) = p_6, v_d(5,A) = 0 = v_d(5,B) = 0.$$

Οι μηχανές $M_{u_1}((3,4),A), M_{u_2}((3,4),A)\ \kappa\alpha\iota\ M_{u_1}((3,4),B), M_{u_2}((3,4),B)$ όπως ήδη έχει αναφερθεί μοντελοποιούν το τμήμα της πραγματικής γραμμής L που βρίσκεται πριν τους αποθηκευτικούς χώρους $B_{((3,4),A)}$ και $B_{((3,4),B)}$, αντίστοιχα. Οι ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές $M_d((3,4),A)$ και $M_d((3,4),B)$ μοντελοποιούν το τμήμα της πραγματικής γραμμής L που βρίσκεται μετά τους αποθηκευτικούς χώρους $B_{((3,4,),A)}$ και $B_{((3,4,),B)}$, αντίστοιχα.

Μια από τις υποθέσεις του συστήματος είναι ότι πριν τις upstream μηχανές και μετά την downstream μηχανή κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος με τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο θα βρίσκονται πάντοτε υποσυστήματα με δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο. Έτσι πριν τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((3,4,),A)}$ βρίσκονται τα υποσυστήματα L(1,A) και L(2,A) που μοντελοποιούν τη γραμμική ροή των προϊόντων. Τα μέτρα απόδοσης και οι παράμετροι των ΄΄εικονικών΄΄ γραμμών L(1,A) και L(2,A) που προσδιορίζονται από τις εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης για σειριακές γραμμές με δυνατότητα παραγωγής δυο τύπου προιόντων (Nemec (1999)) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό των παραμέτρων των $M_{u_1}((3,4),A)\ \kappa\alpha\iota\ M_{u_2}((3,4),A)$, αντίστοιχα.

Ομοίως πριν τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((3,4,),B)}$ βρίσκονται τα υποσυστήματα L(1,B) και L(2,B) που μοντελοποιούν τη γραμμική ροή των προϊόντων. Τα μέτρα απόδοσης και οι παράμετροι των ΄΄εικονικών΄΄ γραμμών L(1,B) και L(2,B) που προσδιορίζονται από τις εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης για σειριακές γραμμές με δυνατότητα παραγωγής δυο τύπου προιόντων (Nemec (1999)) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό των παραμέτρων των $M_{u_1}((3,4),B)\ \kappa\alpha\iota\ M_{u_2}((3,4),B)$, αντίστοιχα.

Ομοίως, οι παράμετροι και τα μέτρα απόδοσης των υποσυστημάτων L(5,A) και L(5,B) (τα οποία μοντελοποιούν τη γραμμική ροή των προϊόντων) που βρίσκονται αμέσως μετά τους αποθηκευτικούς χώρους $B_{((3,4),A)}$ και $B_{((3,4),B)}$ και προσδιορίζονται από τις εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης για σειριακές γραμμές παραγωγής με δυνατότητα παραγωγής δυο τύπου προιόντων (Nemec (1999)), μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό των παραμέτρων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_d((3,4),A)$ και $M_d((3,4),B)$.

Τελικά οι παράμετροι των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων που μένει να υπολογιστούν με τη δημιουργία των νέων εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης είναι οι

παράμετροι των μηχανών $M_u(5,A)$, $M_u(5,B)$, $M_d(1,A)$, $M_d(1,B)$, $M_d(2,A)$ και $M_d(2,B)$ των εικονικών υποσυστημάτων L(5,A), L(5,B), L(1,A), L(1,B), L(2,A) και L(2,B) αντίστοιχα. Για τον υπολογισμό των παραμέτρων αυτών γίνεται χρήση των μέτρων απόδοσης των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων L((3,4),A) και L((3,4),B) που μοντελοποιεί τις εργασίες συγχώνευσης.
Για τον υπολογισμό των παραμέτρων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(5,A)$, $M_u(5,B)$, $M_d(1,A)$, $M_d(1,B)$, $M_d(2,A)$ και $M_d(2,B)$ χρησιμοποιούνται τα παρακάτω σύνολα εξισώσεων:

- **Εξισώσεις επαναφοράς της ροής (Resumption of flow equations)**
  Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων επιδιόρθωσης $r_u(5,A)$, $r_u(5,B)$, $r_d(1,A)$, $r_d(1,B)$, $r_d(2,A)$ και $r_d(2,B)$ των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(5,A)$, $M_u(5,B)$, $M_d(1,A)$, $M_d(1,B)$, $M_d(2,A)$ και $M_d(2,B)$, αντίστοιχα.

- **Εξισώσεις ροής (Flow rate idle time equations)**
  Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων εμφάνισης βλαβών (όχι βλαβών αδράνειας) $p_u(5,B)$, $p_d(1,B)$ και $p_d(2,B)$ των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(5,B)$, $M_d(1,B)$ και $M_d(2,B)$, αντίστοιχα.

- **Εξισώσεις διακοπής της ροής (Interruption of flow equations)**
  Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων εμφάνισης βλαβών (όχι βλαβών αδράνειας) $p_u(5,A)$, $p_d(1,A)$ και $p_d(2,A)$ των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(5,A)$, $M_d(1,A)$ και $M_d(2,A)$, αντίστοιχα

- **Εξισώσεις βλαβών αδράνειας (Idleness Failure equations)**
  Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων εμφάνισης βλαβών αδράνειας $v_u(5,A)$, $v_u(5,B)$, $v_d(1,A)$, $v_d(1,B)$, $v_d(2,A)$ και $v_d(2,B)$ των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(5,A)$, $M_u(5,B)$, $M_d(1,A)$, $M_d(1,B)$, $M_d(2,A)$ και $M_d(2,B)$, αντίστοιχα

- **Εξισώσεις διατήρησης της ροής (Conservation of flow equations)**
  Οι εξισώσεις αυτές εκφράζουν την αρχή της διατήρησης της ροής των προϊόντων μεταξύ των αποθηκευτικών χώρων, λόγω του ότι δεν υπάρχει καταστροφή η δημιουργία νέου υλικού. Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται σαν κριτήριο τερματισμού του αλγόριθμου που χρησιμοποιείται για την ταυτόχρονη επίλυση όλων των παραπάνω εξισώσεων.

Παρατηρούμε ότι τα σύνολα των εξισώσεων που χρησιμοποιούνται από τη μέθοδο της αποσύνθεσης για τη περίπτωση που υπάρχουν δυο τύποι προϊόντων είναι περισσότερα από αυτά που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για την περίπτωση που υπάρχει μόνο ένας μόνο τύπος προϊόντος. Για παράδειγμα οι εξισώσεις των βλαβών αδράνειας (και των εξισώσεων διακοπής της ροής που χρησιμοποιούνται από τη μέθοδο της αποσύνθεσης για τη συγκεκριμένη γραμμή

παραγωγής δεν υπάρχουν στη περίπτωση που η γραμμή παραγωγής παράγει προϊόντα μόνο ενός τύπου.

4.12 Οι εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των παραμέτρων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(5,A)$, $M_u(5,B)$, $M_d(1,A)$, $M_d(1,B)$, $M_d(2,A)$ και $M_d(2,B)$.
Στη συνέχεια παρουσιάζεται μόνον η τελική μορφή των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης διότι οι αποδείξεις είναι αρκετά μακροσκελείς. Η αναλυτικές αποδείξεις όλων των εξισώσεων παρουσιάζονται στο παράρτημα Γ.

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης παρουσιάζονται κάποιοι συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται στην ανάπτυξη των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης.

Με $p((i,A),n,\alpha_1,\alpha_2)\ και\ p((i,\mathrm{B}),n,\alpha_1,\alpha_2)$ συμβολίζουμε τη πιθανότητα το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L(i,A) και L(i,B), αντίστοιχα να βρεθεί στην κατάσταση (n,α_1,α_2).
Με $p(((i,j),A),n,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\ και\ p(((i,j),\mathrm{B}),n,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ συμβολίζουμε τη πιθανότητα το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L((i,j),A) και L((i,j),B), αντίστοιχα να βρεθεί στην κατάσταση $(n,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

Με $n[(i,j),t]=A\ και\ n[((i,j),\kappa),t]=\mathrm{B}$ συμβολίζουμε ότι ο αριθμός των προϊόντων που υπάρχουν στο ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L(i,j) και L((i,j),k) είναι A και B αντίστοιχα.
Με PR(i,A), PR(i,B), PR((i,j),A) και PR((i,j),B) συμβολίζουμε την απόδοση των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων L(i,A), L(i,B), L((i,j),A) και L((i,j),B), αντίστοιχα.

Με $PR_u(i,A)$, $PR_u(i,B)$, $PR_d(i,A)$, $PR_d(i,B)$,συμβολίζουμε την απόδοση της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_u(i,A)$, $M_u(i,B)$ και $M_d(i,A)$, $M_d(i,B)$, αντίστοιχα.

Με $p_s(i,A)$, $p_s(i,B)$ και $p_b(i,A)$, $p_b(i,B)$ συμβολίζουμε τη πιθανότητα το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L(i,A), L(i,B) να βρεθεί άδεια ή μπλοκαρισμένη, αντίστοιχα.

Με $p_s((i,j),A)\ και\ p_s((i,j),\mathrm{B})$, συμβολίζουμε τη πιθανότητα το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L((i,j),A) και L((i,j),B) να βρεθεί άδειο.

Με $p_{bi}((i,j),A)\ και\ p_{bi}((i,j),B)$, συμβολίζουμε τη πιθανότητα η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_{u_1}((i,j),A)\ και\ M_{u_1}((i,j),\mathrm{B})$ των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων L((i,j),A) και L((i,j),B), αντίστοιχα, να είναι μπλοκαρισμένη.

Με $p_{bj}((i,j),A)\ και\ p_{bj}((i,j),B)$, συμβολίζουμε τη πιθανότητα η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_{u_2}((i,j),A)\ και\ M_{u_2}((i,j),\mathrm{B})$ των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων L((i,j),A) και L((i,j),B), αντίστοιχα, να είναι μπλοκαρισμένη.

4.12.1 Οι εξισώσεις διατήρησης της ροής (Conservation of flow equations)

Επειδή δεν δημιουργείται ή καταστρέφεται νέο υλικό για κάθε τύπο προϊόντος, η ροή των προϊόντων πρέπει να διατηρείται. Αυτό έχει σαν συνέπεια να ισχύει η αρχή διατήρησης της ροής η οποία εκφράζεται με τις δυο παρακάτω μαθηματικές σχέσεις:

Για τα προϊόντα τύπου Α έχουμε ότι

$$PR((3,4),A) = PR(5,A)$$
$$PR(1,A) + PR(2,A) = PR((3,4),A)$$

Για τις ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές ισχύει ότι

$PR_u(1,A)=PR_d(1,A)=PR(1,A)$
$PR_u(2,A)=PR_d(2,A)=PR(2,A)$
$PR_{u1}((3,4),A)+ PR_{u2}((3,4),A)=PR_d((3,4),A)=PR((3,4),A)$
$PR_d((3,4),A)=PR_u(5,A)$
$PR_d(5,A)=PR_u(5,A)=PR(5,A)$

Ομοίως για τα προϊόντα τύπου Β, έχουμε

$$PR((3,4),B) = PR(5,B)$$
$$PR(1,B) + PR(2,B) = PR((3,4),B)$$

Για τις ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές επίσης ισχύει ότι

$PR_u(1,B)=PR_d(1,B)=PR(1,B)$
$PR_u(2,B)=PR_d(2,B)=PR(2,B)$
$PR_{u1}((3,4),B)+ PR_{u2}((3,4),B)=PR_d((3,4),B)=PR((3,4),B)$
$PR_d((3,4),B)=PR_u(5,B)$
$PR_d(5,B)=PR_u(5,B)=PR(5,B)$

4.12.2 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,A)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας επιδιόρθωσης $r_u(5,A)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_u(5,A)$.

Η τελική μορφή της εξίσωσης αυτής είναι η ακόλουθη:

$$r_u(5,A) = \frac{\Pr(U/V)\Pr(V) + \Pr(U/W)\Pr(W) + \Pr(U/Z)\Pr(Z)}{\Pr(V \cup W \cup Z)} \qquad (146)$$

όπου

$\Pr(U/V) = r_5$

$$\Pr(V) = \frac{p_u(5,A)}{r_u(5,A)}\left(PR_u(5,A) - v_u(5,A)p((5,A),N\ ,1,0) + r_u(5,A)p((5,A),N\ ,0,0)\right) +$$
$$\frac{v_u(5,A)}{r_u(5,A)}p_b(5,A) - p((5,A),N,0,0) - p(((3,4),A),0,0,0,0) - p_s((3,4),A)$$
$$\Pr[U/W] = r_5\left[r_{u_1}((3,4),A)r_{u_2}((3,4),A) + r_{u_1}((3,4),A)(1 - r_{u_2}((3,4),A)) + \right.$$
$$\left. r_{u_1}((3,4),A)(1 - r_{u_2}((3,4),A)) + r_{u_2}((3,4),A)(1 - r_{u_1}((3,4),A))\right]$$
$$\Pr(W) = p(((3,4),A),0,0,0,0)$$
$$\Pr[U/Z] = (1 - v_d((3,4),A))\left[r_{u_1}((3,4),A)r_{u_2}((3,4),A) + r_{u_1}((3,4),A)(1 - r_{u_2}((3,4),A)) + \right.$$
$$\left. r_{u_1}((3,4),A)(1 - r_{u_2}((3,4),A)) + r_{u_2}((3,4),A)(1 - r_{u_1}((3,4),A))\right]$$
$$\Pr(Z) = p(((3,4),A),0,0,0,1) = p_s((3,4),A)$$
$$\Pr[V \cup W \cup Z] = \Pr[V] + \Pr[W] + \Pr[Z]$$

4.12.3 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,B)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας επιδιόρθωσης $r_u(5,B)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_u(5,B)$

$$r_u(5,B) = \frac{\Pr[U/I]\Pr[I] + \Pr[U/V_1]\Pr[V_1] + \Pr[U/V_2]\Pr[V_2] + \Pr[U/D]\Pr[D]}{\Pr[I \cup V_1 \cup V_2 \cup D]} \qquad (147)$$

Όπου

$$\Pr[U/I] = \Psi_1(\Psi_2 + \Psi_3)$$
$$\Psi_1 = 1 - \left[(1 - r_{u_1}((3,4),B))((1 - r_{u_2}((3,4),B)))\right]$$
$$\Psi_2 = (1 - r_{u_1}((3,4),A))((1 - r_{u_2}((3,4),A)))\frac{p_s((3,4),A)}{p_s((3,4),A) + p_b((3,4),A)}$$
$$\Psi_3 = (1 - r_d(5,A))\frac{p_b(5,A)}{p_s((3,4),A) + p_b(5,A)}$$

$$\Pr[U/D] = \Omega_1(\Omega_2 + \Omega_3)$$

Όπου

$$\Omega_1 = r_5$$
$$\Omega_2 = (1 - r_{u_1}((3,4),A))((1 - r_{u_2}((3,4),A)))\frac{p\ ((3,4),A,0,0,0,0)}{p\ ((3,4),A,0,0,0,0) + p((5,A),N,0,0)}$$
$$\Omega_3 = (1 - r_d(5,A))\frac{p\ ((5,A),N0,0,0)}{p\ ((5,A),N0,0,0) + p\ ((3,4),A,0,0,0,0)}$$

$$\Pr[U/V_1] = \frac{\Omega}{C} + \Gamma$$

όπου

$$\Omega = p((3,4),A,1,0,0,1)(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A)) +$$
$$p((3,4),A,1,0,1,1)(1-r_{u_1}((3,4),A))p_{u_2}((3,4),A) +$$
$$p((3,4),A,1,1,0,1)(1-r_{u_2}((3,4),A))p_{u_1}((3,4),A)$$
$$C = p((3,4),A,1,0,0,1) + p((3,4),A,1,0,1,1) + p((3,4),A,1,1,0,1)$$
$$\frac{(1-r_d(5,A))p(5,A,N-1,1,0) + p_d(5,A)(5,A,N-1,1,1)}{p(5,A,N-1,1,0) + p(5,A,N-1,1,1)} = \Gamma$$

$$\Pr[U/V_2] = \left(1-\left[(1-r_{u_1}((3,4),B))((1-r_{u_2}((3,4),B))\right]\right)\cdot\left[\frac{\Omega}{C}+\Gamma\right]$$

$$\Pr[D] = \frac{p_u(5,B)}{r_u(5,B)}\left(E_u(5,B) - v_u(5,B)p(N_{(5,B)},1,0) + r_u(5,B)p(N_{(5,A)},0,0)\right) +$$
$$\frac{v_u(5,B)}{r_u(5,B)}p_b(5,B) - p((5,B),N,0,0) - p_s((3,4),B) - 1 +$$
$$\left[p_s((3,4),A) + p_b(5,A) + p_s((3,4),A,0,0,0,0) + p((5,A),N,0,0)\right] +$$
$$p((5,B),N,0,0)$$
$$\Pr[I] = p_s((3,4),B)$$
$$\Pr[V_1] = \sum_{n=1}^{n=N}\left(p((3,4),B,n,0,0,0) + p((3,4),B,n,0,1,0) + p((3,4),B,n,1,0,0) + p((3,4),B,n,1,1,0)\right)$$
$$\Pr[V_2] = p((3,4),B,0,0,0,0)$$

4.12.4 Εξίσωση διακοπής της ροής για την εικονική μηχανή $M_u(5,A)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας εμφάνισης βλάβης $p_u(5,A)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_u(5,A)$

$$p_u(5,A) = p_5 + \frac{K_1 + K_2 + C + D}{E} \quad (148)$$

όπου

$$K_1 = (1-r_{u1}((3,4)A))(1-r_{u2}((3,4),A))(1-p_d((3,4),A))p((3,4),A),1,0,0,1)$$
$$K_2 = (1-r_{u1}((3,4),A))p_{u2}((3,4),A)(1-p_d((3,4),A))p(((3,4),A),1,0,1,1)$$
$$C = p_{u1}((3,4),A)(1-r_{u2}((3,4)A))(1-p_d((3,4),A))p(((3,4),A),1,1,0,1)$$
$$D = (1-r_{u1}((3,4),A))(1-r_{u2}((3,4),A)v_d((3,4),A)p_s((3,4),A)$$
$$E = PR((5,A) - v_u(5,A)p((5,A),N,1,0) + r_u(5,A)p((5,A),N,0,0)$$

4.12.5 Εξίσωση ροής (flow rate idle time) για την εικονική μηχανή $M_u(5,B)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας εμφάνισης βλάβης $p_u(5,B)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_u(5,B)$

$$p_u(5,B) = r_u(5,B)\left(\frac{\frac{PR(5,B)}{e_5} - \Psi_1 + Q - Z + PR((3,4),B)Z\left(1+\frac{p_d(3,4),B)}{r_d((3,4),B)}\right)}{PR(5,B)\,Q}\right) \quad (149)$$

όπου,

$PR(5,B) = e_5\Psi_2$

$\Psi_2 = p_s((3,4),A) + p_b(5,A) + p(((3,4),A),0,0,0,0) + p((5,A),N,0,0) - p_s((3,4),B) - p_b(5,B)$

$\Psi_1 = p_s((3,4),A) + p_b(5,A) + p((3,4),A),0,0,0,0) + p((5,A),N,0,0)$

$$Q = \frac{r_u(5,B)R}{r_u(5,B)R + v_u(5,B)\left(R - r_u(5,B)r_d(5,B) - p_u(5,B)r_d(5,B)\right)}$$

$$Z = \frac{1}{v_d((3,4),B)L - 1}$$

όπου

$$R = r_u(5,B) + r_d(5,B) - r_u(5,B)r_d(5,B)$$

$L = \Omega_1 - \Omega_2$

$$\Omega_1 = \frac{r_d((3,4),B) + p_d((3,4),B) - 1}{r_d((3,4),B)}$$

$$\Omega_2 = \frac{(1 - r_{u1}((3,4),B))(1 - r_{u2}((3,4),B))p_d((3,4),B) + r_d((3,4),B)}{1 - (1 - r_{u1}((3,4),B))(1 - r_{u2}((3,4),B))(1 - r_d((3,4),B))}$$

4.12.6 Η εξίσωση της βλάβης αδράνειας για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,A)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας εμφάνισης βλάβης αδράνειας $v_u(5,A)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_u(5,A)$

$$v_u(5,A) = p_5 p_s((3,4),A)\left(1 - \frac{p_s((3,4),B) + p_b(5,B)}{p_s((3,4),A) + p_b(5,A)}\right) \quad (150)$$

4.12.7 Η εξίσωση της βλάβης αδράνειας για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,B)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας εμφάνισης βλάβης αδράνειας $v_u(5,B)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_u(5,B)$

$$v_u(5,B) = \frac{\Pr[U/V]\Pr[V] + \Pr[U/W]\Pr[W]}{\Pr[V \cup W]} \quad (151)$$

όπου

$\Pr[U/V] = \left(1 - \left(1 - r_{u_1}((3,4),A)\right)\left(1 - r_{u_1}((3,4),A)\right)\right)$

$$\Pr[U/W] = r_d(5,A)$$
$$\Pr[V \cup W] = p_b(5,B)$$
$$\Pr[V] = p_b(5,B)\frac{p_s((3,4),A)}{p_s((3,4),A) + p_b(5,A)}$$
$$\Pr[W] = p_b(5,B)\frac{p_b(5,A)}{p_s((3,4),A) + p_b(5,A)}$$

4.12.8 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(1,A)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας επιδιόρθωσης $r_d(1,A)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(1,A)$

$$r_d(1,A) = \frac{\Pr[U/X]\Pr[X] + \Pr[U/Y]\Pr[Y] + \Pr[U/Z]\Pr[Z]}{\Pr[X \cup Y \cup Z]} \quad (152)$$

$$\Pr[U/X] = r_3$$
$$\Pr[U/Y] = r_3 \cdot r_d((3,4),A)$$
$$\Pr[U/Z] = r_d((3,4),A)\left(1 - v_{u_1}((3,4),A)\right)$$
$$\Pr[X] = \frac{p_d(1,A)}{r_d(1,A)}\left(PR(1,A) - v_d(1,A)p(1,A,0,0,1) + r_d p(1,A,0,0,0)\right) +$$
$$\frac{v_d(1,A)}{r_d(1,A)}p_s(1,A) - p(1,A,0,0,0) - p((3,4),A,N,0,0,0) - p((3,4),A,N,0,1,0) -$$
$$p((3,4),A,N,1,0,0) - p((3,4),A,N,1,1,0)$$

$$\Pr[Y] = p((3,4),A,N,0,0,0) + p((3,4),A,N,0,1,0)$$

$$\Pr[Z] = p((3,4),A,N,1,0,0) + p((3,4),A,N,1,1,0) = p_{b3}((3,4),A)$$

$$\Pr[X \cup Y \cup Z] = \Pr[X] + \Pr[Y] + \Pr[Z]$$

4.12.9 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(1,B)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας επιδιόρθωσης $r_d(1,B)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(1,B)$

$$r_d(1,B) = \frac{\Pr[U/I]\Pr[I] + \Pr[U/V_1]\Pr[V_1] + \Pr[U/V_2]\Pr[V_2] + \Pr[U/D]\Pr[D]}{\Pr[I \cup V_1 \cup V_2 \cup D]} \quad (153)$$

όπου

$$\Pr[U/I] = \Omega_1(\Omega_2 + \Omega_3)$$
$$\Omega_1 = r_d((3,4),B)$$

$$\Omega_2 = (1 - r_u\ (1, A)) \frac{p_s(1, A)}{p_s(1, A) + p_{b3}((3,4), A)}$$

$$\Omega_3 = \left(1 - r_d(((3,4), A)\right) \frac{p_{b3}((3,4), A)}{p_s(1, A) + p_{b3}((3,4), A)}$$

$$\Pr[U / D] = \Psi_1\left(\Psi_2 + \Psi_3\right)$$

όπου

$$\Psi_1 = r_3$$

$$\Psi_2 = (1 - r_u\ (1, A)) \frac{p\ (1, A,0,0,0)}{p\ (1, A,0,0,0) + p(((3,4), A), N,0,0,0) + p(((3,4), A), N,0,1,0)}$$

$$\Psi_3 = \left(1 - r_d((3,4), A)\right) \frac{p\ (((3,4), A), N0,0,0) + p\ (((3,4), A), N0,1,0)}{p\ (1, A,0,0,0) + p\ (((3,4), A), N0,0,0) + p\ (((3,4), A), N0,1,0)}$$

$$\Pr[U / V_1] = \frac{\left(1 - r_u(1, A)\right) p(1, A,1,0,1) + p_u(1, A)\, p_u(1, A,1,1,1)}{p(1, A,1,0,1) + p_u(1, A,1,1,1)} + \frac{\mathrm{M}}{L}$$

όπου

$$\begin{aligned} M = {} & \left(1 - r_d((3,4), A)\right) p(((3,4), A), N - 1,1,0,0) + p_d(((3,4), A)\, p((3,4), A), N - 1,1,0,1) + \\ & \left(1 - r_d((3,4), A)\right) p(((3,4), A, N - 1,1,1,0) + p_d((3,4), A)\, p(((3,4), A), N - 1,1,1,1) + \\ & p(((3,4), A), N - 2,1,1,1)\, p_d((3,4), A)\left(1 - p_{u_2}((3,4), A)\right) + \\ & p(((3,4), A), N - 2,1,1,0)\left(1 - r_d((3,4), A)\right)\left(1 - p_{u_2}((3,4), A)\right) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} L = {} & p(((3,4), A), N - 1,1,0,0) + p(((3,4), A), N - 1,1,0,1) + p(((3,4), A), N - 1,1,1,0) + \\ & p(((3,4), A), N - 1,1,1,1) + p(((3,4), A), N - 2,1,1,1) + p(((3,4), A), N - 2,1,1,0) \end{aligned}$$

$$\Pr[U / V_2] = r_d((3,4), B) \Pr[U / V_1]$$

$$\begin{aligned} \Pr[D] = {} & -p((1, B),0,0,0) + \frac{p_d}{r_d}\left(PR_d(1, B) - v_d\, p((1, B),0,0,1) + r_d\, p((1, B),0,0,0)\right) + \\ & \frac{v_d}{r_d} p((1, B),0,0,1) - 1 + p_s(1, A) + p_{b3}((3,4), A) + p((1, A),0,0,0) + \\ & p(((3,4), A),0,0,0,0) + \left(p((1, B),0,0,0) + p(((3,4), B),0,0,0,0\right) - \\ & p((3,4), B), N,0,0,0) - p_{b3}((3,4), B) \end{aligned}$$

$$\Pr[I] = p_{b_3}((3,4), B)$$

$$\Pr[V_1] = \sum_{n=0}^{n=N-1} \left(p(((3,4), B), n,0,0,0) + p(((3,4), B), n,0,1,0) + p(((3,4), B), n,0,0,1) + p(((3,4), B), n,0,1,1)\right)$$

$$\Pr[V_2] = p(((3,4), B), N,0,0,0) + p(((3,4), B), N,0,1,0)$$

επειδή τα γεγονότα I,D,V_1,V_2 είναι ξένα μεταξύ τους.

$$\Pr[I \cup V_1 \cup V_2 \cup D] = \Pr[I] + \Pr[V_1] + \Pr[D] + \Pr[V_2]$$

4.12.10 Εξίσωση διακοπής της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(1,A)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για την εύρεση της παραμέτρου $p_d(1,A)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(1,A)$.

$$p_d(1,A) = \mathrm{K}_1 + \frac{\mathrm{K}_2 + C}{D} \tag{154}$$

όπου

$K_1=p_3$

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_2 = {} & (1-p_{u1}((3,4),A))(1-r_{u2}(((3,4),A))(1-r_d((3,4),A))p(((3,4),A),N-1,100) + \\
& (1-p_{u1}((3,4),A))(1-r_{u2}((3,4),A))p_d((3,4),A)p(((3,4),A),N-1,101) + \\
& (1-p_{u1}((3,4),A))v_{u2}((3,4),A)(1-r_d((3,4),A))p(((3,4),A),N-1,110) + \\
& (1-p_{u1}((3,4),A))v_{u2}((3,4),A)p_d((3,4),A)p(((3,4),A),N-1,111) \\
C = {} & (1-p_{u1}((3,4),A))r_{u2}((3,4),A)(1-r_d((3,4),A))p(((3,4),A),N-2,100) + \\
& (1-p_{u1}((3,4),A))r_{u2}((3,4),A)p_d((3,4),A)p(((3,4),A),N-2,101) + \\
& (1-p_{u1}((3,4),A))(1-p_{u2}((3,4),A))(1-r_d((3,4),A))p(((3,4),A),N-2,110) + \\
& (1-p_{u1}((3,4),A))(1-p_{u2}((3,4),A))p_d((3,4),A)p(((3,4),A),N-2,111) + \\
& (1-p_{u1}((3,4),A))r_{u2}((3,4),A)(1-r_d((3,4),A))p(((3,4),A),N-1,100) + \\
& (1-p_{u1}((3,4),A))r_{u2}((3,4),A)p_d((3,4),A)p(((3,4),A),N-1,101) + \\
& (1-p_{u1}((3,4),A))(1-v_{u2}((3,4),A))(1-r_d((3,4),A))p(((3,4),A),N-1,110) + \\
& (1-p_{u1}((3,4),A))(1-v_{u2}((3,4),A))p_d((3,4),A)p(((3,4),A),N-1,111)
\end{aligned}$$

$$D = PR(1,A) - v_d(1,A)p((1,A),0,0,1) + r_d(1,A)p((1,A),0,0,0)$$

4.12.11 Εξίσωση ροής (flow rate idle time) για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(1,B)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας εμφάνισης βλάβης $p_d(1,B)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(1,B)$

$$p_d(1,B) = \frac{Q \cdot \left[\frac{PR(1,B)}{e_3} - C + r_d(1,B)\left(\frac{1-PR(1,B)}{Q} \right) + p_{b3}((3,4),B) \right]}{PR(1,B)} \tag{155}$$

όπου $\dfrac{r_u + r_d - r_u p_d - 2r_u r_d}{r_d(r_u + r_d - r_u r_d)} = K$

$$C = p_s(1,A) + p_{b3}((3,4),A) + p((1,A),0,0,0) + p((3,4),A),N,0,0,0) + p((3,4),A),N,0,1,0)$$

$$p_{b3}((3,4),B) = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\Phi_1 = \frac{PR_{u1}((3,4),B) - \sum_{\substack{n=0 \\ \alpha_2,\alpha_3 \in \{0,1}}^{n=N-1} \left(p(((3,4),B),n,1,\alpha_2,\alpha_3)\right)}{v_{u1}((3,4),B)}$$

$$\Phi_2 = \frac{r_{u1}((3,4),B) \sum_{\alpha_2,\alpha_3 \in \{0,1\}} \left(p(((3,4),B),N,0,\alpha_2,\alpha_3)\right)}{v_{u1}((3,4),B)}$$

$$Q = r(1,B)\left(1 + v_d(1,B)K\right)$$

4.12.12 Εξίσωση βλάβης αδράνειας για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(1,A)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας εμφάνισης βλάβης αδράνειας $v_d(1,A)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(1,A)$.

$$v_u(1,A) = p_3 p_{b3}((3,4),A)\left(1 - \frac{p_s(1,B) + p_{b3}((3,4),B)}{p_s(1,A) + p_{b3}((3,4),A)}\right) \quad (156)$$

4.12.13 Εξίσωση βλάβης αδράνειας για την εικονική μηχανή $M_d(1,B)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας εμφάνισης βλάβης αδράνειας $v_d(1,B)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(1,B)$.

$$v_d(1,B) = \Pr[U/V \cup W] = \frac{\Pr[U/V]\Pr[V] + \Pr[U/W]\Pr[W]}{\Pr[V \cup W]} \quad (157)$$

$$\Pr[U/V] = \left(r_u\ (1,A)\right)$$

$$\Pr[U/W] = r_d((3,4),A).$$

$$\Pr[V \cup W] = p_s(1,B)$$

$$\Pr[V] = p_s(1,B)\frac{p_s(1,A)}{p_{b3}((3,4),A) + p_s(1,A)} \text{ και } \Pr[W] = p_s(1,B)\frac{p_{b3}((3,4),A)}{p_{b3}((3,4),A) + p_s(1,A)}$$

4.12.14 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(2,A)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για την εύρεση της παραμέτρου $r_d(2,A)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(2,A)$.

$$r_d(2,A) = \frac{\Pr[U/X]\Pr[X] + \Pr[U/Y]\Pr[Y] + \Pr[U/Z]\Pr[Z]}{\Pr[X \cup Y \cup Z]} \quad (158)$$

όπου

$$\Pr[U/X] = r_4$$
$$\Pr[U/Y] = r_4 \cdot r_d((3,4),A)$$
$$\Pr[U/Z] = r_d((3,4),A)\left(1 - v_{u_2}((3,4),A)\right)$$

$$\Pr[X] = \frac{p_d(2,A)}{r_d(2,A)}\left(E\ (2,A) - v_d(2,A)p(2,A,0,0,1) + r_d p(2,A,0,0,0)\right) +$$
$$\frac{v_d(2,A)}{r_d(2,A)} p_s(2,A) - p(2,A,0,0,0) - p(((3,4),A),N,0,0,0) - p(((3,4),A),N,1,0,0) -$$
$$p(((3,4),A),N-1,0,0,0) - p(((3,4),A),N-1,0,0,1) - p(((3,4),A),N-1,1,0,0) -$$
$$p(((3,4),A),N-1,1,0,1) - p(((3,4),A),N,0,1,0) - p(((3,4),A),N,1,1,0) -$$
$$p(((3,4),A),N-1,0,1,0) - p(((3,4),A),N-1,0,1,1) - p(((3,4),A),N-1,1,1,0) -$$
$$p(((3,4),A),N-1,1,1,1)$$

$$\Pr[Y] = p(((3,4),A),N,0,0,0) + p(((3,4),A),N,1,0,0) + p(((3,4),A),N-1,0,0,0) +$$
$$p(((3,4),A),N-1,0,0,1) + p(((3,4),A),N-1,1,0,0) + p(((3,4),A),N-1,1,0,1)$$

$$\Pr[Z] = p(((3,4),A),N,0,1,0) + p(((3,4),A),N,1,1,0) + p(((3,4),A),N-1,0,1,0) +$$
$$p(((3,4),A),N-1,0,1,1) + p(((3,4),A),N-1,1,1,0) + p(((3,4),A),N-1,1,1,1)$$
$$= p_{b4}((3,4),A)$$

Επειδή τα γεγονότα X,Y και Z είναι ξένα μεταξύ τους έχουμε ότι

$$\Pr[X \cup Y \cup Z] = \Pr[X] + \Pr[Y] + \Pr[Z]$$

4.12.15 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(2,B)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για την εύρεση της παραμέτρου $r_d(2,B)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(2,B)$.

$$r_d(2,B) = \Pr[U/I \cup V_1 \cup V_2 \cup D]$$
$$= \frac{\Pr[U/I]\Pr[I] + \Pr[U/V_1]\Pr[V_1] + \Pr[U/V_2]\Pr[V_2] + \Pr[U/D]\Pr[D]}{\Pr[I \cup V_1 \cup V_2 \cup D]} \quad (159)$$

όπου

$$\Pr[U / I] = \Phi_1(\Phi_2 + \Phi_3)$$

$$\Phi_1 = r_d\ ((3,4), B)$$

$$\Phi_2 = (1 - r_u\ (2, A)) \frac{p_s(2, A)}{p_s(2, A) + p_{b4}((3,4), A)}$$

$$\Phi_3 = (1 - r_d(((3,4), A)) \frac{p_{b4}((3,4), A)}{p_s(2, A) + p_{b4}((3,4), A)}$$

$$\Pr[U / D] = \Phi_4(\Phi_5 + \Phi_6)$$

$$\Phi_4 = r_4$$

$$\Phi_5 = (1 - r_u\ (2, A)) \frac{p\ (2, A,0,0,0)}{p\ (2, A,0,0,0) + \sum_{\substack{n=N-1 \\ \alpha_1, \alpha_3 \in \{0,1\}}}^{n=N} p(((3,4), A), n, \alpha_1, 0, \alpha_3)}$$

$$\Phi_6 = (1 - r_d((3,4), A)) \frac{\sum_{\substack{n=N-1 \\ \alpha_1, \alpha_3 \in \{0,1\}}}^{n=N} p(((3,4), A), n, \alpha_1, 0, \alpha_3)}{p\ (2, A,0,0,0) + \sum_{\substack{n=N-1 \\ \alpha_1, \alpha_3 \in \{0,1\}}}^{n=N} p(((3,4), A), n, \alpha_1, 0, \alpha_3)}$$

$$\Pr[U / V_1] = \frac{(1 - r_u(2, A)) p(2, A,1,0,1) + p_u(2, A) p_u(2, A,1,1,1)}{p(2, A,1,0,1) + p_u(2, A,1,1,1)} + \frac{\mathrm{M}}{L}$$

όπου

$$\begin{aligned} M = {} & (1 - r_d((3,4), A)) p((3,4), A, N-2,0,1,0) + (1 - r_d((3,4), A)) p((3,4), A, N-2,1,1,0) + \\ & p_d((3,4), A) p((3,4), A, N-2,0,1,1) + p_d((3,4), A) p((3,4), A, N-2,1,1,1) + \\ & (1 - r_d((3,4), A)) r_{u_1}((3,4), A) p((3,4), A, N-3,0,1,0) + \\ & (1 - r_d((3,4), A))(1 - p_{u_1}((3,4), A)) p((3,4), A, N-3,1,1,0) + \\ & r_{u_1}((3,4), A) p_d((3,4), A) p((3,4), A, N-3,0,1,1) + \\ & (1 - p_{u_1}((3,4), A)) p_d((3,4), A) p((3,4), A, N-3,1,1,1) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} L = {} & p((3,4), A, N-2,0,1,0) + p((3,4), A, N-2,1,1,0) + p((3,4), A, N-2,0,1,1) + \\ & p((3,4), A, N-2,1,1,1) + p((3,4), A, N-3,1,1,0) + p((3,4), A, N-3,0,1,0) + \\ & p((3,4), A, N-3,0,1,1) + p((3,4), A, N-3,1,1,1) \end{aligned}$$

$$\Pr[U / V_2] = r_d((3,4), B) \Pr[U / V_1]$$

$$\Pr[D] = p(2,B,0,0,0) + \frac{p_d}{r_d}\left(PR_d(2,B) - v_d\, p(2,B,0,0,1) + r_d\, p(2,B,0,0,0)\right) +$$

$$\frac{v_d}{r_d} p(2,B,0,0,1) - 1 + p_s(2,A) + p_{b4}((3,4),A) + p(2,A,0,0,0) + p((3,4),A),N,0,0,0) +$$

$$p((3,4),A),N-1,0,0,0) + p(2,B,0,0,0) + p((3,4),B),N,0,0,0) + p((3,4),B),N-1,0,0,0) - p_{b4}((3,4),B) -$$

$$p(2,B,0,0,0)$$

$$\Pr[I] = p_{b4}((3,4),B)$$

$$\Pr[V_1] = \sum_{n=0}^{n=N-2}\left(p((3,4),B,n,0,0,0) + p((3,4),B,n,0,0,1) + p((3,4),B,n,1,0,1) + p((3,4),B,n,1,0,0)\right)$$

$$\Pr[V_2] = \sum_{n=N-1}^{n=N}\left(p((3,4),B,n,0,0,0) + p((3,4),B,n,0,0,1) + p((3,4),B,n,1,0,1) + p((3,4),B,n,1,0,0)\right)$$

επειδή τα γεγονότα I,D,V_1,V_2 είναι ξένα μεταξύ τους

$$\Pr[I \cup V_1 \cup V_2 \cup D] = \Pr[I] + \Pr[V_1] + \Pr[D] + \Pr[V_2]$$

4.12.16 Εξίσωση διακοπής της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(2,A)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για την εύρεση της παραμέτρου $p_d(2,A)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(2,A)$.

$$p_d(2,A) = K_1 + \frac{K_2 + C + D + E}{F} \tag{160}$$

όπου

$K_1=p_4$

$$K_2 = (1 - r_{u1}((3,4),A))(1 - p_{u2}((3,4),A))(1 - r_d((3,4),A))p(((3,4),A),N-2,0,1,0) +$$
$$(1 - r_{u1}((3,4),A))(1 - p_{u2}((3,4),A))p_d((3,4),A)p(((3,4),A),N-2,0,1,1) +$$
$$p_{u1}((3,4),A)(1 - p_{u2}((3,4),A))(1 - r_d((3,4),A))p(((3,4),A),N-2,1,1,0) +$$
$$p_{u1}((3,4),A)(1 - p_{u2}((3,4),A))p_d((3,4),A)p(((3,4),A),N-2,1,1,1)$$

$$C = r_{u1}((3,4),A)p_{u2}((3,4),A)(1 - r_d((3,4),A))p(((3,4),A),N-2,010) +$$
$$r_{u1}((3,4),A)p_{u2}((3,4),A)p_d((3,4),A)p(((3,4),A),N-2,011) +$$
$$(1 - p_{u1}((3,4),A))p_{u2}((3,4),A)(1 - r_d((3,4),A))p(((3,4),A),N-2,110) +$$
$$(1 - p_{u1}((3,4),A))p_{u2}((3,4),A)p_d((3,4),A)p(((3,4),A),N-2,111)$$

$$D = r_{u1}((3,4),A)(1-p_{u2}((3,4),A))(1-r_d((3,4),A))p(((3,4),A),N-3,010) +$$
$$r_{u1}((3,4),A)(1-p_{u2}((3,4),A))p_d((3,4),A)p(((3,4),A),N-3,011) +$$
$$(1-p_{u1}((3,4),A))(1-p_{u2}((3,4),A))(1-r_d((3,4),A))p(((3,4),A),N-3,110) +$$
$$(1-p_{u1}((3,4),A))(1-p_{u2}((3,4),A))p_d(((3,4),5),1)p(((3,4),A),N-3,111)$$
$$E = r_{u1}((3,4),A)(1-p_{u2}((3,4),A))(1-r_d((3,4),A))p(((3,4),A),N-2,010) +$$
$$r_{u1}((3,4),A)(1-p_{u2}((3,4),A))p_d((3,4),A)p(((3,4),A),N-2,011) +$$
$$(1-p_{u1}((3,4),A))(1-p_{u2}((3,4),A))(1-r_d((3,4),A))p(((3,4),A),N-2,110) +$$
$$(1-p_{u1}((3,4),A))(1-p_{u2}((3,4),A))p_d((3,4),A)p(((3,4),A),N-2,111)$$

$$F = PR(2,A) - v_d(2,A)p((2,A),0,0,1) + r_d(2,A)p((2,A),0,0,0)$$

4.12.17 Εξίσωση ροής (flow rate idle time) για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(2,B)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας εμφάνισης βλάβης $p_d(2,B)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_u(2,B)$

$$p_d(2,B) = \frac{Q\cdot\left[\frac{PR(2,B)}{e_4} - C + r_d(2,B)\left(\frac{1-PR(2,B)}{Q}\right) + p_{b4}((3,4),B)\right]}{PR(2,B)} \quad (161)$$

όπου

$$p_{b4}((3,4),B) = \Psi_1 + \Psi_2$$

$$\Psi_1 = \frac{PR_{u2}((3,4),B) - \sum_{\substack{n=0 \\ \alpha_1,\alpha_3\in\{0,1\}}}^{n=N-2}\left(p(((3,4),B),n,\alpha_1,1,\alpha_3)\right)}{v_{u2}((3,4),B)}$$

$$\Psi_2 = \frac{r_{u2}((3,4),B)\sum_{\substack{n=N-1 \\ \alpha_1,\alpha_3\in\{0,1\}}}^{n=N}\left(p(((3,4),B),n,\alpha_1,1,\alpha_3)\right)}{v_{u2}((3,4),B)}$$

$$C = p_s(2,A) + p_{b4}((3,4),A) + p((2,A),0,0,0) + p(((3,4),A),N,0,0,0) +$$
$$p(((3,4),A),N,1,0,0) + p(((3,4),A),N-1,0,0,0) + p(((3,4),A),N-1,1,0,0) +$$
$$p(((3,4),A),N-1,1,0,1) + p(((3,4),A),N-1,0,0,1)$$

$$\frac{r_u + r_d - r_u p_d - 2r_u r_d}{r_d\left(r_u + r_d - r_u r_d\right)} = K$$

$$Q = r(2,B)\left(1 + v_d(2,B)K\right)$$

4.12.18 Εξίσωση βλάβης αδράνειας για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(2,A)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας εμφάνισης βλάβης αδράνειας $v_d(2,A)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(2,A)$.

$$v_u(2,A) = p_4 p_{b4}((3,4),A)\left(1 - \frac{p_s(2,B) + p_{b4}((3,4),B)}{p_s(2,A) + p_{b4}((3,4),A)}\right) \quad (162)$$

4.12.19 Εξίσωση βλάβης αδράνειας για την εικονική μηχανή $M_d(2,B)$

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας εμφάνισης βλάβης αδράνειας $v_d(2,B)$ της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(2,B)$.

$$v_d(2,B) = \Pr[U/V \cup W] = \frac{\Pr[U/V]\Pr[V] + \Pr[U/W]\Pr[W]}{\Pr[V \cup W]} \quad (163)$$

$$\Pr[U/V] = r_u\ (2,A)$$
$$\Pr[U/W] = r_d((3,4),A)$$

$$\Pr[V \cup W] = p_s(2,B)$$

$$\Pr[V] = p_s(2,B)\frac{p_s(2,A)}{p_{b4}((3,4),A) + p_s(2,A)} \text{ και}$$
$$\Pr[W] = p_s(2,B)\frac{p_{b4}((3,4),A)}{p_{b4}((3,4),A) + p_s(2,A)}$$

4.13 Ο αλγόριθμος της αποσύνθεσης

Για τον υπολογισμό των μέτρων απόδοσης μεγαλύτερων συστημάτων με εργασίες συγχώνευσης σαν και αυτή του σχήματος 18 χρησιμοποιείται ο ακόλουθος αλγόριθμος ο οποίος αποτελείται από οκτώ (8) βήματα:

Βήμα 1^o : Προσδιορισμός της σειράς υπολογισμού των παραμέτρων

Στο βήμα αυτό καθορίζονται δυο σύνολα που περιέχουν όλες τις upstream και downstream μηχανές για κάθε τύπο προϊόντος, που εμπλέκονται στην εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης. Τα σύνολα αυτά περιέχουν τη σειρά με την οποία υπολογίζονται οι παράμετροι των upstream και downstream μηχανών για κάθε τύπο προιόντος. Με $SEQ\{U_A\}$, $SEQ\{D_A\}$, $SEQ\{U_B\}$, $SEQ\{D_B\}$ συμβολίζουμε την σειρά

με την οποία υπολογίζονται οι παράμετροι των upstream και downstream ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών για κάθε τύπο προϊόντων A και B αντίστοιχα.
Σε κάθε αποθηκευτικό χώρο της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής παραγωγής αντιστοιχίζεται ένας δείκτης ο οποίος εκφράζει τη σειρά με την οποία επισκέπτονται τους αποθηκευτικούς χώρους τα προϊόντα όταν κινούνται μέσα στο σύστημα.
Τα σύνολα SEQ{U_A} και SEQ{U_B}, κατασκευάζονται τοποθετώντας πρώτα όλες τις ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές M_{u2} (δεύτερης προτεραιότητας), με αύξουσα σειρά ως προς τον δείκτη του αποθηκευτικού χώρου του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος στο οποίο ανήκουν. Οι υπόλοιπες upstream ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές τοποθετούνται στα σύνολα SEQ{U_A} και SEQ{U_B}, με αύξουσα σειρά ως προς τον δείκτη του αποθηκευτικού χώρου του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος στο οποίο ανήκουν. Τα σύνολα SEQ{D_A} και SEQ{D_B} κατασκευάζονται αντιστρέφοντας τη σειρά των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών των συνόλων SEQ{U_A} και SEQ{U_B}, αντίστοιχα, αντικαθιστώντας τις upstream με τις downstream ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές.

Βήμα 2^o Οριακές Συνθήκες

Εάν η μηχανή M_i είναι μηχανή εισόδου (δηλαδή μηχανή χωρίς προηγούμενο αποθηκευτικό χώρο) για το ΄΄πραγματικό΄΄ σύστημα, τότε οι παράμετροι της ΄΄εικονικής΄΄ upstream μηχανής για κάθε τύπο προϊόντος, στο αντίστοιχο ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα είναι ίσες με τις παραμέτρους της μηχανής M_i., δηλαδή για τη γραμμή του σχήματος 18 έχουμε ότι

$$p_u(1,A) = p_1$$
$$p_u(1,B) = p_1$$
$$p_u(2,A) = p_2$$
$$p_u(2,B) = p_2$$
$$r_u(1,A) = r_1$$
$$r_u(1,B) = r_1$$
$$r_u(2,A) = r_2$$
$$r_u(2,B) = r_2$$

λόγω του ότι οι μηχανές της πραγματικής γραμμής παραγωγής δεν παρουσιάζουν βλάβες αδράνειας οι πιθανότητες εμφάνισης βλαβών αδράνειας των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών που αντιστοιχούν σε μηχανές εισόδου της πραγματικής γραμμής είναι ίσες με μηδέν.

$$v_u(1,A) = 0$$
$$v_u(1,B) = 0$$
$$v_u(2,A) = 0$$
$$v_u(2,B) = 0$$

Ομοίως αν η μηχανή M_k είναι μηχανή εξόδου (δηλαδή δεν υπάρχει κανένας αποθηκευτικός χώρος μετά τη μηχανή M_k) τότε οι παράμετροι της ΄΄εικονικής΄΄ downstream μηχανής του τελευταίου ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος, που αντιστοιχεί στη μηχανή εξόδου της πραγματικής γραμμής είναι ίσες με τις παραμέτρους της μηχανής M_k. Δηλαδή για τη γραμμή του σχήματος 18 έχουμε ότι

$$p_d(5,A) = p_6$$
$$p_d(5,B) = p_6$$

$r_d(5,A) = r_6$
$r_d(5,B) = r_6$
$v_d(5,A) = 0$
$v_d(5,B) = 0$

Βήμα 3^o : Αρχικοποίηση των παραμέτρων όλων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών

Οι αρχικές τιμές με τις οποίες ξεκινά ο αλγόριθμος της αποσύνθεσης καθορίζονται σε αυτό το βήμα. Οι παράμετροι (πιθανότητες εμφάνισης βλαβών, επιδιόρθωσης και βλαβών αδράνειας) όλων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών για κάθε τύπο προϊόντος, θέτονται αρχικά να είναι ίσες με τις αντίστοιχες πιθανότητες των αντίστοιχων μηχανών της πραγματικής γραμμής παραγωγής. Επειδή στη συγκεκριμένη μέθοδο της αποσύνθεσης υπάρχουν δύο τύποι δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης, δυο περιπτώσεις πρέπει να εξετασθούν.

Περίπτωση 1^η : *Δομικά στοιχεία της μεθόδου της αποσύνθεσης με δυο μηχανές και ένα αποθηκευτικό χώρο*

- Οι παράμετροι κάθε ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_u(j,A)$ και $M_u(j,B)$ σε κάθε υποσύστημα $L(j,A)$ και $L(j,B)$ με δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό τίθενται αρχικά να είναι ίσες με τις αντίστοιχες παραμέτρους της μηχανής της πραγματικής γραμμής που βρίσκεται πριν τον αποθηκευτικό χώρο $B_{j,A}$ και $B_{j,B}$ αντίστοιχα Για τη γραμμή παραγωγής του σχήματος 18 έχουμε ότι:

$p_u(1,A) = p_1,$
$p_u(1,B) = p_1$
$r_u(1,A) = r_1$
$r_u(1,B) = r_1$
$v_u(1,A) = 0$
$v_u(1,B) = 0$
$p_u(2,A) = p_2,$
$p_u(2,B) = p_2$
$r_u(2,A) = r_2$
$r_u(2,B) = r_2$
$v_u(2,A) = 0$
$v_u(2,B) = 0$
$p_u(5,A) = p_5,$
$p_u(5,B) = p_5$
$r_u(5,A) = r_5$
$r_u(5,B) = r_5$
$v_u(5,A) = 0$
$v_u(5,B) = 0$

- Οι παράμετροι κάθε ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(j,A)$ και $M_d(j,B)$ σε κάθε υποσύστημα $L(j,A)$ και $L(j,B)$ με δυο μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο τίθενται αρχικά να είναι ίσες με τις αντίστοιχες παραμέτρους της μηχανής της πραγματικής γραμμής που βρίσκεται μετά τον αποθηκευτικό χώρο $B_{j,A}$ και $B_{j,B}$ αντίστοιχα Για τη γραμμή παραγωγής του σχήματος 18 έχουμε ότι:

$p_d(1,A) = p_3,$

$p_d(1,B) = p_3$
$r_d(1,A) = r_3$
$r_d(1,B) = r_3$
$v_d(1,A) = 0$.
$v_d(1,B) = 0$
$p_d(2,A) = p_4$,
$p_d(2,B) = p_4$
$r_d(2,A) = r_4$
$r_d(2,B) = r_4$
$v_d(2,A) = 0$.
$v_d(2,B) = 0$
$p_d(5,A) = p_6$,
$p_d(5,B) = p_6$
$r_d(5,A) = r_6$
$r_d(5,B) = r_6$
$v_d(5,A) = 0$.
$v_d(5,B) = 0$

Περίπτωση 2^{η} : Δομικά στοιχεία της μεθόδου της αποσύνθεσης με τρεις μηχανές και ένα αποθηκευτικό χώρο

- Οι παράμετροι των uptsream ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_{u1}((j,k),A)$, $M_{u1}((j,k),B)$ $M_{u2}((j,k),A)$ και $M_{u2}((j,k),B)$ κάθε υποσυστήματος με τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο για κάθε τύπο προϊόντος , τίθενται αρχικά να είναι ίσες με τις αντίστοιχες παραμέτρους των αντίστοιχων μηχανών της πραγματικής γραμμής που βρίσκονται πριν τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((j,k),A)}$ και $B_{((j,k),B)}$ αντίστοιχα Για τη γραμμή παραγωγής του σχήματος 18 έχουμε ότι:

$p_{u1}((3,4),A)=p_3$
$p_{u1}((3,4),B)=p_3$
$p_{u2}((3,4),A)=p_4$
$p_{u2}((3,4),B)=p_4$
$r_{u1}((3,4),A)=r_3$
$r_{u1}((3,4),B)=r_3$
$r_{u2}((3,4),A)=r_4$
$r_{u2}((3,4),B)=r_4$
$v_{u1}((3,4),A)=0$
$v_{u1}((3,4),B)=0$
$v_{u2}((3,4),A)=0$
$v_{u2}((3,4),B)=0$

- Οι παράμετροι της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d((j,k),A)$ και $M_d((j,k),B)$ κάθε υποσυστήματος $L((j,k),A)$ και $L((j,k),B)$ με τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο, τίθενται αρχικά να είναι ίσες με τις αντίστοιχες παραμέτρους των αντίστοιχων μηχανών της πραγματικής γραμμής που βρίσκονται μετά τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((j,k),A)}$ και $B_{((j,k),B)}$ αντίστοιχα Για τη γραμμή παραγωγής του σχήματος 18 έχουμε ότι:

$p_d((3,4),A)=p_5$
$p_d((3,4),B)=p_5$
$r_d((3,4),A)=r_5$
$r_d((3,4),B)=r_5$
$v_d((3,4),A)=0$
$v_d((3,4),B)=0$

Βήμα 4^o : Υπολογισμός των παραμέτρων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών του συνόλου SEQ{U_A}

Για κάθε ΄΄εικονική΄΄ μηχανή που ανήκει στο σύνολο SEQ{U_A} (εκτός των μηχανών εκείνων που αντιστοιχούν σε μηχανές εισόδου της πραγματικής γραμμής) εκτελούνται οι παρακάτω υπολογισμοί:

(1) Αν στον αμέσως προηγούμενο αποθηκευτικό χώρο από την υπό εξέταση ΄΄εικονική΄΄ μηχανή δεν εκτελούνται εργασίες συγχώνευσης, τότε οι παράμετροι (πιθανότητες εμφάνισης βλαβών, επιδιόρθωσης και βλαβών αδράνειας), υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης που παρουσιάζονται από τον Nemec (1999).

(2) Αν στον αμέσως προηγούμενο αποθηκευτικό χώρο από την υπό εξέταση ΄΄εικονική΄΄ μηχανή εκτελούνται εργασίες συγχώνευσης, τότε οι παράμετροι (πιθανότητες εμφάνισης βλαβών, επιδιόρθωσης και βλαβών αδράνειας), υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης (146), (148) και (150).

(3) Υπολογισμός των μέτρων απόδοσης και των στάσιμων πιθανοτήτων των ΄΄εικονικών΄΄ εμπλεκόμενων υποσυστημάτων χρησιμοποιώντας τις πιο πρόσφατα υπολογισμένες τιμές των παραμέτρων τους. Αν τα υποσυστήματα αυτά αποτελούνται από δυο μηχανές και ένα αποθηκευτικό χώρο, τότε χρησιμοποιείται η μέθοδος που περιγράφεται από τον Nemec (1999), ενώ αν το υποσύστημα αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα αποθηκευτικό χώρο χρησιμοποιείται η μέθοδος που περιγράφηκε στο κεφάλαιο αυτό.

Βήμα 5^o : Υπολογισμός των παραμέτρων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών του συνόλου SEQ{D_A}

Για κάθε ΄΄εικονική΄΄ μηχανή που ανήκει στο σύνολο SEQ{D_A} (εκτός των μηχανών εκείνων που αντιστοιχούν σε μηχανές εξόδου της πραγματικής γραμμής) εκτελούνται οι παρακάτω υπολογισμοί:

(1) Αν στον αμέσως επόμενο (downstream) αποθηκευτικό χώρο από την υπό εξέταση ΄΄εικονική΄΄ μηχανή δεν εκτελούνται εργασίες συγχώνευσης, τότε οι παράμετροι (πιθανότητες εμφάνισης βλαβών, επιδιόρθωσης και βλαβών αδράνειας), υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις κλασσικές εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης που παρουσιάζονται από τον Nemec (1999).

(2) Αν στον αμέσως επόμενο (downstream) αποθηκευτικό χώρο από την υπό εξέταση ΄΄εικονική΄΄ μηχανή εκτελούνται εργασίες συγχώνευσης, τότε οι παράμετροι (πιθανότητες εμφάνισης βλαβών, επιδιόρθωσης και βλαβών αδράνειας), υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της

τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης (152), (154), (156), (158), (160) και (162).

(3) Υπολογισμός των μέτρων απόδοσης και των στάσιμων πιθανοτήτων των ΄΄εικονικών΄΄ εμπλεκόμενων υποσυστημάτων χρησιμοποιώντας τις πιο πρόσφατα υπολογισμένες τιμές των παραμέτρων τους. Αν τα υποσυστήματα αυτά αποτελούνται από δυο μηχανές και ένα αποθηκευτικό χώρο, τότε χρησιμοποιείται η μέθοδος που περιγράφεται από τον Nemec (1999), ενώ αν το υποσύστημα αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα αποθηκευτικό χώρο χρησιμοποιείται η μέθοδος που περιγράφηκε στο κεφάλαιο αυτό.

Βήμα 6^{o} : Υπολογισμός των παραμέτρων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών του συνόλου SEQ{U_B}

Για κάθε ΄΄εικονική΄΄ μηχανή που ανήκει στο σύνολο SEQ{U_B} (εκτός των μηχανών εκείνων που αντιστοιχούν σε μηχανές εισόδου της πραγματικής γραμμής) εκτελούνται οι παρακάτω υπολογισμοί:

(1) Αν στον αμέσως προηγούμενο αποθηκευτικό χώρο από την υπό εξέταση ΄΄εικονική΄΄ μηχανή δεν εκτελούνται εργασίες συγχώνευσης, τότε οι παράμετροι (πιθανότητες εμφάνισης βλαβών, επιδιόρθωσης και βλαβών αδράνειας), υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης που παρουσιάζονται από τον Nemec (1999).

(2) Αν στον αμέσως προηγούμενο αποθηκευτικό χώρο από την υπό εξέταση ΄΄εικονική΄΄ μηχανή εκτελούνται εργασίες συγχώνευσης, τότε οι παράμετροι (πιθανότητες εμφάνισης βλαβών, επιδιόρθωσης και βλαβών αδράνειας), υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης (147), (149) και (151).

(3) Υπολογισμός των μέτρων απόδοσης και των στάσιμων πιθανοτήτων των ΄΄εικονικών΄΄ εμπλεκόμενων υποσυστημάτων χρησιμοποιώντας τις πιο πρόσφατα υπολογισμένες τιμές των παραμέτρων τους. Αν τα υποσυστήματα αυτά αποτελούνται από δυο μηχανές και ένα αποθηκευτικό χώρο, τότε χρησιμοποιείται η μέθοδος που περιγράφεται από τον Nemec (1999), ενώ αν το υποσύστημα αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα αποθηκευτικό χώρο χρησιμοποιείται η μέθοδος που περιγράφηκε στο κεφάλαιο αυτό.

Βήμα 7^{o} : Υπολογισμός των παραμέτρων των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών του συνόλου SEQ{D_B}

Για κάθε ΄΄εικονική΄΄ μηχανή που ανήκει στο σύνολο SEQ{D_B} (εκτός των μηχανών εκείνων που αντιστοιχούν σε μηχανές εξόδου της πραγματικής γραμμής) εκτελούνται οι παρακάτω υπολογισμοί:

(1) Αν στον αμέσως επόμενο (downtream) αποθηκευτικό χώρο από την υπό εξέταση ΄΄εικονική΄΄ μηχανή δεν εκτελούνται εργασίες συγχώνευσης, τότε οι παράμετροι (πιθανότητες εμφάνισης βλαβών, επιδιόρθωσης και βλαβών αδράνειας), υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις κλασσικές εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης που παρουσιάζονται από τον Nemec (1999).

(2) Αν στον αμέσως επόμενο (downtream) αποθηκευτικό χώρο από την υπό εξέταση ΄΄εικονική΄΄ μηχανή εκτελούνται εργασίες συγχώνευσης, τότε οι παράμετροι (πιθανότητες εμφάνισης βλαβών, επιδιόρθωσης και βλαβών

αδράνειας), υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης (153), (155), (157), (159), (161) και (163).

(3) Υπολογισμός των μέτρων απόδοσης και των στάσιμων πιθανοτήτων των ΄΄εικονικών΄΄ εμπλεκόμενων υποσυστημάτων χρησιμοποιώντας τις πιο πρόσφατα υπολογισμένες τιμές των παραμέτρων τους. Αν τα υποσυστήματα αυτά αποτελούνται από δυο μηχανές και ένα αποθηκευτικό χώρο, τότε χρησιμοποιείται η μέθοδος που περιγράφεται από τον Nemec (1999), ενώ αν το υποσύστημα αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα αποθηκευτικό χώρο χρησιμοποιείται η μέθοδος που περιγράφηκε στο κεφάλαιο αυτό.

Βήμα 8^{ο}: Συνθήκη τερματισμού του αλγόριθμου

Εκτέλεσε τα βήματα 4 και 5 για τα προϊόντα τύπου Α και 6, 7 για τα προϊόντα τύπου Β εναλλάξ, μέχρις ότου ικανοποιηθούν* οι εξισώσεις διατήρησης της ροής (*conservation of flow equations)*.

* Στην πράξη η ικανοποίηση των εξισώσεων διατήρησης της ροής γίνεται προσεγγιστικά. Αυτό σημαίνει ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποδόσεων δυο οποιονδήποτε ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων για κάθε τύπο προϊόντος πρέπει να είναι μικρότερη από ένα προκαθορισμένο μικρό θετικό αριθμό ε=0.00001.

4.14 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Ο αλγόριθμος της αποσύνθεσης της παραγράφου 4.13 εφαρμόστηκε σε σημαντικό πλήθος γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης & παραγωγής δυο διαφορετικών τύπων προϊόντων με σκοπό τον υπολογισμό της απόδοσής τους. Για να διαπιστωθεί η ορθότητα η όχι των αποτελεσμάτων του προτεινόμενου αλγόριθμου κάθε υπό εξέταση γραμμή παραγωγής προσομοιώθηκε χρησιμοποιώντας το λογισμικό πακέτο προσομοίωσης ARENA 3.0.
Η σύγκριση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης και αυτών που προκύπτουν από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου της μεθόδου της αποσύνθεσης οδηγεί σε δυο βασικά συμπεράσματα.

Το πρώτο συμπέρασμα είναι ότι η επί τοις εκατό απόκλιση της εκτίμησης της απόδοσης με τη μέθοδο της αποσύνθεσης από την απόδοση που προκύπτει από τη προσομοίωση των αντίστοιχων γραμμών παραγωγής για τα προϊόντα τύπου ΄΄Α΄΄ είναι πάντοτε μικρότερη από την αντίστοιχη επί τοις εκατό απόκλιση για τα προϊόντα τύπου ΄΄Β΄΄.
Στο ίδιο ακριβώς συμπέρασμα κατέληξε και ο Nemec (1999).

Δυστυχώς από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου της μεθόδου της αποσύνθεσης η απόκλιση στην εκτίμηση της απόδοσης ακόμη και για τα προιόντα τύπου ΄΄Α΄΄ είναι αρκετά μεγάλη.

Το δεύτερο συμπέρασμα είναι ότι σε πολλές περιπτώσεις γραμμών παραγωγής ο αλγόριθμος της μεθόδου της αποσύνθεσης δεν συνέκλινε με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατός ο υπολογισμός της απόδοσής τους.

Οι περιπτώσεις στις οποίες δεν υπήρχε σύγκλιση του αλγόριθμου της μεθόδου της αποσύνθεσης ήταν εκείνες όπου οι παράμετροι των μηχανών της γραμμής παραγωγής ήταν τέτοιες ώστε ο αποθηκευτικός χώρος τόσο για τα προϊόντα τύπου ΄΄Α΄΄ όσο και για τα προϊόντα τύπου ΄΄Β΄΄ που βρίσκεται πριν την μηχανή που συνέβαιναν οι εργασίες συγχώνευσης ήταν το μεγαλύτερο μέρος του χρόνου γεμάτος.
Όταν οι παράμετροι των μηχανών της γραμμής παραγωγής ήταν τέτοιες ώστε ο αποθηκευτικός χώρος ανεξαρτήτως του τύπου προϊόντος που βρίσκεται πριν την μηχανή που συνέβαιναν οι εργασίες συγχώνευσης ήταν το μεγαλύτερο μέρος του χρόνου άδειος τότε ο αλγόριθμος συνέκλινε αλλά και πάλι τα αποτελέσματα δεν ήταν ικανοποιητικά.

4.15 Συμπεράσματα και περαιτέρω έρευνα

Στο κεφάλαιο αυτό ασχοληθήκαμε με την ανάλυση συστημάτων σαν και αυτό του σχήματος 18 στα οποία γίνονται εργασίες συγχώνευσης και παραγωγή δυο διαφορετικών τύπων προϊόντων που μοντελοποιούνται χρησιμοποιώντας το σύστημα του σχήματος 21.

Η συνεισφορά της εργασίας στο κεφάλαιο αυτό είναι η ανάλυση γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης και παραγωγή δυο διαφορετικών τύπων προϊόντων επεκτείνοντας τη μέθοδο της αποσύνθεσης που παρουσιάστηκε από τον Nemec (1999) για την ανάλυση σειριακών συστημάτων παραγωγής δυο διαφορετικών τύπων προϊόντων.

Η μέθοδος της αποσύνθεσης επεκτάθηκε χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα δυο διαφορετικούς τύπους δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης. Ο ένας τύπος είναι το δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιήθηκε από τον Nemec (1999) το οποίο αποτελείται από δυο μηχανές και έναν ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο και χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση του τμήματος του συστήματος στο οποίο δεν γίνονται εργασίες συγχώνευσης.
Ο δεύτερος τύπος δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης αποτελείται από τρεις μηχανές και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο και παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 21. Αυτό το δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης χρησιμοποιήθηκε για τη μοντελοποίηση του τμήματος του συστήματος στο οποίο γίνονται εργασίες συγχώνευσης.
Για να είναι δυνατή η μοντελοποίηση της ύπαρξης δυο τύπου προϊόντων οι μηχανές που απαρτίζουν και τους δυο τύπους δομικών στοιχείων της μεθόδου της αποσύνθεσης θεωρήσαμε ότι μπορούν να παρουσιάσουν βλάβη εκτός από όταν επεξεργάζονται ένα προϊόν (operation dependent failures) και όταν είναι ανενεργές (idleness failures).

Η επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης ώστε να είναι εφαρμόσιμη στην ανάλυση συστημάτων σαν και αυτό του σχήματος 18 στα οποία γίνονται εργασίες συγχώνευσης και παραγωγή δυο διαφορετικών τύπων προϊόντων έγινε σε δυο φάσεις.

Στην πρώτη φάση αναλύθηκε ο νέος τύπος δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης του σχήματος 21, χρησιμοποιώντας Μαρκοβιανή Αλυσίδα. Δημιουργήθηκαν αναλυτικά όλες οι εξισώσεις μετάβασης του συστήματος για

οποιαδήποτε τιμή N της χωρητικότητάς του, που περιγράφουν την πιθανότητα μετάβασης του συστήματος από μια κατάσταση σε μια άλλη. Στη συνέχεια κατασκευάστηκε ένας αλγόριθμος ο οποίος γεννά τον πίνακα μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή N της χωρητικότητας του συστήματος και ο αλγόριθμος αυτός προγραμματίστηκε στη γλώσσα προγραμματισμού C++.
Η επίλυση των εξισώσεων που προέκυψαν από την εφαρμογή του αλγόριθμου με σκοπό τον υπολογισμό της απόδοσης του συστήματος αυτού έγινε με χρήση της μεθόδου απαλοιφής του Gauss.
Για λόγους σύγκρισης ένα μοντέλο προσομοίωσης δημιουργήθηκε στο πρόγραμμα προσομοίωσης ARENA 3.0. Τα αποτελέσματα που δόθηκαν συγκρινόμενα με αυτά της προσομοίωσης, πιστοποιούν ότι ο προτεινόμενος αλγόριθμος για τον υπολογισμό της απόδοσης του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης εκτιμά την απόδοση με μεγάλη ακρίβεια.

Στη δεύτερη φάση μετά τον υπολογισμό της απόδοσης του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης του σχήματος 21, δημιουργήθηκαν οι εξισώσεις της τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης οι οποίες ενσωματώνουν το νέο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης. Οι εξισώσεις αυτές είναι πολύ διαφορετικές από τις εξισώσεις της αποσύνθεσης που παρουσιάσθηκαν από τον Nemec (1999) για σειριακά συστήματα, διότι έλαβαν υπόψη τις εργασίες συγχώνευσης.
Μετά τη δημιουργία των εξισώσεων της τροποποιημένης μεθόδου της αποσύνθεσης παρουσιάσθηκε ένας αλγόριθμος ο οποίος χρησιμοποιείται για την ταυτόχρονη επίλυση όλων των εξισώσεων αυτών για κάθε τύπο προϊόντος ξεχωριστά.

Πιθανές περιοχές περαιτέρω έρευνας είναι οι εξής :

- Επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό ώστε να είναι δυνατή η μοντελοποίηση συστημάτων σαν και αυτό του σχήματος 18 στα οποία υπάρχει η δυνατότητα παραγωγής k τύπου προϊόντων όπου k>2.

- Επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης, τροποποιώντας τις εξισώσεις και τον αλγόριθμο της αποσύνθεσης που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό για συστήματα στα οποία οι χρόνοι εξυπηρέτησης των μηχανών δεν θα είναι σταθεροί αλλά στοχαστικοί.

- Ανάλυση με χρήση της μεθόδου της αποσύνθεσης συστημάτων σαν και αυτό που μελετήθηκε στο κεφάλαιο αυτό στα οποία γίνονται εκτός από εργασίες συγχώνευσης και εργασίες διάσπασης.

- Ανάλυση με χρήση της μεθόδου της αποσύνθεσης συστημάτων στα οποία κάθε σταθμός εργασίας αποτελείται από παράλληλες μηχανές εξυπηρέτησης και υπάρχει η δυνατότητα παραγωγής δυο τύπου προϊόντων.

Βιβλιογραφία

[1] Altiok, T. (1997), *Performance Analysis of Manufacturing Systems*, New York: Springer.

[2] Colledani, M., Matta, A. and Tolio, T. (2003), ‘‘Performance evaluation of production lines with finite buffer capacity producing two different products’’, Proceedings of the Fourth Aegean International Conference on “Analysis of manufacturing systems” 1-4 July 2003, Samos Island, Greece, pp. 231—240.

[3] Dallery, Y., David, R. and Xie, X. (1988), “An efficient algorithm for the analysis of transfer lines with unreliable machines and finite buffers”, *IIE Transactions,* 20(3), 280–283.

[4] Dallery, Y., and Gershwin, S.B. (1992) “Manufacturing flow line systems: A review of models and analytical results”, *Queueing Systems Theory and Applications*, 12, 3–94: Special issue on queuing models of manufacturing systems.

[5] Diamantidis, A.C., Papadopoulos, C.T., and Vidalis, M.I., (2004) “Exact analysis of a discrete material three station one buffer merge system with unreliable machines”, *International Journal of Production Research,*42(4), 651—675.

[6] Di Mascolo, M., David, R., and Dallery, Y., (1991), “Modeling and Analysis of assembly systems with unreliable machines and finite buffers”, *IIE Transactions*, 23(4), 315–331.

[7] Gershwin, S.B. (1987), “An efficient decomposition algorithm for the approximate evaluation of tandem queues with finite storage space and blocking”, *Operations Research,* 35, pp. 291–305.

[8] Gershwin S. B., (1991), “Assembly/disassembly systems: An efficient decomposition Algorithm for tree structured networks”, *IIE Transactions,* 23(4), pp. 302–314.

[9] Gershwin, S.B. (1994) *Manufacturing Systems Engineering,* Englewood Cliffs, Prentice Hall.

[10] Gershwin, S.B., Maggio, N., Matta, A., Tolio, T. and Werner, L. (2001), *‘‘*Analysis of Loop Networks by decomposition”, Proceedings of the Third Aegean International Conference on Analysis and Modeling of Manufacturing Systems, May 19-22, Tinos Island, Greece, pp. 239–248.

[11] Gosavi, Hemant. D. and J.MacGregor, Smith. (1995), “Asymptotic bounds of throughput in series-parallel queueing networks”, *Computers Ops Res.,* Vol 22, No 10, pp. 1057--1073.

[12] Helber, S., (1998), “Decomposition of unreliable assembly/disassembly networks with limited buffer capacity and random processing times”, *European Journal of Operational Research*, 109, pp. 24–42.

[13] Helber, S. (1999), *Performance Analysis of Flow-Lines with Nonlinear Flow of Material*, Volume 473 of Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag.

[14] Helber, S. and Mehrtens, N. (1999), “Exact analysis of a continuous material merge system with limited buffer capacity and three stations”, Technical Report, D-38678, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

[15] Helber, S. and Jusic, H. (2002), “A new decomposition approach for non-cyclic continuous material flow lines with a merging flow of material”, Technical Report, Clausthal-Zellerfeld, Germany

[16] Hillier, F.S. and Boling, R.W. (1967), ``Finite queues in series, with exponential or Erlang service times -- a numerical approach", *Operations Research*, 15, pp. 286—303.

[17] Jain, Sushant and J.MacGregor, Smith. (1994), “Open finite queueing networks with M/M/C/K parallel servers”, *Computers Ops Res.,* Vol 21, No 3, pp. 297—317.

[18] Lim, J.-T., Meerkov, S.M. and Top, F. (1990), “Homogeneous, asymptotically reliable serial production lines: Theory and a case study’’, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 5, pp. 525—533.

[19] Nemec, Joseph E., February, (1999), “Diffusion and Decomposition Approximations of Stochastic Models of Multiclass Processing Networks”, Ph.D. Thesis, Operations Research Center, M.I.T., USA

[20] Papadopoulos, H.T., Heavey, C. and O’Kelly, M.E.J. (1989), “The throughput rate of multistation reliable production lines with interstation buffers: (I) Exponential case ’’, *Computers in Industry,* 13, pp. 229–244.

[21] Papadopoulos, H. T., Heavey, C., and Browne, J., (1993), *Queueing Theory in Manufacturing Systems Analysis and Design*. (Chapman & Hall, London).

[22] Papadopoulos, H. T., and O’Kelly, M. E. J., (1989), “A Recursive algorithm for generating the transition matrices of multistation series production lines”, *Computers in Industry,* 12, pp. 227–240

[23] Perros, G. Harry (1994), *Queueing Networks with Blocking – Exact and Approximate Solutions*, Oxford University Press, New York.

[24] Tan, B. (2001), “A three station merge system with unreliable stations and a shared buffer”, *Mathematical and Computer Modelling*, 33, pp. 1011–1026.

[25] Yeralan, S. and Tan, B. (1997a), “Analysis of multistation production systems with limited buffer capacity, Part I”, *Mathematical and Computer Modelling*, 25(7), pp. 109–122.

[26] Tan, B. and Yeralan, S. (1997b), “Analysis of multistation production systems with limited buffer capacity, Part II”, *Mathematical and Computer Modelling*, 25(11), pp. 109–123.

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΗ:

Diamantidis, A.C. and Papadopoulos, C.T., (2005), “Markovian analysis of a discrete material manufacturing system with merge operations, operational dependent and idleness failures’’, *Computers and Industrial Engineering*.
(το άρθρο αυτό έχει ήδη γίνει δεκτό προς δημοσίευση)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΜΟΥΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΟΥ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ ΠΟΛΛΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με την ανάλυση σειριακών γραμμών παραγωγής με πεπερασμένης χωρητικότητας ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους, στις οποίες κάθε σταθμός εργασίας αποτελείται πολλές παράλληλες μηχανές επεξεργασίας και υπάρχει δυνατότητα παραγωγής ενός τύπου προϊόντων. Τέτοιου είδους συστήματα είναι ιδιαιτέρως σημαντικά διότι συναντώνται συχνά στη βιομηχανία (αυτοκινητοβιομηχανίες, ευέλικτα βιομηχανικά συστήματα, δίκτυα τηλεπικοινωνιών, εφαρμογές υπολογιστών (multiprogramming) και άλλα).

Ορισμένοι ερευνητές στο παρελθόν ασχολήθηκαν με την ανάλυση τέτοιων συστημάτων εφαρμόζοντας διάφορες τεχνικές με στόχο την εύρεση των μέτρων απόδοσης τους. Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού θα ασχοληθούμε με την ανάλυση αυτού του είδους γραμμών παραγωγής, επεκτείνοντας τη μέθοδο της αποσύνθεσης ώστε να είναι εφαρμόσιμη σε γραμμές παραγωγής με παράλληλες μηχανές επεξεργασίας ανά σταθμό εργασίας. Πιο συγκεκριμένα στην ενότητα 5.2 παρουσιάζεται μια ανασκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας σχετικά με την ανάλυση γραμμών παραγωγής με παράλληλους εξυπηρετητές ανά σταθμό εργασίας. Στην ίδια ενότητα αναφέρονται αρκετές εργασίες ερευνητών στις οποίες χρησιμοποιείται μια διαφορετική τεχνική από αυτή της αποσύνθεσης, η τεχνική της αντικατάστασης για την ανάλυση αυτού του είδους γραμμών παραγωγής.
Στην ενότητα 5.3 περιγράφεται και ορίζεται το πρόβλημα που εξετάζεται στο κεφάλαιο αυτό, ενώ στην ενότητα 5.4 περιγράφονται τα βασικά χαρακτηριστικά του υπό εξέταση συστήματος. Στην ενότητα 5.5 παρουσιάζεται η γραφική απεικόνιση της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιείται στο κεφάλαιο αυτό για την εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με παράλληλους εξυπηρετητές ανά σταθμό εργασίας. Στην ενότητα 5.6 παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά του συστήματος που χρησιμοποιείται σαν δομικό στοιχείο από τη μέθοδο της αποσύνθεσης.
Στην ενότητα 5.7 παρουσιάζονται οι εξισώσεις μετάβασης του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης, ενώ στις ενότητες 5.8 και 5.9 παρουσιάζονται ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για τη γένεση του πίνακα μετάβασης του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης και ένα αριθμητικό παράδειγμα του αλγόριθμου, αντίστοιχα. Στην ενότητα 5.10 παρουσιάζονται κάποιοι μαθηματικοί τύποι με τους οποίους μπορούν να υπολογιστούν τα μέτρα απόδοσης του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης, ενώ στην ενότητα 5.11 παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγόριθμου της ενότητας 5.8 για την εκτίμηση της απόδοσης του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης. Στην ενότητα 5.12 παρουσιάζονται τα σύνολα των εξισώσεων της αποσύνθεσης, στην ενότητα 5.13 παρουσιάζεται το σύνολο των εξισώσεων διατήρησης της ροής ενώ στις ενότητες 5.14 και 5.15 παρουσιάζονται οι εξισώσεις flow rate idle time και οι οριακές συνθήκες, αντίστοιχα. Στην ενότητα 5.16 παρουσιάζεται ο αλγόριθμος της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιείται για την ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης, ενώ στην ενότητα 5.17 παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγόριθμου της μεθόδου της αποσύνθεσης για την εκτίμηση της απόδοσης τόσο μικρών όσο και μεγάλων γραμμών παραγωγής. Τέλος στην ενότητα 5.18 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα του κεφαλαίου αυτού ενώ επίσης προτείνονται και κάποιες ερευνητικές περιοχές για περαιτέρω έρευνα.

5.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Οι γραμμές παραγωγής μπορούν να μοντελοποιηθούν σαν δίκτυα ουρών αναμονής και να επιλυθούν με χρήση Μαρκοβιανής ανάλυσης, υποθέτοντας γενικά ότι οι χρόνοι εργασίας των σταθμών εργασίας ακολουθούν διάφορες κατανομές.
Ανάλυση και μελέτη γραμμών παραγωγής με χρήση Μαρκοβιανής ανάλυσης, μπορεί να βρει κανείς στις εργασίες των Hillier και Boling (1967), Παπαδόπουλος et al (1989, 1993) και Altiok (1997), μεταξύ αρκετών άλλων εργασιών.
Το μεγάλο πλεονέκτημα της χρήσης της Μαρκοβιανής ανάλυσης είναι ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι απολύτως ακριβή ως προς την εκτίμηση των μέτρων απόδοσης των συστημάτων στα οποία εφαρμόζεται. Δυστυχώς όμως η Μαρκοβιανή ανάλυση είναι εφαρμόσιμη στην επίλυση ΄΄μικρών΄΄ συστημάτων με το πολύ έξη ή επτά σταθμούς εργασίας. Ο λόγος για τον περιορισμό αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των σταθμών εργασίας και η χωρητικότητα των ενδιάμεσων αποθηκευτικών χώρων, αυξάνεται εκθετικά ο αριθμός των πιθανών καταστάσεων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το πλήθος των εξισώσεων που πρέπει να επιλυθούν να γίνεται τεράστιο με αποτέλεσμα να είναι αδύνατη η επίλυσή τους. Αυτός ο ουσιαστικός περιορισμός της μεθόδου της Μαρκοβιανής ανάλυσης οδήγησε τους ερευνητές στην ανάπτυξη προσεγγιστικών μεθόδων για την εκτίμηση των μέτρων απόδοσης μεγάλων γραμμών παραγωγής με πολλούς σταθμούς εργασίας. Μια από αυτές τις μεθόδους είναι η μέθοδος της αποσύνθεσης (decomposition method) που είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια η οποία αναπτύχθηκε από τον Gershwin (1987) και βελτιώθηκε από τους Dallery, David και Xie (1988).

Εκτός όμως από τη μέθοδο της αποσύνθεσης μια άλλη προσεγγιστική μέθοδος για την εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής αναπτύχθηκε από τους Lim et al (1990). Η μέθοδος αυτή λέγεται μέθοδος της συνάθροισης και ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί περιγράφεται στην παράγραφο 2.5.

Ο κύριος όγκος της διεθνούς βιβλιογραφίας σχετικά με την ανάλυση γραμμών παραγωγής, ασχολείται με συστήματα στα οποία κάθε σταθμός εργασίας αποτελείται από μια μόνο μηχανή επεξεργασίας (single server workstations) και η ροή των προϊόντων στα συστήματα αυτά είναι γραμμική.
Για παράδειγμα οι Dallery και Gershwin, (1992) καθώς και τα βιβλία των Gershwin, (1994) και Παπαδόπουλου, Heavey και Browne, (1993), ασχολούνται με αυτή τη κατηγορία γραμμών παραγωγής.
Τεχνικές οι οποίες αποσυνθέτουν μια γραμμή παραγωγής παρουσιάζονται από τους Perros (1994), Altiok (1997), Helber (1999) και Tan and Yeralan (1997), μεταξύ άλλων.
Οι Tolio και Matta (1998) παρουσιάζουν μια τροποποιημένη μέθοδο της αποσύνθεσης για σειριακές γραμμές παραγωγής στις οποίες οι μηχανές μπορεί να παρουσιάσουν βλάβες για πολλούς διαφορετικούς λόγους με διαφορετική πιθανότητα για κάθε έναν από τους λόγους αυτούς. Ένα πολύ ενδιαφέρουν σημείο σχετικά με την ανάλυση των Tolio και Matta (1998) είναι ότι το δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιείται επιλύεται με τέτοιο τρόπο ώστε η επίλυση να είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος του αποθηκευτικού χώρου.

Μια άλλη σημαντική επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης για την εκτίμηση της απόδοσης σειριακών γραμμών παραγωγής που παράγουν περισσότερα του ενός τύπου προϊόντα, παρουσιάζεται από τον Nemec (1999).
Οι Colledani, Tolio και Matta (2003) ανέπτυξαν μια αρκετά διαφορετική μέθοδο αποσύνθεσης η οποία εφαρμόζεται σε σειριακές γραμμές παραγωγής που συνδυάζουν τα χαρακτηριστικά των γραμμών που εξετάζονται από τους Tolio και Matta (1998) και Nemec (1999). Δηλαδή εξετάζουν με μεγάλη επιτυχία συστήματα τα οποία παράγουν περισσότερα του ενός τύπου προϊόντα και οι μηχανές μπορεί να παρουσιάσουν βλάβες για πολλούς διαφορετικούς λόγους με διαφορετική πιθανότητα για κάθε έναν από τους λόγους αυτούς.
Γραμμές παραγωγής με σταθμούς εργασίας που αποτελούνται από μια μόνο μηχανή και στις οποίες η ροή των προϊόντων δεν είναι γραμμική διότι εμφανίζονται εργασίες συγχώνευσης (merge operations) και διάσπασης (split operations), εξετάζονται με χρήση της μεθόδου της αποσύνθεσης από τους Helber (1999), Gershwin (2001), Helber και Mehrtens (1999), Tan (2001) και Helber και Jussic (2002).

Όλες οι εργασίες που αναφέρθηκαν παραπάνω ασχολούνται με την ανάλυση γραμμών στις οποίες οι σταθμοί εργασίας αποτελούνται από μια μόνο μηχανή. Ο όγκος των εργασιών που ασχολούνται με το αντικείμενο που εξετάζεται στο κεφάλαιο αυτό, δηλαδή με γραμμές παραγωγής στις οποίες οι σταθμοί εργασίας αποτελούνται από περισσότερες από μια μηχανές επεξεργασίας, είναι πολύ μικρότερος.
Αρκετοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με τη μελέτη τέτοιου είδους συστημάτων, χρησιμοποιώντας δίκτυα ουρών αναμονής. Ο Tempelmeier (2001) ασχολήθηκε με μη ομοιογενείς ασύγχρονες γραμμές παραγωγής και παρουσίασε μια προσεγγιστική μέθοδο για την εκτίμηση της απόδοσης των συστημάτων αυτών. Πιο συγκεκριμένα οι χρόνοι επεξεργασίας και η πιθανότητα εμφάνισης βλαβών ακολουθούσαν γενική κατανομή. Η προτεινόμενη μέθοδος βασίζονταν στη μέθοδο της αποσύνθεσης, αποσυνθέτοντας μια γραμμή με M σταθμούς εργασίας σε M-1 συστήματα με δυο σταθμούς εργασίας των οποίων η ανάλυση γινόταν χρησιμοποιώντας $GI/G/1/N_{max}$ ουρές αναμονής. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου αυτής με εκείνα της προσομοίωσης έδειξε ότι τα αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου είναι αρκετά ακριβή.
Οι Cheah και Smith (1994) ασχολήθηκαν με το πώς ένα μοντέλο M/G/C/C ουρών αναμονής μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ενσωματωθεί στη μοντελοποίηση μεγάλων συστημάτων στα οποία το φαινόμενο του μπλοκαρίσματος δεν μπορεί να είναι ελεγχόμενο. Παρουσίασαν μια προσεγγιστική τεχνική οποία βασίζεται στην Expansion μέθοδο και με την οποία ενσωματώνονται συστήματα ουρών αναμονής M/G/C/C σε γραμμές παραγωγής στις οποίες η τοπολογία των σταθμών εργασίας ποικίλει (σειριακή τοπολογία, εργασίες συγχώνευσης –διάσπασης).
Οι Jain και Smith (1994) παρουσίασαν μια αναλυτική τεχνική με την οποία μπορεί να υπολογιστεί η απόδοση M/M/C/K δικτύων ουρών αναμονής. Τα δίκτυα αυτά ενσωματώθηκαν σε γραμμές παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης καθώς και σε σειριακές γραμμές παραγωγής. Ένα άλλο θέμα που εξετάστηκε ήταν η βέλτιστη διάταξη των M/M/C/K εξυπηρετητών με σκοπό την μεγιστοποίηση της απόδοσης.

Μια από τις πρώτες μελέτες για αυτή τη κλάση συστημάτων έγινε από τον Friedman (1963). Ο Friedman παρουσίασε μια μέθοδο η οποία μετέτρεπε το αρχικό σύστημα σε ένα ισοδύναμο σύστημα, το οποίο αποτελείτο από λιγότερους σταθμούς εργασίας και κατά συνέπεια η επίλυσή του ήταν ευκολότερη. Μια βασική υπόθεση που

χρησιμοποίησε ο Friedman ήταν ότι ο χρόνος παραμονής ενός προϊόντος στο σύστημα ήταν ανεξάρτητος από τη διάταξη των σταθμών εργασίας.
Ο Forestier (1980) ασχολήθηκε με αυτοματοποιημένες γραμμές παραγωγής στις οποίες κάθε σταθμός εργασίας αποτελείτο από δυο παράλληλες μηχανές επεξεργασίας. Δυο χρόνια αργότερα οι Dubois και Forestier (1982) εξέτασαν παρόμοια συστήματα χρησιμοποιώντας Μαρκοβιανή ανάλυση, ενώ οι Iyama και Ito (1987) μελέτησαν γραμμές παραγωγής στις οποίες δεν έχουν όλοι οι σταθμοί εργασίας τον ίδιο αριθμό μηχανών και οι μηχανές επεξεργασίας δυο διαφορετικών σταθμών εργασίας έχουν διαφορετικούς χρόνους επεξεργασίας. Παρουσίασαν αποτελέσματα σχετικά με το πώς επιδρά η κατανομή ενός συνολικού αριθμού μηχανών επεξεργασίας στους σταθμούς εργασίας στην απόδοση του συστήματος. Η μέθοδος που χρησιμοποίησαν ήταν επίσης η Μαρκοβιανή ανάλυση. Οι Van Dijk και Van der Wal (1989) παρουσίασαν μια μέθοδο υπολογισμού άνω και κάτω φραγμάτων της απόδοσης συστημάτων με παράλληλες μηχανές επεξεργασίας οι οποίες είχαν εκθετικά κατανεμημένους χρόνους επεξεργασίας. Οι Gosavi και Smith (1995) ανέπτυξαν μια σχετικά εύκολη υπολογιστικά μέθοδο για τον υπολογισμό της απόδοσης καθώς και των άνω και κάτω φραγμάτων της, για συστήματα με δυο σταθμούς εργασίας και παράλληλους εξυπηρετητές. Επίσης επέκτειναν την ανάλυση αυτή σε συστήματα με στοιχειώδεις εργασίες συγχώνευσης και διάσπασης.

Μια από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους, η οποία έχει χρησιμοποιηθεί από αρκετούς ερευνητές για τον υπολογισμό της απόδοσης συστημάτων με σταθμούς εργασίας που αποτελούνται από παράλληλες μηχανές επεξεργασίας είναι η μέθοδος της αντικατάστασης (replacement method). Η μέθοδος της αντικατάστασης ΄΄αντικαθιστά΄΄ κάθε σταθμό εργασίας που αποτελείται από παράλληλους εξυπηρετητές (parallel server workstations) με ένα σχεδόν ισοδύναμο σταθμό εργασίας που αποτελείται από μόνο μια μηχανή επεξεργασίας (single server workstations). Αυτό σημαίνει ότι μετά την ολοκλήρωση της αντικατάστασης η αρχική γραμμή παραγωγής (parallel server wosrkstations) έχει μετασχηματιστεί σε μια άλλη σχεδόν ισοδύναμη γραμμή παραγωγής με μια μηχανή επεξεργασίας ανά σταθμό εργασίας. Μετά τον μετασχηματισμό αυτόν, η απόδοση της γραμμής παραγωγής υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις κλασικές μεθόδους που υπάρχουν για την ανάλυση γραμμών παραγωγής με μια μηχανή επεξεργασίας ανά σταθμό εργασίας (single server workstations), όπως η κλασική μέθοδος της αποσύνθεσης, η μέθοδος της συνάθροισης, Μαρκοβιανή ανάλυση, γενετικοί αλγόριθμοι και άλλες,

Ένα βασικό ερώτημα που προκύπτει από την χρήση της μεθόδου της αντικατάστασης είναι ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η αντικατάσταση και επίσης κατά πόσο το νέο σύστημα που προκύπτει είναι ισοδύναμο με το αρχικό.
Ένα βασικό πρόβλημα που προκύπτει είναι το ποιος θα είναι ο ρυθμός επεξεργασίας, η πιθανότητα εμφάνισης βλαβών και η πιθανότητα επιδιόρθωσης βλαβών, των ισοδύναμων σταθμών εργασίας με μια μηχανή επεξεργασίας, σε σχέση με τις αντίστοιχες παραμέτρους των σταθμών εργασίας (με παράλληλες μηχανές επεξεργασίας) που αντικαθιστούν. Η απάντηση στο πρόβλημα αυτό δεν είναι συγκεκριμένη και ο τρόπος με τον οποίο γίνεται ο υπολογισμός των παραμέτρων του ισοδύναμου συστήματος ποικίλει ανάλογα με τον τρόπο προσέγγισης του προβλήματος από τον ερευνητή.

Οι Ancelin και Semery (1987) χρησιμοποιούν τη μέθοδο της αντικατάστασης για την εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με παράλληλους εξυπηρετητές σε κάθε

σταθμό εργασίας. Ο ρυθμός επεξεργασίας κάθε ισοδύναμου σταθμού εργασίας με ένα μόνο εξυπηρετητή λαμβάνεται ως ίσος με το άθροισμα των χρόνων επεξεργασίας των παράλληλων εξυπηρετητών κάθε σταθμού εργασίας που αντικαθίσταται. Η πιθανότητα εμφάνισης και επιδιόρθωσης βλαβών του ισοδύναμου σταθμού εργασίας δίνεται από μια συνάρτηση της οποίας οι μεταβλητές είναι οι πιθανότητες εμφάνισης και επιδιόρθωσης βλαβών των παράλληλων εξυπηρετητών του σταθμού εργασίας που αντικαθίσταται.

Ο Burman (1995) χρησιμοποιεί επίσης τη μέθοδο της αντικατάστασης για την ανάλυση γραμμών παραγωγής με συνεχή ροή των προϊόντων (continuous flow of material). Ο τρόπος υπολογισμού του μέγιστου ρυθμού επεξεργασίας κάθε ισοδύναμου σταθμού εργασίας είναι ίδιος με αυτόν των Ancelin και Semery (1987), ενώ η πιθανότητα εμφάνισης και επιδιόρθωσης βλαβών του ισοδύναμου σταθμού εργασίας υπολογίζεται υποθέτοντας ότι όλες οι παράλληλες μηχανές επεξεργασίας του σταθμού εργασίας που αντικαθίσταται λειτουργούν ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Οι Patchong και Wilaeys (2001) παρουσίασαν μια μέθοδο αντικατάστασης και ανέπτυξαν τα απαραίτητα σύνολα των εξισώσεων για την εύρεση των παραμέτρων των ισοδύναμων σταθμών εργασίας. Στη συνέχεια μετά την αντικατάσταση, χρησιμοποίησαν τη κλασική μέθοδο της αποσύνθεσης για την ισοδύναμη γραμμή με σταθμούς εργασίας που αποτελούνται από ένα μόνο εξυπηρετητή με σκοπό την εκτίμηση των μέτρων απόδοσης.
Παρόμοια ανάλυση έγινε από τους Jeong και Kim (1999) για συστήματα με εργασίες συναρμολόγησης / αποσυναρμολόγησης (Assembly / Disassembly), παράλληλους εξυπηρετητές ανά σταθμό εργασίας και δυνατότητα παραγωγής διακριτού τύπου προϊόντων. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αντικατάστασης το αρχικό σύστημα μετασχηματιζόταν σε ένα ισοδύναμο σύστημα συναρμολόγησης / αποσυναρμολόγησης (Assembly / Disassembly) με ένα σταθμό επεξεργασίας ανά σταθμό εργασίας και η απόδοση του νέου συστήματος υπολογίστηκε με χρήση της κλασικής μεθόδου της αποσύνθεσης για συστήματα συναρμολόγησης / αποσυναρμολόγησης (Assembly / Disassembly).

Όλες οι τεχνικές που παρουσιάστηκαν στις παραπάνω μελέτες είναι προσεγγιστικές, δηλαδή εκτιμούν κατά προσέγγιση την απόδοση του συστήματος στο οποίο εφαρμόζονται. Οι Buzacott και Shanthikumar (1993) παρουσιάζουν στο βιβλίο τους μια ακριβή μέθοδο για τον υπολογισμό της απόδοσης ενός συστήματος με δυο σταθμούς εργασίας και παράλληλες μηχανές επεξεργασίας.
Η ανάλυση αυτού του συστήματος γίνεται με χρήση μιας στοχαστικής ανέλιξης γεννήσεως θανάτου για την οποία υπολογίζονται οι στάσιμες πιθανότητες. Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται σαν δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης για την ανάλυση γραμμών παραγωγής με περισσότερους από δυο σταθμούς εργασίας χρησιμοποιώντας μια ιδιόμορφη μέθοδο αποσύνθεσης της υπό εξέταση γραμμής παραγωγής. Τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου αυτής συγκρίθηκαν με εκείνα της προσομοίωσης και η σύγκριση δείχνει ότι τα αποτελέσματα είναι ακριβή. Ωστόσο τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται αφορούν μόνο μικρές γραμμές οι οποίες αποτελούνται μέχρι τέσσερις σταθμούς εργασίας.
Οι Vidalis and Papadopoulos (2001) ανέπτυξαν έναν επαναληπτικό αλγόριθμο ο οποίος γεννά το πίνακα μετάβασης αξιόπιστων γραμμών παραγωγής με παράλληλες μηχανές επεξεργασίας σε σταθμό εργασίας. Ο αλγόριθμος αυτός γεννά το πίνακα μετάβασης για οποιαδήποτε γραμμή παραγωγής με Ν σταθμούς εργασίας για

οποιαδήποτε τιμή του N και μπορεί να υπολογίσει με ακρίβεια την απόδοση του συστήματος. Επειδή όμως η ανάπτυξή του βασίζεται στη Μαρκοβιανή ανάλυση η εφαρμογή του περιορίζεται σε σχετικά μικρά συστήματα λόγω του πολύ μεγάλου αριθμού εξισώσεων που προκύπτουν.

Εκτός από τους ερευνητές που ασχολήθηκαν με την ανάπτυξη μεθόδων για την εκτίμηση της απόδοσης συστημάτων με παράλληλους εξυπηρετητές ανά σταθμό εργασίας, υπάρχουν ερευνητές οι οποίοι ασχολήθηκαν με διάφορα προβλήματα βελτιστοποίησης αυτής της κατηγορίας γραμμών παραγωγής. Υπάρχουν τριών ειδών προβλήματα βελτιστοποίησης που σχετίζονται με τέτοιου είδους γραμμές παραγωγής.

1. **Βέλτιστη κατανομή αποθηκευτικού χώρου (Buffer Allocation Problem)**
   Δεδομένου ενός συνολικού αριθμού N μονάδων αποθηκευτικού χώρου, το πρόβλημα είναι να βρεθεί η βέλτιστη κατανομή του χώρου αυτού ανάμεσα στους σταθμούς εργασίας με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτευχθεί μεγιστοποίηση της απόδοσης του συστήματος.

2. **Βέλτιστη κατανομή των εξυπηρετητών (Server Allocation Problem)**
   Δεδομένου ενός συνολικού αριθμού S εξυπηρετητών, το πρόβλημα είναι να βρεθεί η βέλτιστη κατανομή των εξυπηρετητών στους σταθμούς εργασίας με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτευχθεί μεγιστοποίηση της απόδοσης του συστήματος.

3. **Βέλτιστη κατανομή του χρόνου επεξεργασίας (Workload Allocation Problem)**
   Δεδομένου ενός συνολικού χρόνου επεξεργασίας W, το πρόβλημα είναι να βρεθεί η βέλτιστη κατανομή του στις μηχανές επεξεργασίας με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτευχθεί μεγιστοποίηση της απόδοσης του συστήματος

Οι Hillier και So (1989), εξέτασαν μια ειδική περίπτωση του προβλήματος της βέλτιστης κατανομής εξυπηρετητών. Πιο συγκεκριμένα οι Hillier και So ξεκίνησαν θεωρώντας ότι όλοι οι σταθμοί εργασίας αποτελούνται από τον ιδιο αριθμό παράλληλων εξυπηρετητών. Το πρόβλημα που εξέτασαν οι Hillier και So ήταν σε ποιο σταθμό εργασίας θα έπρεπε να προσθέσουν μια η δυο ακόμη μηχανές επεξεργασίας με σκοπό τη βελτιστοποίηση της απόδοσης των συστημάτων αυτών. Οι γραμμές παραγωγής που εξέτασαν αποτελούντο μέχρι και επτά σταθμούς εργασίας ενώ η μέθοδος που χρησιμοποίησαν για την εύρεση της απόδοσης των συστημάτων αυτών ήταν η Μαρκοβιανή ανάλυση.
Οι ίδιοι ερευνητές (Hillier και So (1995)) ασχολήθηκαν αρχικά με κάθε ένα από τα τρία παραπάνω προβλήματα βελτιστοποίησης και στη συνέχεια εξέτασαν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς ανά δυο των προβλημάτων αυτών. Τα αποτελέσματα που παρουσίασαν ήταν για μικρά συστήματα μέχρι και οκτώ σταθμών εργασίας. Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την εύρεση της απόδοσης των συστημάτων αυτών ήταν η Μαρκοβιανή ανάλυση.
Οι Hillier και So (1996) εξέτασαν το πρόβλημα της βέλτιστης κατανομής των εξυπηρετητών, της βέλτιστης κατανομής του χρόνου επεξεργασίας καθώς και συνδυασμό των δυο αυτών προβλημάτων και παρουσίασαν αποτελέσματα και συμπεράσματα για σχετικά μικρά συστήματα μέχρι και οκτώ σταθμών εργασίας. Η

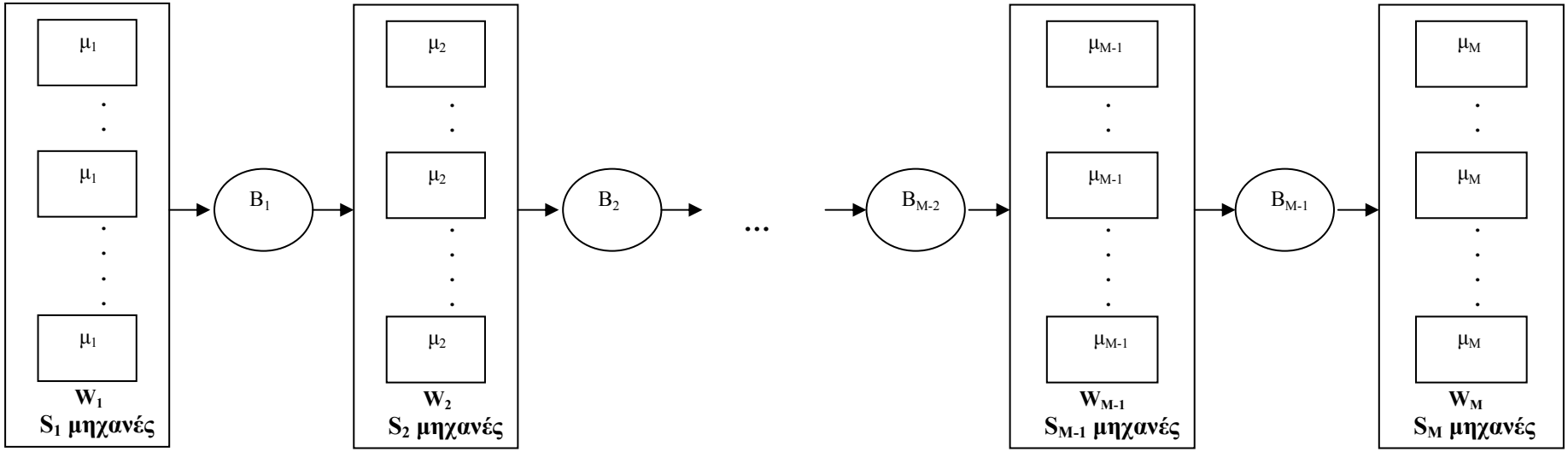
μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την εύρεση της απόδοσης των συστημάτων αυτών ήταν η Μαρκοβιανή ανάλυση.
Και στις τρεις παραπάνω εργασίες των Hillier και So οι αποθηκευτικοί χώροι μεταξύ των σταθμών εργασίας είχαν χωρητικότητα ίση με μηδέν ή ένα.

Οι Magazine και Stecke (1996) ασχολήθηκαν και με τα τρία παραπάνω προβλήματα για μικρά συστήματα που αποτελούντο από δυο και τρεις σταθμούς εργασίας με παράλληλους εξυπηρετητές χρησιμοποιώντας επίσης τη Μαρκοβιανή ανάλυση σαν μέθοδο εκτίμησης της απόδοσης.
Το πρόβλημα της βέλτιστης κατανομής των μηχανών επεξεργασίας σε συστήματα όπου οι χρόνοι επεξεργασίας σε κάθε σταθμό εργασίας είναι διαφορετικοί και ακολουθούν διαφορετικές (μη εκθετικές) κατανομές απασχόλησε τον Futamura (2000). Επίσης εξετάσθηκε η επίδραση του συντελεστή συσχέτισης (cv) της κατανομής του χρόνου επεξεργασίας στην απόδοση των συστημάτων αυτών όταν η τιμή του (cv) διαφέρει από ένα σταθμό εργασίας στον άλλον.
Οι Papadopoulos, Σπινέλλης και Smith (2000) ασχολήθηκαν με το πρόβλημα της βέλτιστης κατανομής αποθηκευτικού χώρου και το πρόβλημα της βέλτιστης κατανομής των εξυπηρετητών χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο προσομοιωτικής ανόπτυσης (simulated annealing). Ο χρόνος εκτέλεσης του αλγόριθμου αυτού είναι σχετικά μικρός, γεγονός που κάνει τον αλγόριθμο χρήσιμο γιατί μπορεί να εφαρμοστεί σε σχετικά μεγάλα συστήματα. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της απόδοσης των συστημάτων είναι η Expansion μέθοδος που αναπτύχθηκε από τους Kerbache και Smith (1987).

Το πρόβλημα που παρουσιάζεται στη συνέχεια είναι η ανάλυση γραμμών παραγωγής με παράλληλους σταθμούς επεξεργασίας σε κάθε σταθμό εργασίας με στόχο την εκτίμηση της απόδοσής τους, επεκτείνοντας τη μέθοδο της αποσύνθεσης. Η ουσιώδης διαφορά της μεθόδου αυτής σε σύγκριση με αυτές των Ancelin και Semery (1987), Burman (1995), Jeong και Kim (1999) και Patchong και Willaeys (2001), είναι ότι οι σταθμοί εργασίας που αποτελούνται από παράλληλους εξυπηρετητές, δεν αντικαθίστανται από ισοδύναμους σταθμούς που αποτελούνται από μια μόνο μηχανή επεξεργασίας. Η μέθοδος της αποσύνθεσης επεκτείνεται και εφαρμόζεται απευθείας στη γραμμή παραγωγής χωρίς να χρησιμοποιείται καμία τεχνική αντικατάστασης όπως γίνεται στις παραπάνω μελέτες. Κάποιο παρόμοιο εγχείρημα δεν έχει πραγματοποιηθεί στο παρελθόν και αυτό που επιχειρείται είναι εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης σε πολύ μεγάλες γραμμές παραγωγής με πολλούς σταθμούς με σκοπό την εκτίμηση της απόδοσής τους.

5.3 Ορισμός του προβλήματος

Το πρόβλημα που εξετάζεται στο κεφάλαιο αυτό είναι η εύρεση της απόδοσης μιας γραμμής παραγωγής στην οποία κάθε σταθμός εργασίας αποτελείται από παράλληλες μηχανές επεξεργασίας. Ένα τέτοιο σύστημα απεικονίζεται στο σχήμα 22



Σχήμα 22: Γραμμή παραγωγής με M σταθμούς εργασίας που αποτελούνται από παράλληλες μηχανές επεξεργασίας και M-1 ενδιάμεσους αποθηκευτικούς χώρους πεπερασμένης χωρητικότητας

γραμμή παραγωγής του σχήματος 22 αποτελείται από M σταθμούς εργασίας που συμβολίζονται με W_i, i=1,2,…,M. Μεταξύ δυο διαδοχικών σταθμών εργασίας W_j και W_{j+1} υπάρχει ένας αποθηκευτικός χώρος πεπερασμένης χωρητικότητας που συμβολίζεται με B_j, j=1,…,M-1. Οι σταθμοί επεξεργασίας συμβολίζονται με τετράγωνα ενώ οι ενδιάμεσοι αποθηκευτικοί χώροι με κύκλους. Τα βέλη δείχνουν τη ροή των προϊόντων στο σύστημα. Κάθε σταθμός εργασίας $W_ι$, i=1,…,M αποτελείται από S_i, i=1,2,…,M, παράλληλες μηχανές επεξεργασίας.

5.4 Το μοντέλο

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι βασικές προϋποθέσεις και οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού.

Για το σύστημα που απεικονίζεται γραφικά στο σχήμα 22 ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

1 Ο σταθμός εργασίας W_1 αποτελεί σταθμό εισόδου (input workstation) για το σύστημα και θεωρούμε ότι υπάρχει πάντοτε διαθέσιμο προϊόν για επεξεργασία από τον σταθμό αυτό. Δηλαδή ο σταθμός εργασίας W_1 δεν μπορεί ποτέ να είναι άδειος.
2 Μετά το σταθμό εργασίας W_M ο οποίος είναι σταθμός εξόδου (output station) υπάρχει πάντοτε διαθέσιμος χώρος για τα προιόντα που έχουν ολοκληρώσει την επεξεργασία τους από το σταθμό εργασίας W_M. Δηλαδή ο σταθμός εργασίας δεν μπορεί ποτέ να είναι μπλοκαρισμένος.
3 Κάθε σταθμός εργασίας W_i, i=1,2,…,M αποτελείται από S_i παράλληλες μηχανές επεξεργασίας. Όλες οι S_i παράλληλες μηχανές του σταθμού εργασίας W_i είναι πανομοιότυπες μεταξύ τους. Οι παράλληλες μηχανές δυο διαφορετικών σταθμών εργασίας δεν είναι απαραίτητο να είναι όμοιες μεταξύ τους.
4 Όλες οι S_i παράλληλες μηχανές επεξεργασίας κάθε σταθμού εργασίας W_i, i=1,…,M είναι αξιόπιστες, δηλαδή υποθέτουμε ότι η πιθανότητα να παρουσιάσουν βλάβη είναι πάντοτε μηδενική.
5 Ο χρόνος επεξεργασίας κάθε μιας από τις S_i παράλληλες μηχανές επεξεργασίας του σταθμού εργασίας W_i. ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\mu_i$, i=1,…,M.
6 Η χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου B_j που βρίσκεται ανάμεσα στους σταθμούς εργασίας W_j και W_{j+1}, j=1,…,M-1 είναι πεπερασμένη και συμβολίζεται με C_j.

5.5 Η μέθοδος της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με παράλληλες μηχανές επεξεργασίας ανά σταθμό εργασίας

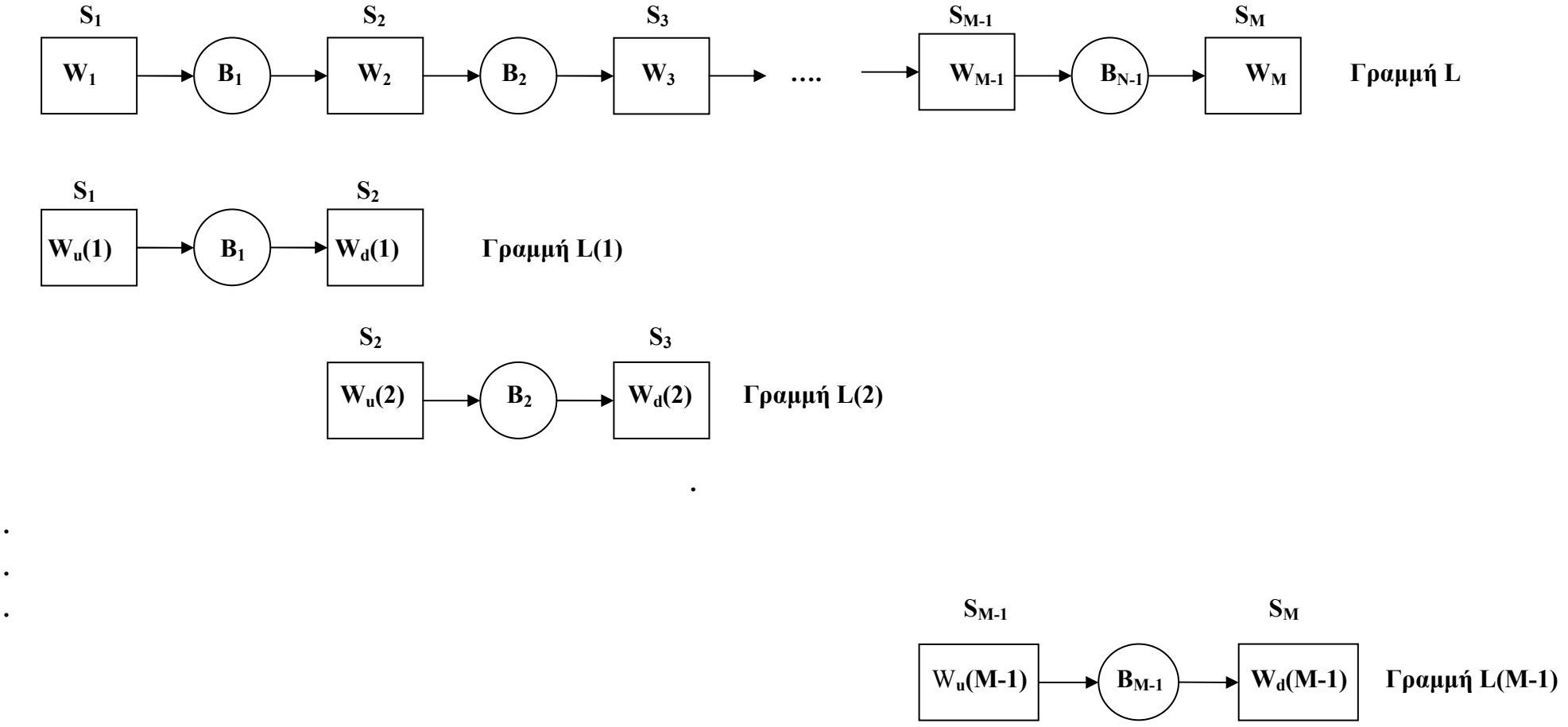
Η χρήση μεθόδων που προσδιορίζουν με ακρίβεια την απόδοση μιας γραμμής παραγωγής (π.χ Μαρκοβιανή ανάλυση) σαν και αυτής του σχήματος 22 με πολλούς σταθμούς εργασίας, είναι αδύνατη λόγω του τεράστιου αριθμού των καταστάσεων του συστήματος που προκύπτουν. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να δημιουργούνται τεράστια σε μέγεθος συστήματα εξισώσεων, η επίλυση των οποίων είναι αδύνατη. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιούνται άλλες προσεγγιστικές μέθοδοι με στόχο την όσο το δυνατό καλύτερη εκτίμηση της απόδοσης των συστημάτων αυτών.

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται μια γραφική απεικόνιση της μεθόδου της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής στις οποίες κάθε σταθμός εργασίας αποτελείται από παράλληλες μηχανές επεξεργασίας. Η μέθοδος της αποσύνθεσης αναπτύχθηκε από τον Gershwin (1987) για σειριακές γραμμές παραγωγής στις οποίες κάθε σταθμός εργασίας αποτελείτο από μόνο μια μηχανή επεξεργασίας. Για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής σε γραμμές παραγωγής σαν και αυτή του σχήματος 22 πρέπει να γίνουν κάποιες τροποποιήσεις οι οποίες περιγράφονται στις επόμενες ενότητες.

Μια γραφική απεικόνιση της μεθόδου αποσύνθεσης για τη γραμμή παραγωγής του σχήματος 22 φαίνεται στο σχήμα 23. Για κάθε αποθηκευτικό χώρο B_i της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής παραγωγής L (της οποίας προσπαθούμε να εκτιμήσουμε την απόδοση), εισάγεται ένα ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L(i) που αποτελείται από δυο ΄΄εικονικούς΄΄ σταθμούς εργασίας $W_u(i)$ και $W_d(i)$ και τον ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο B_i, i=1,…,M-1. Ο αποθηκευτικός χώρος κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(i) ο ίδιος με τον αντίστοιχο αποθηκευτικό χώρο B_i, i=1,…,M-1, της πραγματικής γραμμής.

Ο ΄΄εικονικός΄΄ σταθμός εργασίας $W_u(i)$ που αποτελείται από S_i όμοιες και αξιόπιστες ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές επεξεργασίας, ονομάζεται upstream σταθμός εργασίας του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(i) και μοντελοποιεί το κομμάτι της πραγματικής γραμμής L που βρίσκεται πριν τον αποθηκευτικό χώρο B_i, i=1,…,M-1. Ο ΄΄εικονικός΄΄ σταθμός εργασίας $W_d(i)$ που αποτελείται από S_{i+1} όμοιες και αξιόπιστες ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές επεξεργασίας, ονομάζεται downstream σταθμός εργασίας του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(i) και μοντελοποιεί το κομμάτι της πραγματικής γραμμής L που βρίσκεται μετά τον αποθηκευτικό χώρο B_i, i=1,…,M-1. Ο χρόνος επεξεργασίας κάθε μιας από τις S_i ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές του σταθμού εργασίας $W_u(i)$ ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\frac{1}{\mu_u(i)}$, ενώ ο χρόνος επεξεργασίας κάθε μιας από τις S_{i+1} ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές του σταθμού εργασίας $W_d(i)$ ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\frac{1}{\mu_d(i)}$, I=1,…,M-1

Το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L(i), i=1,…,M-1 είναι απαραίτητο δομικό στοιχείο για την εφαρμογή της μεθόδου και ονομάζεται δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης (ΣΔΜΑ).



Σχήμα 23: Η μέθοδος της αποσύνθεσης για γραμμές παραγωγής με παράλληλους εξυπηρετητές ανά σταθμό εργασίας

Το ζητούμενο είναι η εύρεση των παραμέτρων των ΄΄εικονικών΄΄ σταθμών εργασίας $W_u(i)$ και $W_d(i)$ κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(i) , i=1,…,M-1, με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1. Ο ρυθμός της ροής των προϊόντων προς και από τον αποθηκευτικό χώρο B_i της ΄΄εικονικής΄΄ γραμμής L(i) είναι ίδιος με το ρυθμό ροής προς και από το αντίστοιχο αποθηκευτικό χώρο B_i της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής L, i=1,2,3.

2. Η πιθανότητα ο αποθηκευτικός χώρος B_i της ΄΄εικονικής΄΄ γραμμής L(i) να είναι γεμάτος η άδειος είναι ίδια με την αντίστοιχη πιθανότητα για τον αποθηκευτικό χώρο B_i της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής L, i=1,2,3.

3. Ο μέσος αριθμός προϊόντων στον αποθηκευτικό χώρο B_i της ΄΄εικονικής΄΄ γραμμής L(i), είναι ίσος με τον μέσο αριθμό προϊόντων στον αποθηκευτικό χώρο B_i της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής L, i=1,2,3.

Για την εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης τα ακόλουθα τρία βήματα είναι απαραίτητο να υλοποιηθούν:

Βήμα 1^o : Ανάλυση και υπολογισμός με απόλυτη ακρίβεια της απόδοσης του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(i), i=1,…,M-1.

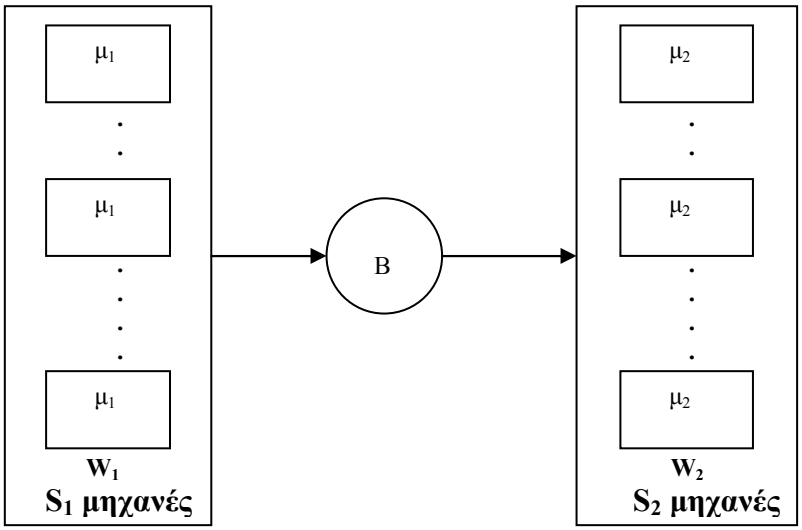
Βήμα 2^o : Ανάπτυξη των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης οι οποίες συσχετίζουν τις παραμέτρους κάθε σταθμού εργασίας της πραγματικής γραμμής με τις παραμέτρους των αντίστοιχων ΄΄εικονικών΄΄ σταθμών εργασίας των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων L(i), i=1,…,M-1.

Βήμα 3^o : Ανάπτυξη ενός αλγόριθμου ο οποίος θα επιλύει ταυτόχρονα τις εξισώσεις της αποσύνθεσης με σκοπό την εκτίμηση των μέτρων απόδοσης της πραγματικής γραμμής παραγωγής L.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού, παρουσιάζεται η υλοποίηση των τριών αυτών βημάτων.

5.6 Το δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης (ΔΣΜΑ)

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ο αλγόριθμος με τον οποίο μπορούν να υπολογιστούν όλες οι στάσιμες πιθανότητες των καταστάσεων και κατά συνέπεια τα μέτρα απόδοσης του συστήματος που αποτελείται από δυο σταθμούς εργασίας με παράλληλες μηχανές επεξεργασίας και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο. Το σύστημα αυτό απεικονίζεται στο σχήμα 24 και χρησιμοποιείται σαν ΄δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης (ΔΣΜΑ), (decomposition block) L(i), i=1,…,M-1 στη μέθοδο της αποσύνθεσης όπως φαίνεται γραφικά στο σχήμα 23.



Σχήμα 24: Το δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης

Για το σύστημα που απεικονίζεται στο σχήμα 24 ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις και συμβολισμοί.

1 Το σύστημα αποτελείται από δυο σταθμούς εργασίας W_1 και W_2 και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο B ο οποίος έχει χωρητικότητα C.

2 Πριν το πρώτο σταθμό εργασίας W_1 υπάρχει πάντοτε διαθέσιμο προϊόν (ο W_1 δεν είναι ποτέ άδειος) και μετά το σταθμό εργασίας W_2 υπάρχει πάντοτε διαθέσιμος χώρος για τα προϊόντα που έχουν ολοκληρώσει την επεξεργασία τους από το σταθμό εργασίας W_2 (ο W_2 δεν είναι ποτέ μπλοκαρισμένος).

3 Ο σταθμός εργασίας W_1 αποτελείται από S_1 όμοιες, αξιόπιστες μηχανές (δεν παρουσιάζουν ποτέ βλάβη), ενώ ο σταθμός εργασίας W_2 αποτελείται από S_2 όμοιες, αξιόπιστες μηχανές. Οι μηχανές των σταθμών εργασίας W_1 και W_2 δεν είναι απαραίτητο να είναι όμοιες μεταξύ τους.

4 Ο χρόνος επεξεργασίας κάθε μιας από τις S_1 μηχανές του σταθμού εργασίας W_1 ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\mu_1$, ενώ ο χρόνος επεξεργασίας κάθε μιας από τις S_2 μηχανές του σταθμού εργασίας W_2 ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\mu_2$.

5 Κάθε μηχανή επεξεργασίας μπορεί να κρατήσει ένα προϊόν στη περιοχή εργασίας της. Ένα προϊόν βρίσκεται στη περιοχή εργασίας μιας εκ των S_2 μηχανών του σταθμού εργασίας W_2 όταν η μηχανή αυτή λειτουργεί και επεξεργάζεται ένα προϊόν. Ένα προϊόν λέμε ότι βρίσκεται στη περιοχή εργασίας μιας εκ των S_1 μηχανών του σταθμού εργασίας W_1 αν έχει ήδη ολοκληρωθεί η επεξεργασία του προϊόντος από την συγκεκριμένη μηχανή, αλλά ο αποθηκευτικός χώρος B είναι γεμάτος και όλες οι S_2 μηχανές του σταθμού εργασίας W_2 λειτουργούν και επεξεργάζονται προϊόντα.

6 Η συνολική χωρητικότητα N του συστήματος είναι διαφορετική από τη χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου, C. Η χωρητικότητα του συστήματος N είναι ίση με τη χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου C, προσθέτοντας τα προϊόντα που κάθε ένας από τους σταθμούς εργασίας μπορεί να έχει στη περιοχή εργασίας του. Στη συνολική χωρητικότητα του συστήματος υπολογίζονται όσα προϊόντα έχουν ολοκληρώσει την επεξεργασία τους από τον σταθμό εργασίας W_1 και είναι έτοιμα για επεξεργασία από τον σταθμό εργασίας W_2. Εφόσον ο σταθμός εργασίας W_1 αποτελείται από S_1 μηχανές και

ο σταθμός εργασίας W_2, αποτελείται από S_2 μηχανές η περιοχή εργασίας των W_1 και W_2 μπορεί να περιέχει το πολύ S_1 και S_2 προϊόντα, αντίστοιχα. Άρα η συνολική χωρητικότητα του συστήματος είναι $N=S_1+S_2+C$.

7 Πρέπει να διευκρινιστεί ότι ένα προϊόν που εξυπηρετείται από κάποια εκ των S_1 μηχανών του σταθμού εργασίας W_1 χωρίς να έχει ολοκληρώσει την εξυπηρέτηση του δεν υπολογίζεται στη συνολική χωρητικότητα του συστήματος διότι δεν είναι διαθέσιμο προς επεξεργασία από καμιά από τις S_2 μηχανές εργασίας του σταθμού εργασίας W_2.

8 Ο αριθμός των προϊόντων που βρίσκονται στο σύστημα τη χρονική στιγμή t συμβολίζεται με n(t) και είναι προφανές ότι $0 \le n(t) \le N$. Όταν n(t)=0 τότε όλες οι S_2 μηχανές του σταθμού εργασίας W_2 είναι άδειες (starved), ενώ όταν n(t)=N, τότε όλες οι S_1 μηχανές του σταθμού εργασίας W_1 είναι μπλοκαρισμένες και στη περίπτωση αυτή λέμε ότι ο σταθμός εργασίας είναι *πλήρως* μπλοκαρισμένος (fully blocked) .

9 Εξαιτίας των προϋποθέσεων (5),(6),(7) και (8) ορίζεται ένας νέος επιπλέον τύπος μπλοκαρίσματος για τον σταθμό εργασίας W_1. Ο σταθμός εργασίας W_1 μπορεί να είναι *μερικώς* μπλοκαρισμένος (partially blocked) όταν μερικές (όχι όλες) από τις S_1 μηχανές είναι μπλοκαρισμένες και οι υπόλοιπες λειτουργούν κανονικά. Αυτό συμβαίνει όταν $S_2 + C + 1 \le n(t) \le S_1 + S_2 + C - 1$. Για παράδειγμα όταν $n(t) = S_2 + C + 1$, τότε μόνο μια από τις S_1 μηχανές του σταθμού εργασίας W_1 είναι μπλοκαρισμένη και οι υπόλοιπες S_1-1 λειτουργούν κανονικά, ενώ όταν $n(t) = S_1 + S_2 + C - 1$ τότε οι S_1-1 μηχανές του σταθμού εργασίας W_1 είναι μπλοκαρισμένες και μόνο μια μηχανή λειτουργεί κανονικά.

10 Λόγω του ότι οι χρόνοι επεξεργασίας και στους δυο σταθμούς εργασίας ακολουθούν εκθετική κατανομή, στο χρονικό διάστημα [t, t+dt] μπορεί να συμβεί μόνο ένα γεγονός στο σύστημα. Δηλαδή κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος [t, t+dt] μόνο μια από τις S_1 μηχανές του σταθμού εργασίας W_1 παράγει ένα προϊόν η μόνο μια από τις S_2 μηχανές μπορεί να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος.

11 Η κατάσταση του συστήματος s περιγράφεται πλήρως από τον αριθμό των προϊόντων που βρίσκονται στο σύστημα τη χρονική στιγμή t, δηλαδή s=n(t). Όπως είδαμε και στην υπόθεση (8), $0 \le n(t) \le N \Rightarrow 0 \le n(t) \le S_1 + S_2 + C$. Δηλαδή ο συνολικός αριθμός των καταστάσεων του συστήματος είναι S_1+S_2+C+1.

Για την ανάλυση του συστήματος του σχήματος 24 με σκοπό τον υπολογισμό των στάσιμων πιθανοτήτων όλων των καταστάσεων και κατά συνέπεια των μέτρων απόδοσης του με χρήση Μαρκοβιανής ανάλυσης, τα ακόλουθα βήματα πρέπει να υλοποιηθούν.

Βήμα 1^{ο} : Δημιουργία όλων των εξισώσεων μετάβασης (εσωτερικών, κάτω οριακών και άνω οριακών) του Μαρκοβιανού μοντέλου.

Βήμα 2^{ο} : Ανάπτυξη ενός αλγόριθμου για τη γέννηση του πίνακα μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή N ($N=S_1+S_2+C$) της συνολικής χωρητικότητας του συστήματος

Βήμα 3^{ο} : Αριθμητικός υπολογισμός όλων των στάσιμων πιθανοτήτων και των μέτρων απόδοσης του συστήματος όπως π.χ. η απόδοση και ο αριθμός των ημιακατέργαστων προϊόντων στο σύστημα (Work-In-Progress: WIP).

5.7 Οι εξισώσεις μετάβασης

Ανάλογα με την τιμή του αριθμού των προϊόντων στο σύστημα n, οι καταστάσεις του συστήματος διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες:: *΄΄κάτω οριακές καταστάσεις΄΄, ΄΄εσωτερικές καταστάσεις΄΄,* και *΄΄΄άνω οριακές καταστάσεις΄΄*.

Παρόμοια ονοματολογία χρησιμοποιείται και για τις εξισώσεις που οδηγούν στις καταστάσεις αυτές. Έτσι λοιπόν διακρίνουμε τρεις κατηγορίες εξισώσεων μετάβασης:

(α) Εσωτερικές εξισώσεις μετάβασης
(β) Κάτω οριακές εξισώσεις μετάβασης
(γ) Άνω οριακές εξισώσεις μετάβασης

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $S_1 \geq 1, S_2 \geq 1$ και $C \geq 1$, ενώ με p(n), n=0,…,S_1+S_2+C συμβολίζουμε τη πιθανότητα το σύστημα να βρεθεί στην κατάσταση s=n..

Κάτω οριακές εξισώσεις μετάβασης

Η κατάσταση για την οποία ο αριθμός των προϊόντων στο σύστημα είναι μηδέν (n=0) ονομάζεται κάτω οριακή κατάσταση. Η εξίσωση που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της πιθανότητας μετάβασης σε αυτή τη κατάσταση λέγεται κάτω οριακή εξίσωση μετάβασης και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$p(0)=(1-S_1\mu_1)\, p(0)+\mu_2\, p(1)$$

Εσωτερικές εξισώσεις μετάβασης

Οι καταστάσεις για τις οποίες ο αριθμός των προϊόντων στο σύστημα n είναι $0< n < N=S_1+S_2+C$ ονομάζονται εσωτερικές καταστάσεις. Οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της πιθανότητας μετάβασης στις καταστάσεις αυτές λέγονται εσωτερικές εξισώσεις μετάβασης και έχουν την ακόλουθη μορφή:

Αν $n>0$ και $n<S_2$ τότε:

$$p(n) = S_1\mu_1\, p(n-1) + (1-S_1\mu_1-n\mu_2)\, p(n) + (n+1)\mu_2\, p(n+1)$$

Αν $n>S_2-1$ και $n<S_2+C+1$ τότε:

$$p(n) = S_1\mu_1\, p(n-1) + (1-S_1\mu_1-S_2\mu_2)\, p(n) + S_2\mu_2\, p(n+1)$$

Αν $n>S_2+C$ και $n<S_1+S_2+C$ τότε:

$$p(n) = S_2\mu_2\, p(n+1) + (S_1+S_2+C+1-n)\mu_1\, p(n-1) +(1- (S_1+S_2+C-n)\mu_1-S_2\mu_2)\, p(n)$$

Άνω οριακή εξίσωση μετάβασης

Η κατάσταση για την οποία ο αριθμός των προϊόντων στο σύστημα είναι ίσος με S_1+S_2+C ($n= S_1+S_2+C$) ονομάζεται άνω οριακή κατάσταση. Η εξίσωση που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της πιθανότητας μετάβασης σε αυτή την κατάσταση λέγεται άνω οριακή εξίσωση μετάβασης και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$p(S_1+S_2+C) = \mu_1\, p(S_1+S_2+C-1) + (1-S_2\mu_2)\, p(S_1+S_2+C)$$

Η ταυτόχρονη επίλυση όλων των παραπάνω εξισώσεων οδηγεί στον υπολογισμό των στάσιμων πιθανοτήτων και των μέτρων απόδοσης του συστήματος.

5.8 Αλγόριθμος για τη δημιουργία του πίνακα μετάβασης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για τη δημιουργία του πίνακα μετάβασης P για το σύστημα του σχήματος 24 για οποιαδήποτε τιμή της συνολικής χωρητικότητας του συστήματος.
Έστω $P_{i,j}$, i, j= 0,…,S_1+S_2+C είναι το στοιχείο του πίνακα P, το οποίο βρίσκεται στην i-οστή γραμμή και j-οστή στήλη του πίνακα P. Το στοιχείο $P_{i,j}$ περιέχει τη πιθανότητα μετάβασης από τη κατάσταση i στη κατάσταση j. Ο πίνακας P είναι διάστασης (N+1) X (N+1) = (S_1+S_2+C+1) X (S_1+S_2+C+1).
Ο αλγόριθμος αποτελείται από τρία βήματα. Στο πρώτο βήμα του αλγόριθμου δημιουργούνται οι πιθανότητες μετάβασης από την κάτω οριακή κατάσταση (n=0), στο δεύτερο βήμα δημιουργούνται οι πιθανότητες από τις εσωτερικές καταστάσεις (n=1,…,S_1+S_2+C-1) και στο τρίτο βήμα δημιουργούνται οι πιθανότητες μετάβασης από την άνω οριακή κατάσταση ($n=S_1+S_2+C$).
Τα τρία αυτά βήματα περιγράφονται παρακάτω:

Βήμα 1^o : Δημιουργία των πιθανοτήτων μετάβασης από την κάτω οριακή κατάσταση

Set $A[0][0] = 1-S_1\mu_1$
$A[0][1] = S_1\mu_1$
For j=2 **to** S_1+S_2+C **do**
A[0][j] = 0.0
End For

Βήμα 2^o : Δημιουργία των πιθανοτήτων μετάβασης από τις εσωτερικές καταστάσεις

Set l=1 and p=1
For i=1 **to** S_1+S_2+C-1 **do**
For j=0 **to** j=S_1+S_2+C **do**
If i > j and i–j = 1 and i < S_2 then:
$A[i][j] = i\,\mu_2$
If i > j and i-j = 1 and i ≥ S_2 then:
$A[i][j] = S_2\,\mu_2$
If i = j and j < S_2 and i < S_2+C+1 then:
$A[i][j] = 1-S_1\mu_1-j\,\mu_2$
If i = j and j ≥ S_2 and i < S_2+C+1 then:
$A[i][j] = 1-S_1\mu_1-S_2\mu_2$

If i = j and j ≥ S_2 and i ≥ S_2+C+1 then:
K=S_1–l
A[i][j] = 1–Kμ_1–S_2 μ_2
l=l+1
If j > i and j –i =1 and i < S_2+C+1 then:
A[i][j] = $S_1\mu_1$
If j > i and j –i =1 and i ≥ S_2+C+1 then:
m=S_1–p
A[i][j] = m μ_1
p=p+1
If i > j and i–j >1 then:
A[i][j] = 0.0
If j > i and j–i >1 then:
A[i][j] = 0.0
End For
End For

Βήμα 3^o : Δημιουργία των πιθανοτήτων μετάβασης από την άνω οριακή κατάσταση

Set A[S_1+S_2+C][S_1+S_2+C–1] = S_2 μ_2
A[S_1+S_2+C][S_1+S_2+C] =1–S_2 μ_2
For j=0 **to** S_1+S_2+C–2 **do**
A[S_1+S_2+C][j] = 0.0
End For

5.9 Αριθμητικό παράδειγμα εφαρμογής του αλγόριθμου

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ένα αριθμητικό παράδειγμα εφαρμογής του αλγόριθμου για την δημιουργία του πίνακα μετάβασης για ένα σύστημα σαν και αυτό του σχήματος 24 με S_1=3, S_2=4 και C=2. Ο ρυθμός επεξεργασίας κάθε μιας από τις S_1 μηχανές είναι ίσος με μ_1, ενώ ο ρυθμός επεξεργασίας κάθε μιας από τις S_2 μηχανές είναι ίσος με μ_2. Η συνολική χωρητικότητα του συστήματος είναι N= S_1+S_2+C =9 και οι δυνατές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα είναι n=0,…, S_1+S_2+C+1 δηλαδή υπάρχουν συνολικά S_1+S_2+C+1=10 πιθανές καταστάσεις. Άρα ο πίνακας P θα είναι διάστασης (10) X (10).
Εφαρμόζοντας τα τρία βήματα του αλγόριθμου της προηγούμενης ενότητας ο πίνακας P έχει την παρακάτω μορφή (δείτε πίνακα 23):

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$1-3\mu_1$	$3\mu_1$	0	0	0	0	0	0	0	0
1	μ_2	$1-3\mu_1-\mu_2$	$3\mu_1$	0	0	0	0	0	0	0
2	0	$2\mu_2$	$1-3\mu_1-2\mu_2$	$3\mu_1$	0	0	0	0	0	0
3	0	0	$3\mu_2$	$1-3\mu_1-3\mu_2$	$3\mu_1$	0	0	0	0	0
4	0	0	0	$4\mu_2$	$1-3\mu_1-4\mu_2$	$3\mu_1$	0	0	0	0
5	0	0	0	0	$4\mu_2$	$1-3\mu_1-4\mu_2$	$3\mu_1$	0	0	0
6	0	0	0	0	0	$4\mu_2$	$1-3\mu_1-4\mu_2$	$3\mu_1$	0	0
7	0	0	0	0	0	0	$4\mu_2$	$1-2\mu_1-4\mu_2$	$2\mu_1$	0
8	0	0	0	0	0	0	0	$4\mu_2$	$1-\mu_1-4\mu_2$	μ_1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	$4\mu_2$	$1-4\mu_2$

Πίνακας 23: Ο πινακας μετάβασης του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης για $S_1=3$, $S_2=4$ και $C=2$.

Για παράδειγμα το στοιχείο $P_{0,1}$ του πίνακα P περιέχει τη πιθανότητα μετάβασης από τη κατάσταση n=0 τη χρονική στιγμή t στη κατάσταση n=1 τη χρονική στιγμή t+dt. Για να γίνει αυτό πρέπει κάποια από τις τρεις μηχανές του πρώτου σταθμού εργασίας να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος, γεγονός που μπορεί να συμβεί με πιθανότητα $3\mu_1$. Υπενθυμίζουμε ότι τη χρονική στιγμή t για την οποία n=0, οι μηχανές του δεύτερου σταθμού εργασίας είναι όλες άδειες. Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζονται και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα P.

Γνωρίζοντας τον αριθμό των προϊόντων που υπάρχουν στο σύστημα, n είμαστε σε θέση ανά πάσα στιγμή να γνωρίζουμε σε ποια κατάσταση βρίσκεται το σύστημα. Ο πίνακας που ακολουθεί περιγράφει για κάθε τιμή του n=0,…, S_1+S_2+C =9 τη κατάσταση του συστήματος.

Πίνακας 24: Περιγραφή των καταστάσεων του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης για $S_1=3$, $S_2=4$ και C=2.

Τιμή του n	**Κατάσταση του συστήματος**
0	Όλες οι S_2 μηχανές του δεύτερου σταθμού εργασίας είναι άδειες.
1	Μια από τις S_2 μηχανές του δεύτερου σταθμού εργασίας είναι απασχολημένη και οι υπόλοιπες είναι άδειες.
2	Δυο από τις S_2 μηχανές του δεύτερου σταθμού εργασίας είναι απασχολημένες και οι υπόλοιπες είναι άδειες.
3	Τρεις από τις S_2 μηχανές του δεύτερου σταθμού εργασίας είναι απασχολημένες και οι υπόλοιπες είναι άδειες.
$4=S_2$	Όλες οι S_2 μηχανές του δεύτερου σταθμού εργασίας είναι απασχολημένες.
5	Όλες οι S_2 μηχανές του δεύτερου σταθμού εργασίας είναι απασχολημένες και υπάρχει μια μονάδα προϊόντος στον αποθηκευτικό χώρο.
$6=S_2+C$	Όλες οι S_2 μηχανές του δεύτερου σταθμού εργασίας είναι απασχολημένες και ο αποθηκευτικός χώρος είναι γεμάτος.
7	Όλες οι S_2 μηχανές του δεύτερου σταθμού εργασίας είναι απασχολημένες, ο αποθηκευτικός χώρος είναι γεμάτος και μια από τις S_1 μηχανές του πρώτου σταθμού εργασίας είναι μπλοκαρισμένη.
8	Όλες οι S_2 μηχανές του δεύτερου σταθμού εργασίας είναι απασχολημένες, ο αποθηκευτικός χώρος είναι γεμάτος και δυο από τις S_1 μηχανές του πρώτου σταθμού εργασίας είναι μπλοκαρισμένες.
$9= S_2+C+S_1$	Όλες οι S_2 μηχανές του δεύτερου σταθμού εργασίας είναι απασχολημένες, ο αποθηκευτικός χώρος είναι γεμάτος και όλες οι S_1 μηχανές του πρώτου σταθμού εργασίας είναι μπλοκαρισμένες.

Υπενθυμίζεται ότι οι S_1 μηχανές του πρώτου σταθμού εργασίας δεν μπορεί να είναι ποτέ άδειες και οι S_2 μηχανές του δεύτερου σταθμού εργασίας δεν μπορεί να είναι ποτέ μπλοκαρισμένες.

5.10 Μέτρα απόδοσης του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης

Θεωρώντας ότι όλες οι στάσιμες πιθανότητες p(n) του συστήματος που απεικονίζεται γραφικά στο σχήμα 24 είναι γνωστές, είναι δυνατός υπολογισμός των μέτρων απόδοσης του συστήματος.

Ο αριθμός των ημιακατέργαστων προϊόντων στο σύστημα (Work-In-Progress: WIP), $\bar{n}$, του συστήματος δίνεται από τον ακόλουθο τύπο (για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τον ορισμό του συγκεκριμένου μεγέθους μπορεί κανείς να ανατρέξει στα βιβλία των Gershwin, 1994 και Helber, 1999):

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{S_1+S_2+C} n\,p(n) \qquad (164)$$

Η πιθανότητα ο πρώτος σταθμός εργασίας W_1 να είναι μπλοκαρισμένος $p_b^{W_1}$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} p_b^{W_1} &= 1\cdot p(S_2+C+1)+2\cdot p(S_2+C+2)+\ldots+(S_2+C+S_1)\cdot p(S_2+C+S_1)= \\ &= \sum_{n=S_2+C+1}^{n=S_2+C+S_1}(n-S_2-C)\cdot p(n) \end{aligned} \tag{165}$$

Η πιθανότητα ο δεύτερος σταθμός εργασίας W_2 να είναι άδειος $p_s^{W_2}$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} p_s^{W_2} &= S_2\cdot p(0)+(S_2-1)p(1)+\ldots+(S_2-(S_2-2))\cdot p(S_2-2)+(S_2-(S_2-1))\cdot p(S_2-1)= \\ &= \sum_{n=0}^{S_2-1}(S_2-n)\cdot p(n) \end{aligned} \tag{166}$$

Η απόδοση του πρώτου σταθμού εργασίας W_1, PR_1 υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} PR_1 &= \mu_1 \Pr[\text{Ο σταθμός } W_1 \textit{ να είναι αποσχολημένος}]= \\ &= S_1\mu_1 p(0)+S_1\mu_1 p(1)+\ldots+S_1\mu_1 p(S_2+C)+(S_1-1)\mu_1 p(S_2+C+1)+ \\ &\quad +(S_1-2)\mu_1 p(S_2+C+2)+\ldots+(S_1-S_1)\mu_1 p(S_2+C+S_1)= \\ &= S_1\mu_1 p(0)+S_1\mu_1 p(1)+\ldots+S_1\mu_1 p(S_2+C)+S_1\mu_1 p(S_2+C+1)+\ldots+ \\ &\quad +S_1\mu_1 p(S_2+C+S_1)-\mu_1 p(S_2+C+1)-2\mu_1 p(S_2+C+2)-\ldots-S_1\mu_1 p(S_2+C+S_1)= \\ &= S_1\mu_1 \sum_{n=0}^{n=S_2+S_1+C} p(n)-\mu_1 \sum_{n=S_2+C+1}^{S_1+S_2+C}(n-S_2-C)\,p(n) \end{aligned}$$

Δηλαδή η απόδοση PR_1 του πρώτου σταθμού εργασίας δίνεται από τον τύπο:

$$PR_1 = S_1\mu_1 \sum_{n=0}^{n=S_2+S_1+C} p(n)-\mu_1 \sum_{n=S_2+C+1}^{S_1+S_2+C}(n-S_2-C)\,p(n) \tag{167}$$

επειδή όμως $\sum_{n=0}^{n=S_2+S_1+C} p(n)=1$ (το άθροισμα όλων των στάσιμων πιθανοτήτων είναι μονάδα)
ο τύπος για την απόδοση του πρώτου σταθμού εργασίας γίνεται

$$PR_1 = S_1\mu_1-\mu_1 \sum_{n=S_2+C+1}^{S_1+S_2+C}(n-S_2-C)\,p(n) \tag{168}$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος για τον υπολογισμό της απόδοσης του πρώτου σταθμού εργασίας μπορεί επίσης να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον τύπο (165)

$$PR_1 = \mu_1\left(S_1 - \Pr[\text{O σταθμός } W_1 \text{ να είναι μπλοκαρισμένος}]\right) =$$
$$= \mu_1\left(S_1 - p_b^{W_1}\right) = S_1\mu_1 - \mu_1 \sum_{n=S_2+C+1}^{S_1+S_2+C} (n - S_2 - C)\, p(n) \qquad (169)$$

Παρατηρούμε ότι οι δυο παραπάνω τύποι (168) και (169) είναι ταυτόσημοι

Η απόδοση του δεύτερου σταθμού εργασίας W_2 υπολογίζεται ως εξής:

$$PR_2 = \mu_2 \cdot \Pr[\text{O σταθμός } W_2 \text{ να είναι αποσχολημένος}] =$$
$$= \mu_2 p(1) + 2\mu_2 p(2) + \ldots + S_2\mu_2 p(S_2) + S_2\mu_2 p(S_2+1) + \ldots + S_2\mu_2 p(S_2+S_1+C) =$$
$$= S_2\mu_2 \sum_{n=0}^{n=S_2+S_1+C} p(n) - \left(S_2\mu_2 p(0) + (S_2-1)\mu_2 p(1) + \ldots + (S_2-(S_2-1))\mu_2 p(S_2-1)\right) =$$
$$= S_2\mu_2 \sum_{n=0}^{n=S_2+S_1+C} p(n) - S_2\mu_2\left(p(0) + p(1) + \ldots + p(S_2-1)\right) +$$
$$+ \mu_2\left(p(1) + 2p(2) + \ldots + (S_2-1))p(S_2-1)\right) =$$
$$= S_2\mu_2 \sum_{n=0}^{n=S_2+S_1+C} p(n) - \mu_2 \sum_{n=0}^{n=S_2-1} (S_2 - n)p(n) \qquad (170)$$

επειδή όμως $\sum_{n=0}^{n=S_2+S_1+C} p(n) = 1$ (το άθροισμα όλων στάσιμων πιθανοτήτων είναι μονάδα)
ο τύπος για την απόδοση του δεύτερου σταθμού εργασίας γίνεται

$$PR_2 = S_2\mu_2 - \mu_2 \sum_{n=0}^{n=S_2-1} (S_2 - n)p(n) \qquad (171)$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος για τον υπολογισμό της απόδοσης του δεύτερου σταθμού εργασίας μπορεί επίσης να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον τύπο (166)

$$PR_2 = \mu_2\left(S_2 - \Pr[\text{O σταθμός } W_2 \text{ να είναι starved}]\right) =$$
$$= \mu_1\left(S_2 - p_s^{W_2}\right) = S_2\mu_2 - \mu_2 \sum_{n=0}^{n=S_2-1} (S_2 - n)p(n) \qquad (172)$$

Παρατηρούμε ότι οι δυο τύποι (171) και (172) είναι ταυτόσημοι.
Επειδή στο σύστημα δεν καταστρέφεται ή δημιουργείται προϊόν θα πρέπει στη κατάσταση ισορροπίας του συστήματος (στάσιμη κατάσταση) οι αποδόσεις των δυο σταθμών εργασίας να είναι ίσες μεταξύ τους. Δηλαδή $PR_1=PR_2$.

Η απόδοση PR του συστήματος είναι ίση με την απόδοση του πρώτου σταθμού εργασίας ή την απόδοση του δεύτερου σταθμού εργασίας.

Δηλαδή

$$PR=PR_1=PR_2$$

5.11 Αριθμητικά αποτελέσματα για το δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης

Ο αλγόριθμος που παρουσιάστηκε στην ενότητα 5.8 για τη γένεση του πίνακα μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή των παραμέτρων του συστήματος κωδικοποιήθηκε στη γλώσσα προγραμματισμού C++. Η ταυτόχρονη επίλυση όλων των εξισώσεων μετάβασης με σκοπό τον υπολογισμό όλων των στάσιμων πιθανοτήτων, έγινε με χρήση της μεθόδου απαλοιφής του Gauss (Gauss elimination method).
Όλη διαδικασία της επίλυσης κωδικοποιήθηκε στη γλώσσα προγραμματισμού C++.

Για να διαπιστωθεί η ορθότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την εφαρμογή του αλγόριθμου, ένα μοντέλο προσομοίωσης που προσομοιώνει τη λειτουργία του συστήματος του σχήματος 24 δημιουργήθηκε στο πρόγραμμα προσομοίωσης ARENA 3.0. Η απόδοση του συστήματος που προκύπτει από το μοντέλο της προσομοίωσης συγκρίνεται με την απόδοση του αντίστοιχου συστήματος που προκύπτει εφαρμόζοντας τον προτεινόμενο αλγόριθμο.
Για τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους επόμενους πίνακες, η πρώτη στήλη παρουσιάζει τα χαρακτηριστικά του συστήματος που εξετάζεται, δηλαδή τον αριθμό των μηχανών του πρώτου σταθμού εργασίας (S_1), τον αριθμό των μηχανών του δεύτερου σταθμού εργασίας (S_2) και τη χωρητικότητα C του ενδιάμεσου αποθηκευτικού χώρου. Οι τρεις αυτές τιμές αναπαρίστανται με το διάνυσμα (S_1, S_2, B). Στη δεύτερη στήλη αναφέρεται η εκτίμηση της απόδοσης του συστήματος από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου ενώ στη τρίτη στήλη παρουσιάζεται η απόδοση που προκύπτει από τη προσομοίωση. Τέλος στη τέταρτη στήλη παρουσιάζεται ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την εκτίμηση της απόδοσης από το μοντέλο της προσομοίωσης.

Πίνακας 25: Η απόδοση του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης

(S_1,S_2,B)	$PR_{αλγόριθμου}$	$PR_{προσομοίωσης}$	95% Διάστημα εμπιστοσύνης
(3,4,2)	2.85373	2.85089	(2.83884,2.86293)
(4,4,3)	3.52593	3.52854	(3.51326,3.54383)
(5,5,5)	4.54631	4.54731	(4.52739,4.56723)
(10,10,6)	9.30170	9.31143	(9.27210,9.35076)
(10,15,7)	9.99439	10.00491	(9.94944,10.06038)
(15,15,15)	14.40220	14.41388	(14.34960,14.47815)
(15,20,15)	14.99740	15.00821	(14.93341,15.08302)
(20,25,20)	19.9966	19.99833	(19.89862,20.09804)
(10,10,10)	9.45416	9.46529	(9.42077,9.50981)
(25,25,20)	24.2403	24.27795	(24.15952,24.39637)

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον πίνακα 25 δείχνουν ότι η εκτίμηση της απόδοσης από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου σε όλες τις περιπτώσεις πλησιάζει πάρα πολύ την εκτιμώμενη απόδοση που προκύπτει από τη χρήση του μοντέλου της προσομοίωσης.

5.12 Τα σύνολα των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης

Για τον υπολογισμό των παραμέτρων όλων των ΄΄εικονικών΄΄ σταθμών εργασίας $W_u(i)$ και $W_d(i)$, i=1,…,M-1 του σχήματος 23 χρησιμοποιούνται τα παρακάτω σύνολα εξισώσεων

- **Εξισώσεις ροής (Flow rate idle time equations)**
  Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του ρυθμού επεξεργασίας $\mu_u(i)$ και $\mu_d(i)$ κάθε μιας από τις S_i και S_{i+1} μηχανές επεξεργασίας των ΄΄εικονικών΄΄ σταθμών εργασίας $W_u(i)$ και $W_d(i)$ i=1,…,M-1, αντίστοιχα, όλων των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων L(i) του σχήματος 23 που εμπλέκονται στη μέθοδο της αποσύνθεσης.

- **Εξισώσεις διατήρησης της ροής (Conservation of flow equations)**
  Οι εξισώσεις αυτές εκφράζουν την αρχή της διατήρησης της ροής των προϊόντων μεταξύ των αποθηκευτικών χώρων, λόγω του ότι δεν υπάρχει καταστροφή η δημιουργία νέου υλικού. Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται σαν κριτήριο τερματισμού του αλγόριθμου που χρησιμοποιείται για την ταυτόχρονη επίλυση όλων των παραπάνω εξισώσεων.

Οι εξισώσεις επαναφοράς της ροής (Resumption of flow equations) που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της πιθανότητας επιδιόρθωσης βλαβών $r_u(i)$ των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών και οι εξισώσεις διακοπής της ροής (Interruption of flow equations) που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της πιθανότητας εμφάνισης βλαβών $p_u(i)$ των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών δεν χρειάζεται να υπολογιστούν. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι γιατί οι μηχανές σε κάθε σταθμό εργασίας της πραγματικής γραμμής L είναι αξιόπιστες με συνέπεια και οι αντίστοιχες μηχανές κάθε ΄΄εικονικού΄΄ σταθμού εργασίας να είναι επίσης αξιόπιστες.

[**] Όταν οι ρυθμοί επεξεργασίας είναι σταθεροί και ίσοι για όλες τις μηχανές της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής παραγωγής L, όπως συμβαίνει στη συγκεκριμένη περίπτωση, για τον υπολογισμό των παραμέτρων p_u και p_d χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις ροής (Flow rate idle time) αντί των εξισώσεων διακοπής της ροής (Interruption of flow equations) που χρησιμοποιούνται από την κλασική μέθοδο της αποσύνθεσης για τον ίδιο σκοπό.

5.13 Οι εξισώσεις διατήρησης της ροής (Conservation of flow equations)

Έστω *PR(i)* είναι η απόδοση του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(i), i=1,…,M-1 και $PR_u(i)$,$(PR_d(i))$ είναι η απόδοση του upstream (downstream) ΄΄εικονικού΄΄ σταθμού εργασίας $W_u(i)$ ($W_d(i)$), αντίστοιχα i=1,…,M-1.
Έστω επίσης PR_i είναι η απόδοση του σταθμού εργασίας W_i, i=1,…,M-1 στη πραγματική γραμμή παραγωγής L.
Η αρχή διατήρησης της ροή δηλώνει ότι στη στάσιμη κατάσταση του συστήματος οι αποδόσεις όλων των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων L(i), i=1,…,M-1 θα πρέπει να είναι ίσες μεταξύ τους

Θα πρέπει επίσης η απόδοση κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(i), i=1,…,M-1 να είναι ίση με την απόδοση $PR_u(i)$ *ή* $(PR_d(i)$ του upstream ή downstream ΄΄εικονικού΄΄ σταθμού εργασίας του συστήματος αυτού.

Τελικά θα πρέπει επίσης η απόδοση $PR_u(i)$ του upstream ΄΄εικονικού΄΄ σταθμού εργασίας $W_u(i)$ του συστήματος L(i), i=1,…M-1 να είναι ίση με την απόδοση PR_i του σταθμού εργασίας W_i της πραγματικής γραμμής L. Ομοίως, θα πρέπει η απόδοση $PR_d(i)$ του downstream΄΄εικονικού΄΄ σταθμού εργασίας $W_d(i)$ του συστήματος L(i), i=1,…M-1 να είναι ίση με την απόδοση PR_{i+1} του σταθμού εργασίας W_{i+1} της πραγματικής γραμμής L

Όλα τα παραπάνω εκφράζονται με τις παρακάτω ισότητες:

$$PR(i)=PR_u(i)= PR_d(i) = PR(1)=PR_i \quad , i=1,\ldots,M-1 \tag{173}$$

$$PR(i-1)=PR_d(i-1)= PR(1)=PR_i \quad , i=2,\ldots,M \tag{174}$$

5.14 Οι εξισώσεις ροής (Flow Rate Idle Time)

Λαμβάνοντας υπόψη τις ισότητες (167) και (170) η αποδόσεις των ΄΄εικονικών΄΄ σταθμών εργασίας $W_d(i-1)$ και $W_u(i)$ των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων L(i) και το γεγονός ότι κάθε ΄΄εικονικός΄΄ σταθμός εργασίας $W_u(i)$ αποτελείται από S_i μηχανές επεξεργασίας, ενώ κάθε ΄΄εικονικός΄΄ σταθμός εργασίας $W_d(i)$ αποτελείται από S_{i+1} σταθμούς εργασίας, οι αποδόσεις των ΄΄εικονικών΄΄ σταθμών εργασίας δίνονται από τους τύπους:

$$PR_d(i-1) = S_i\mu_d(i-1)\sum_{n=0}^{n=S_{i-1}+S_i+C_{i-1}} p(n) - \mu_d(i-1)\sum_{n=0}^{n=S_i-1}(S_i-n)\cdot p(n), \quad i=2,...,M \tag{175}$$

$$PR_u(i) = S_i\mu_u(i)\sum_{n=0}^{n=S_i+S_{i+1}+C_i} p(n) - \mu_u(i)\sum_{n=S_{i+1}+C_i+1}^{n=S_i+S_{i+1}+C_i}(n-S_{i+1}-C_i)\cdot p(n) \quad i=1,\ldots,M-1 \tag{176}$$

Κάνοντας κάποιες στοιχειώδεις πράξεις οι εξισώσεις (175) και (176) γίνονται :

$$PR_d(i-1) = \mu_d(i-1)\left(S_i\sum_{n=0}^{n=S_{i-1}+S_i+C_{i-1}} p(n) - \sum_{n=0}^{n=S_i-1}(S_i-n)\cdot p(n)\right), \quad i=2,...,M \tag{177}$$

και

$$PR_u(i) = \mu_u(i)\left(S_i\sum_{n=0}^{n=S_i+S_{i+1}+C_i} p(n) - \sum_{n=S_{i+1}+C_i+1}^{n=S_i+S_{i+1}+C_i}(n-S_{i+1}-C_i)p(n)\right) \quad i=1,\ldots,M-1 \tag{178}$$

Επειδή το άθροισμα όλων των στάσιμων πιθανοτήτων είναι ίσο με τη μονάδα ισχύει ότι

$$\sum_{n=0}^{n=S_i+S_{i+1}+C_i} p(n) = \sum_{n=0}^{n=S_i+S_{i-1}+C_{i-1}} p(n) = 1 \qquad (179)$$

Η πιθανότητα $p_b(i)$ να είναι μπλοκαρισμένο κάθε ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα που αποτελείται από δυο σταθμούς εργασίας και ένα αποθηκευτικό χώρο, L(i) δίνεται από τον τύπο

$$p_b(i) = \sum_{n=S_{i+1}+C_i+1}^{n=S_i+S_{i+1}+C_i} (n - S_{i+1} - C_i) \cdot p(n), \; i=1,\ldots,M-1 \qquad (180)$$

ενώ η πιθανότητα $p_s(i-1)$ να είναι άδειο κάθε ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα που αποτελείται από δυο σταθμούς εργασίας και ένα αποθηκευτικό χώρο, L(i-1) δίνεται από τον τύπο

$$p_s(i-1) = \sum_{n=0}^{n=S_i-1} (S_i - n) \cdot p(n), \; i=2,\ldots,N \qquad (181)$$

Αντικαθιστώντας τις ισότητες (180) και (179) στην ισότητα (178) ο τύπος για την απόδοση του ΄΄εικονικού΄΄ upstream σταθμού εργασίας $W_u(i)$ παίρνει τη μορφή

$$PR_u(i) = \mu_u(i)(S_i - p_b(i)) \qquad i=1,\ldots,M-1 \qquad (182)$$

Ομοίως, αντικαθιστώντας τις ισότητες (179) και (181) στην ισότητα (177) ο τύπος για την απόδοση του ΄΄εικονικού΄΄ downstream σταθμού εργασίας $W_d(i-1)$ παίρνει τη μορφή

$$PR_d(i-1) = \mu_d(i-1)(S_i - p_s(i-1)) \qquad i=2,\ldots,M \qquad (183)$$

Η απόδοση PR_i του σταθμού εργασίας W_i,, της πραγματικής γραμμής παραγωγής L, δίνεται από τον τύπο:

$$PR_i = \mu_i\left(S_i - \Pr[\text{O } W_l \text{ είναι άδειος}] - \Pr[\text{O } W_l \text{ είναι μπλοκαρισμένος}]\right) \qquad (184)$$

Λόγω της συνθήκης (2) της ενότητας 5.5, η πιθανότητα ο αποθηκευτικός χώρος B_i της ΄΄εικονικής΄΄ γραμμής L(i) να είναι γεμάτος η άδειος είναι ίδια με την αντίστοιχη πιθανότητα για τον αποθηκευτικό χώρο B_i της ΄΄πραγματικής΄΄ γραμμής L, i=1,2,…,M-1.
Αυτό σημαίνει ότι

$$\Pr[\text{O } W_i \text{ είναι άδειος}] = p_s(i-1) \text{ και}$$
$$\Pr[\text{O } W_i \text{ είναι μπλοκαρισμένος}] = p_b(i)$$

Η ισότητα (184) παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$PR_i = \mu_i(S_i - p_s(i-1) - p_b(i)) \tag{185}$$

Υπολογίζοντας τις πιθανότητες $p_b(i)$ και $p_s(i-1)$ από τις ισότητες (182) και (183), αντίστοιχα έχουμε

$$p_b(i) = S_i - \frac{PR_u(i)}{\mu_u(i)} \tag{186}$$

και

$$p_s(i-1) = S_i - \frac{PR_d(i-1)}{\mu_d(i-1)} \tag{187}$$

Αντικαθιστώντας τις ισότητες (186) και (187) στην ισότητα (185), έχουμε:
:

$$PR_i = \mu_i\left(S_i - \left(S_i - \frac{PR_d(i-1)}{\mu_d(i-1)}\right) - \left(S_i - \frac{PR_u(i)}{\mu_u(i)}\right)\right) = \mu_i\left(\frac{PR_d(i-1)}{\mu_d(i-1)} - S_i + \frac{PR_u(i)}{\mu_u(i)}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{PR_i}{\mu_i} + S_i = \frac{PR_d(i-1)}{\mu_d(i-1)} + \frac{PR_u(i)}{\mu_u(i)} \tag{188}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις διατήρησης ροής:

$$PR(i-1)=PR(i)= PR_i = PR_d(i-1) = PR_u(i) \tag{189}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (189) στην εξίσωση (188) έχουμε:

$$\frac{1}{\mu_i} + \frac{S_i}{PR(i)} = \frac{1}{\mu_d(i-1)} + \frac{1}{\mu_u(i)},\ i=2,\ldots,N-1 \tag{190}$$

Η εξίσωση (190) γίνεται

$$\frac{1}{\mu_i} + \frac{S_i}{PR(i)} - \frac{1}{\mu_d(i-1)} = \frac{1}{\mu_u(i)} \Rightarrow \mu_u(i)\left(\frac{1}{\mu_i} + \frac{S_i}{PR(i)} - \frac{1}{\mu_d(i-1)}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\mu_u(i) = \frac{1}{\frac{1}{\mu_i} + \frac{S_i}{PR(i)} - \frac{1}{\mu_d(i-1)}}$$

Στην παραπάνω εξίσωση λόγω των εξισώσεων διατήρησης της ροής η ποσότητα PR(i) μπορεί να αντικατασταθεί από την ποσότητα PR(i-1).

Τελικά οι εξισώσεις ροής (Flow Rate Idle Time) για τον υπολογισμό των παραμέτρων $\mu_u(i)$, i=2,…,M-1 παίρνουν τη μορφή

$$\mu_u(i) = \frac{1}{\frac{1}{\mu_i} + \frac{S_i}{PR(i-1)} - \frac{1}{\mu_d(i-1)}},\ i = 2,...,M-1 \qquad (191)$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι την ισότητα (190) οι εξισώσεις ροής (Flow Rate Idle Time) για τον υπολογισμό των παραμέτρων $\mu_d(i)$, i=M-2,…,1 παίρνουν τη μορφή

$$\frac{1}{\mu_i} + \frac{S_i}{PR(i)} - \frac{1}{\mu_u(i)} = \frac{1}{\mu_d(i-1)} \Rightarrow \mu_d(i-1)\left(\frac{1}{\mu_i} + \frac{S_i}{PR(i)} - \frac{1}{\mu_u(i)}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\mu_d(i-1) = \frac{1}{\frac{1}{\mu_i} + \frac{S_i}{PR(i)} - \frac{1}{\mu_u(i)}}$$

Οι παράμετροι $\mu_d(i)$, i=M-2,…,1 υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την παρακάτω εξίσωση:

$$\mu_d(i) = \frac{1}{\frac{1}{\mu_{i+1}} + \frac{S_{i+1}}{PR(i+1)} - \frac{1}{\mu_u(i+1)}}, i = M-2,...,1 \qquad (192)$$

5.15 Οριακές συνθήκες

Επειδή ο ΄΄εικονικός΄΄ σταθμός εργασίας $W_u(1)$ αντιστοιχεί στον σταθμό εισόδου W_1 της πραγματικής γραμμής παραγωγής L, κάθε μια από τις S_1 μηχανές επεξεργασίας του ΄΄εικονικού΄΄ σταθμού εργασίας $W_u(1)$ έχει ρυθμό επεξεργασίας ίσο με τον ρυθμό επεξεργασίας των αντίστοιχων S_1 μηχανών επεξεργασίας του σταθμού W_1, δηλαδή

$$\mu_u(1) = \mu_1$$

Ομοίως επειδή ο ΄΄εικονικός΄΄ σταθμός εργασίας $W_d(M-1)$ αντιστοιχεί στο σταθμό εξόδου W_M της πραγματικής γραμμής παραγωγής L, κάθε μια από τις S_M μηχανές επεξεργασίας του ΄΄εικονικού΄΄ σταθμού εργασίας $W_d(M-1)$ έχει ρυθμό επεξεργασίας ίσο με τον ρυθμό επεξεργασίας των αντίστοιχων S_M μηχανών επεξεργασίας του σταθμού W_M, δηλαδή

$$\mu_d(M-1) = \mu_M$$

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος για την ταυτόχρονη επίλυση των εξισώσεων (191) και (192) ο οποίος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της απόδοσης μεγάλων γραμμών παραγωγής με παράλληλες και αξιόπιστες μηχανές επεξεργασίας σε κάθε σταθμό εργασίας.

5.16 Ο αλγόριθμος για την επίλυση των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος ο οποίος επιλύει ταυτόχρονα όλες τις εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης. Η δομή του αλγόριθμου αυτού βασίζεται στη δομή του αλγόριθμου που παρουσιάστηκε από τους Dallery , David και Xie (DDX algorithm) (1988) για την ανάλυση σειριακών συστημάτων με μια μηχανή επεξεργασίας ανά σταθμό εργασίας.
Ο αλγόριθμος αποτελείται από τρία βήματα:

Βήμα 1^{o} : Αρχικοποίηση των μεταβλητών

Σε αυτό το βήμα γίνεται αρχικοποίηση των μεταβλητών $\mu_u(i)$ and $\mu_d(i)$ κάθε ΄΄εικονικού υποσυστήματος΄΄ L(i), i=1,…M-1. Οι αρχικές τιμές των παραμέτρων αυτών είναι οι εξής:

$$\mu_u(i) = \mu_i,\ \ i = 1,...,M-1,$$

$$\mu_d(i) = \mu_{i+1},\ \ i = 1,...,M-1.$$

Βήμα 2^{o} : Υπολογισμός των παραμέτρων $\mu_u(i)$ and $\mu_d(j)$, i=2,…,M-1, j=M-2,…,1

Εκτέλεσε τα βήματα (2.1) και (2.2), εναλλάξ, μέχρις ότου το Βήμα 3 επαληθευτεί.

(2.1) Υπολογισμός των παραμέτρων $\mu_u(i)$, i=2,…,M-1

Για i=2,.., M-1, υπολόγισε τις παραμέτρους $\mu_u(i)$ χρησιμοποιώντας την εξίσωση (191) και υπολόγισε τις παραμέτρους και την απόδοση PR(i-1) του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(i-1), χρησιμοποιώντας τις πιο πρόσφατες τιμές των παραμέτρων $\mu_u(i-1)$ and $\mu_d(i-1)$.

$$\mu_u(i) = \frac{1}{\frac{1}{\mu_i} + \frac{S_i}{PR(i-1)} - \frac{1}{\mu_d(i-1)}},\ \ i = 2,...,M-1 \qquad (193)$$

(2.2) Υπολογισμός των παραμέτρων $\mu_d(i),\ \ i = M-2,...,1$

Για i=M-2,..,1, υπολόγισε τις παραμέτρους $\mu_d(i)$ χρησιμοποιώντας την εξίσωση (192) , και υπολόγισε τις παραμέτρους και την απόδοση PR(i+1) του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(i+1), χρησιμοποιώντας τις πιο πρόσφατες τιμές των παραμέτρων $\mu_u(i+1)$ και $\mu_d(i+1)$.

$$\mu_d(i) = \frac{1}{\frac{1}{\mu_{i+1}} + \frac{S_{i+1}}{PR(i+1)} - \frac{1}{\mu_u(i+1)}}, i = M-2,...,1 \qquad (194)$$

Βήμα 3^{ο} : Συνθήκη τερματισμού

Ο αλγόριθμος τερματίζεται όταν

$$\left|PR(i) - PR(1)\right| < \varepsilon, \quad \gamma\iota\alpha\ i = 2,..., M-1$$

όπου, ε είναι ένας προκαθορισμένος πολύ μικρός θετικός αριθμός κοντά στο μηδέν.

Η απόδοση της πραγματικής γραμμής παραγωγής PR_L υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την παρακάτω εξίσωση

$$PR_L=PR(i),\ i=1,\ldots,M-1 \qquad (195)$$

5.17 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Ο αλγόριθμος της μεθόδου της αποσύνθεσης που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα κωδικοποιήθηκε στη γλώσσα προγραμματισμού C++ και χρησιμοποιήθηκε για την εύρεση της απόδοσης μεγάλου πλήθους γραμμών παραγωγής με παράλληλες μηχανές σε κάθε σταθμό εργασίας.
Για να διαπιστώσουμε την ακρίβεια και την αποτελεσματικότητα του προτεινόμενου αλγόριθμου εξετάστηκαν δυο κατηγορίες γραμμών παραγωγής. Η πρώτη κατηγορία αφορά ΄΄μικρές΄΄ γραμμές παραγωγής στις οποίες υπάρχουν μέχρι και επτά σταθμοί εργασίας. Για αυτή την κατηγορία γραμμών παραγωγής τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου συγκρίνονται με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στις εργασίες των Hillier και So [1989], [1995] και [1996]. Οι Hillier και So στις εργασίες αυτές εκτιμούν την απόδοση των συστημάτων που εξετάζουν με απόλυτη ακρίβεια λόγω του ότι χρησιμοποιούν ως εκτιμητική μέθοδο τη μέθοδο της Μαρκοβιανής ανάλυσης.

Η δεύτερη κατηγορία γραμμών παραγωγής που εξετάζεται αφορά γραμμές παραγωγής οι οποίες αποτελούνται από πάρα πολλούς σταθμούς εργασίας με παράλληλες μηχανές επεξεργασίας. Συγκεκριμένα ο προτεινόμενος αλγόριθμος εφαρμόζεται για πολύ μεγάλες γραμμές παραγωγής στις οποίες υπάρχουν μέχρι και χίλιοι (1000) σταθμοί εργασίας. Επειδή στη διεθνή βιβλιογραφία δεν υπάρχουν αποτελέσματα για τόσο μεγάλες γραμμές παραγωγής, χρησιμοποιείται η μέθοδος της προσομοίωσης για την εκτίμηση της απόδοσης τόσο μεγάλων συστημάτων. Για να διαπιστωθεί η ακρίβεια και η αποτελεσματικότητα του αλγόριθμου της αποσύνθεσης, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μέθοδο της προσομοίωσης συγκρίνονται με εκείνα που προκύπτουν από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου.
Τα μοντέλα της προσομοίωσης δημιουργήθηκαν με το πρόγραμμα προσομοίωσης eM-plant.

5.17.1 Αριθμητικά αποτελέσματα για μικρές γραμμές παραγωγής

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου της αποσύνθεσης για μικρές γραμμές παραγωγής στις οποίες υπάρχουν μέχρι και επτά σταθμοί εργασίας.
Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου της αποσύνθεσης συγκρίνονται με εκείνα που παρουσιάζονται από τους Hillier και So [1989], [1995] και [1996].
Σε όλους τους πίνακες που ακολουθούν οι στήλες $S=(S_1,\ldots,S_M)$, $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_M)$ και $B = (B_1,\ldots,B_{M-1})$ συμβολίζουν αντίστοιχα, τον αριθμό των παράλληλων μηχανών σε κάθε σταθμό εργασίας, το μέσο ρυθμό επεξεργασίας σε κάθε σταθμό εργασίας και τη χωρητικότητα των ενδιάμεσων αποθηκευτικών χώρων μιας γραμμής παραγωγής που αποτελείται από M σταθμούς εργασίας. .
Η στήλη με την ονομασία (PR_{DECO}) παρουσιάζει την εκτίμηση της απόδοσης της γραμμής παραγωγής που προκύπτει από την εφαρμογή του αλγόριθμου της αποσύνθεσης.
Στο πίνακα 26 παρουσιάζονται αποτελέσματα για μια γραμμή παραγωγής που αποτελείται από 5 σταθμούς εργασίας και στην οποία οι ενδιάμεσοι αποθηκευτικοί χώροι έχουν χωρητικότητα ίση με μηδέν. Στην τέταρτη στήλη δίνονται τα αποτελέσματα για την εκτίμηση της απόδοσης που παρουσιάζονται από τους Hillier και So [1996], (PR_{HS96}). Στην πέμπτη στήλη (% Error), παρουσιάζεται η επί τοις εκατό απόκλιση που προκύπτει αν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της μεθόδου της αποσύνθεσης με εκείνα των Hillier και So [1996]. Τέλος, η τελευταία στήλη παρουσιάζει το χρόνο που απαιτείται από τον αλγόριθμο της αποσύνθεσης για την εκτίμηση της απόδοσης της γραμμής παραγωγής.

Η επί τοις εκατό απόκλιση υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη παρακάτω σχέση

$$\%\,\text{Error} = \frac{\left|PR_{DECO} - PR_{HS96}\right|}{PR_{HS96}} \text{x}100\%$$

Πίνακας 26: Εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με 5 σταθμούς εργασίας, $B_i=0,i=1,\ldots,4$

(S_1,S_2,S_3,S_4,S_5)	$(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5)$	PR_{DECO}	PR_{HS96}	% Error	Time (seconds)
(1,1,1,1,4)	(2.0876,2.7624,3.0120,3.4013,0.2831)	1.0192	1.0240	0.469	0.01
(4,1,1,1,1)	(0.2831,3.4013,3.0120,2.7624,2.0876)	1.0192	1.0210	0.176	0.01
(1,1,1,4,1)	(2.0920,2.8248,3.2786,0.2894,2.4509)	0.9965	1.0120	1.532	0.01
(1,1,4,1,1)	(2.1739,3.1347,0.2905,3.1347,2,1739)	0.9913	1.0100	1.851	0.01
(2,1,1,1,3)	(0.6877,2.9585,2.9673,3.1250,0.3920)	0.9890	0.9790	1.021	0.01
(1,2,1,1,3)	(2.0533,0.7710,3.0581,3.1250,0.3892)	0.9745	0.9730	0.154	0.01
(1,1,2,3,1)	(1.9569,2.6881,0.7987,3.2467,0.3910)	0.9667	0.9690	0.237	0.01
(1,2,1,3,1)	(2.0408,0.7686,3.2154,0.4103,2.1691)	0.9514	0.9610	0.999	0.01
(1,1,1,1,6)	(3.0211,4.0000,4.4444,5.1020,0.2501)	1.4149	1.4130	0.134	0.01
(6,1,1,1,1)	(0.2501,5.1020,4.4444,4.0000,3.0211)	1.4149	1.4090	0.419	0.01
(1,1,1,6,1)	(3.0674,4.1666,4.8543,0.2526,3.7037)	1.3893	1.4000	0.764	0.01
(1,1,6,1,1)	(3.2051,4.6948,0.2531,4.6948,3.2051)	1.3835	1.3970	0.966	0.01
(2,1,1,1,5)	(1.0121,4.3478,4.3859,4.8543,0.2986)	1.3786	1.3530	1.892	0.01
(3,1,1,2,3)	(0.5373,4.2372,4.2372,1.1695,0.5518)	1.2988	1.2760	1.787	0.01
(2,2,2,2,2)	(0.8984,1.0660,1.1135,1.0660,0.8984)	1.1899	1.2080	1.498	0.01

Στον πίνακα 27 παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για γραμμές παραγωγής οι οποίες αποτεολούνται από τρεις έως και επτά σταθμούς εργασίας. Ο ρυθμός επεξεργασίας κάθε μηχανής σε κάθε σταθμό εργασίας είναι ίσος με τη μονάδα.
Η πρώτη στήλη (M) παρουσιάζει τον αριθμό των σταθμών εργασίας ενώ η τέταρτη δίνει τα αποτελέσματα για την εκτίμηση της απόδοσης που παρουσιάζονται από τους Hillier and So [1995], (PR_{HS95}). Στην πέμπτη στήλη (% Error), παρουσιάζεται η επί τοις εκατό απόκλιση που προκύπτει αν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της μεθόδου της αποσύνθεσης με εκείνα των Hillier και So [1995], (PR_{HS95}).

Πίνακας 27: Εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με 3, 5 και 7 σταθμούς εργασιας

M	S	PR_{DECO}	PR_{HS95}	%Error	Time (seconds)
3	(15,16,16)	13.5500	13.5400	0.074	0.05
3	(1,2,2)	0.8846	0.8873	0.304	0.01
3	(30,32,30)	27.7800	27.6800	0.361	0.27
5	(1,1,2,1,1)	0.5541	0.5638	1.720	0.02
5	(1,2,1,2,1)	0.6677	0.6637	0.603	0.02
5	(1,2,2,2,2)	0.8716	0.8752	0.411	0.02
7	(1,1,2,1,2,1,1,)	0.5575	0.5613	0.677	0.05
7	(1,2,1,2,1,2,1)	0.6334	0.6320	0.222	0.05

Στον πίνακα 28 παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για γραμμές παραγωγής οι οποίες αποτελούνται από τρεις σταθμούς εργασίας, ενώ στον πίνακα 29 παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για γραμμές παραγωγής οι οποίες αποτελούνται από τέσσερις σταθμούς εργασίας. Επίσης στον πίνακα 30 παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για γραμμές παραγωγής οι οποίες αποτελούνται από πέντε σταθμούς εργασίας, ενώ στον πίνακα 31 παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για γραμμές παραγωγής οι οποίες αποτελούνται από έξη και επτά σταθμούς εργασίας.
Ο ρυθμός επεξεργασίας κάθε μηχανής σε κάθε σταθμό εργασίας είναι ίσος με τη μονάδα για όλους τους πίνακες αποτελεσμάτων. Επίσης οι χωρητικότητες των ενδιάμεσων αποθηκευτικών χώρων θεωρείται ίση με μηδέν, για όλες τις περιπτώσεις που παρουσιάζονται στους πίνακες 28,29,30 και 31.
Η πρώτη στήλη (M) παρουσιάζει τον αριθμό των σταθμών εργασίας ενώ η τέταρτη δίνει τα αποτελέσματα για την εκτίμηση της απόδοσης που παρουσιάζονται από τους Hillier και So [1989], (PR_{HS89}). Στην πέμπτη στήλη (% Error), παρουσιάζεται η επί τοις εκατό απόκλιση που προκύπτει αν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της μεθόδου της αποσύνθεσης με εκείνα των Hillier και So [1989].

Πίνακας 28: Εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με 3 σταθμούς εργασίας

N	S	PR_{DECO}	PR_{HS89}	%Error	Time (seconds)
3	(3,4,4)	2.6124	2.6130	0.023	0.03
3	(4,4,3)	2.6124	2.6100	0.092	0.03
3	(4,3,4)	2.5406	2.5640	0.913	0.03
3	(3,4,3)	2.4185	2.3960	0.939	0.03
3	(3,3,4)	2.2924	2.3100	0.762	0.03
3	(4,3,3)	2.2924	2.3090	0.719	0.03
3	(5,6,6)	4.3831	4.3800	0.071	0.03
3	(6,6,5)	4.3831	4.3770	0.139	0.03
3	(6,5,6)	4.2957	4.3230	0.632	0.03
3	(5,6,5)	4.1690	4.1420	0.652	0.03
3	(5,5,6)	4.0345	4.0540	0.481	0.03
3	(6,5,5)	4.0345	4.0520	0.432	0.03
3	(14,15,14)	12.3800	12.3400	0.324	0.03
3	(14,14,15)	12.2362	12.2500	0.113	0.03
3	(15,14,14)	12.2362	12.2500	0.113	0.03
3	(35,36,36)	32.4641	32.4300	0.105	0.03
3	(35,37,35)	32.5511	32.4400	0.342	0.03
3	(30,32,30)	27.7827	27.7800	0.009	0.03
3	(30,31,31)	27.7008	27.6700	0.111	0.03

Πίνακας 29: Εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με 4 σταθμούς εργασίας

N	S	PR_{DECO}	PR_{HS89}	%Error	Time (seconds)
4	(3,3,4,3)	2.2044	2.2020	0.109	0.05
4	(3,4,3,3)	2.2044	2.2020	0.109	0.05
4	(3,3,3,4)	2.1045	2.1310	1.243	0.05
4	(4,3,3,3)	2.1045	2.1300	1.197	0.05
4	(5,5,6,5)	3.9106	3.9010	0.272	0.05
4	(5,6,5,5)	3.9106	3.9000	0.272	0.05
4	(5,5,5,6)	3.7984	3.8240	0.670	0.05
4	(6,5,5,5)	3.7984	3.8220	0.617	0.05
4	(7,7,8,7)	5.6663	5.6510	0.271	0.05
4	(7,8,7,7)	5.6600	5.6500	0.177	0.05
4	(7,7,7,8)	5.5472	5.5710	0.427	0.05
4	(8,7,7,7)	5.5472	5.5690	0.391	0.05
4	(1,1,2,1)	0.6070	0.6131	0.995	0.05
4	(1,2,1,1,)	0.6070	0.6131	0.995	0.05
4	(1,2,2,2)	0.8755	0.8791	0.410	0.05
4	(2,2,2,1)	0.8755	0.8767	0.137	0.05
4	(3,4,4,4)	2.5700	2.5680	0.078	0.05
4	(4,4,4,3)	2.5700	2.5640	0.234	0.05
4	(4,3,4,4)	2.4864	2.5130	1.059	0.05
4	(4,4,3,4)	2.4864	2.5110	0.978	0.05
4	(1,2,1,2)	0.7219	0.7207	0.167	0.05
4	(2,1,2,1)	0.7219	0.7201	0.250	0.05
4	(2,3,2,3)	1.5213	1.5200	0.086	0.05
4	(3,2,3,2)	1.5213	1.5190	0.151	0.05
4	(4,5,4,5)	3.2024	3.1980	0.138	0.05
4	(5,4,5,4)	3.2024	3.1970	0.169	0.05

Πίνακας 30: Εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με 5 σταθμούς εργασίας

N	S	PR_{DECO}	PR_{HS89}	%Error	Time (seconds)
5	(1,2,1,2,1)	0.6677	0.6637	0.603	0.07
5	(1,1,2,2,1)	0.6309	0.6333	0.379	0.07
5	(1,1,2,1,2)	0.6016	0.6110	1.538	0.07
5	(2,3,2,3,2)	1.4459	1.4350	0.760	0.07
5	(2,2,3,3,2)	1.4132	1.4110	0.156	0.07
5	(2,2,3,2,3)	1.3700	1.3770	0.508	0.07
5	(2,3,2,2,3)	1.3581	1.3730	1.085	0.07
5	(3,4,3,4,3)	2.2611	2.2450	0.717	0.07
5	(3,3,4,4,3)	2.2341	2.2260	0.364	0.07
5	(3,3,4,3,4)	2.1820	2.1860	0.183	0.07
5	(3,4,3,3,4)	2.1655	2.1790	0.620	0.07
5	(2,3,3,2,3)	1.5586	1.5460	0.815	0.07
5	(3,2,3,2,3)	1.4869	1.4960	0.608	0.07
5	(1,2,2,1,2)	0.7615	0.7511	1.385	0.07
5	(2,1,2,1,2)	0.7046	0.7116	0.984	0.07
5	(2,3,3,3,3)	1.7040	1.7050	0.059	0.07
5	(3,3,3,3,2)	1.7040	1.7000	0.235	0.07
5	(3,3,3,2,3)	1.6336	1.6550	1.293	0.07
5	(1,2,2,2,2)	0.8716	0.8752	0.411	0.07
5	(2,2,2,2,1)	0.8716	0.8726	0.115	0.07
5	(3,3,4,3,3)	2.1120	2.1060	0.285	0.07
5	(3,3,3,4,3)	2.0687	2.0830	0.687	0.07

Πίνακας 31: Εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με 6 και 7 σταθμούς εργασίας

N	S	PR_{DEC}	PR_{HS89}	%Error	Time (seconds)
6	(1,2,1,2,2,1)	0.6954	0.6858	1.400	0.08
6	(1,2,2,1,2,1)	0.6954	0.6857	1.415	0.08
6	(1,2,1,2,1,2)	0.6589	0.6602	0.197	0.08
6	(2,1,2,1,2,1)	0.6589	0.6599	0.151	0.08
6	(1,1,2,2,2,1)	0.6392	0.6431	0.606	0.08
6	(1,1,2,2,1,1)	0.5921	0.5871	0.852	0.08
6	(1,2,1,2,1,1)	0.5878	0.5936	0.977	0.08
6	(1,1,2,1,2,1)	0.5878	0.5936	0.977	0.08
6	(1,2,2,2,2,2)	0.8699	0.8732	0.378	0.08
6	(2,2,2,2,2,1)	0.8699	0.8704	0.057	0.08
6	(1,2,2,1,2,2)	0.7556	0.7488	0.908	0.08
7	(1,2,1,2,2,2,1)	0.7078	0.6978	1.433	0.08
7	(1,2,2,1,2,1,2)	0.6836	0.6812	0.352	0.08
7	(1,1,2,2,2,2,1)	0.6416	0.6483	1.033	0.08
7	(1,1,2,1,2,2,1)	0.5973	0.6036	1.044	0.08
7	(1,1,2,2,1,2,1)	0.6193	0.6148	0.732	0.08
7	(1,2,1,2,1,2,1)	0.6333	0.6320	0.206	0.08
7	(1,1,2,1,2,1,1)	0.5575	0.5613	0.677	0.08

Παρατηρώντας τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους πίνακες 26,27,28,29,30 και 31 παρατηρούμε ότι η επί τοις εκατό απόκλιση της εκτίμησης της απόδοσης με τη μέθοδο της αποσύνθεσης, σε σύγκριση με την εκτίμηση ης απόδοσης που προκύπτει από τη Μαρκοβιανή ανάλυση (όπως παρουσιάζεται στις εργασίες των Hillier και So) δεν ξεπερνά σε καμιά περίπτωση το 1,9%.
Επίσης παρατηρούμε ότι ο χρόνος που απαιτείται για την εκτίμηση της απόδοσης από το προτεινόμενο αλγόριθμο είναι σε όλες τις περιπτώσεις πολύ μικρός και δεν ξεπερνά τα 0,3 δευτερόλεπτα. Με βάση τα αποτελέσματα μπορούμε να πούμε ότι ο αλγόριθμος λειτουργεί γρήγορα και πάρα πολύ ικανοποιητικά.

5.17.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για μεγάλες γραμμές παραγωγής

Για να διαπιστώσουμε την αποτελεσματικότητα του προτεινόμενου αλγόριθμου δοκιμάσαμε την εφαρμογή του για την εκτίμηση της απόδοσης μεγάλων γραμμών παραγωγής για τις οποίες ο αριθμός των σταθμών εργασίας ποικίλει από 10 έως και 1000. Πιο συγκεκριμένα εξετάσαμε γραμμές παραγωγής στις οποίες ο αριθμός των σταθμών εργασίας αυξάνεται, ξεκινώντας από 10 και φτάνοντας έως 100 με βήμα 10. Επίσης εξετάστηκαν και μεγαλύτερες γραμμές παραγωγής στις οποίες ο αριθμός των σταθμών εργασίας αυξάνεται, ξεκινώντας από 100 σταθμούς εργασίας και φτάνοντας έως 1000 σταθμούς εργασίας, με βήμα 100.
Όπως ήδη έχει αναφερθεί για να διαπιστώσουμε την ορθότητα των αποτελεσμάτων της μεθόδου της αποσύνθεσης χρησιμοποιούμε για λόγους σύγκρισης ένα μοντέλο προσομοίωσης το οποίο αναπτύχθηκε στο πρόγραμμα προσομοίωσης eM-Plant.

Στη συνέχεια με S_i, και μ_i, i=1,…,M, συμβολίζουμε τον αριθμό των παράλληλων μηχανών στο σταθμό εργασίας i και το ρυθμό επεξεργασίας κάθε μιας από τις S_i παράλληλες μηχανές του σταθμού εργασίας i, αντίστοιχα.
Με B_i, i=1,…,M-1, συμβολίζουμε τη χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου που βρίσκεται πριν το σταθμό εργασίας i+1.

Οι παράμετροι που χαρακτηρίζουν τις γραμμές παραγωγής που εξετάζονται παρουσιάζονται στη συνέχεια και έχουν ως εξής:

Γραμμή 1, L(1) :
M=10
S_i=2, i=1,…,4
S_5=S_6=3
S_i=2, i=7,…,10
B_i=3, i=1,…,9
μ_i=1, i=1,…,10

Γραμμή 2, L(2):
M=20
S_i=3, i=1,…,7
S_j=4, j=8,…,15
S_k=3, k=16,…,20
B_i=4, i=1,…,19,
μ_i =1, i=1,…,20

Γραμμή 3, L(3):
M=30,S_i=5, i=1,…,10
S_j=3, j=11,…,16
S_k=5, k=17,…,25
S_m=4, m=26,…30
B_i=3, i=1,…,29
μ_i =1, i=1,…,30

Γραμμή 4, L(4):
M =40
S_i=2, i=1,…,10
S_j=3, j=11,…,20
S_k=2, k=21,…,30
S_m=3, m=31,…35
S_v=2, v=36,…,40
B_i=2, i=1,…,39
μ_i =1, I=1,…,40

Γραμμή 5, L(5):
M =50
S_i=2, i=1,…,10
S_j=1, j=11,…,40
S_k=2, k=41,…,50
B_i=2, i=1,…,49
μ_i =1, i=1,…,50

Γραμμή 6, L(6):
M =60
S_i=3, i=1,…,20
S_j=2, j=21,…,40
S_k=3, k=41,…,60
B_i=3, i=1,…,59
μ_i =1, i=1,…,60

Γραμμή 7, L(7):
M =70
S_i=3, i=1,…,25
S_j=2, j=26,…,45
S_k=3, k=46,…,70
B_i=2, i=1,…,69
μ_i =1, i=1,…,70

Γραμμή 8, L(8):
M =80
S_i=3, i=1,…,20
S_j=2, j=21,…,40
S_k=3, k=41,…,60
S_m=2, m=61, ...,80
B_i=1, i=1,…,79
μ_i =1, i=1,…,80

Γραμμή 9, L(9):
M =90
S_i=2, i=1,…,30
S_j=3, j=31,…,60
S_k=2, k=61,…,90
B_i=2, i=1,…,89
μ_i =1, i=1,…,90

Γραμμή 10, L(10):
M =100
S_i=2, i=1,…,40
S_k=3, k=41,…,60
S_m=2, m=61, ...,100
B_i=2, i=1,…,99
μ_i =1, i=1,…100

Γραμμή 11, L(11):
M =20
S_i=3, μ_i =1, i=1,…,7
S_k=4, μ_κ =0.95, k=8,…,15
S_m=3, μ_m =1, m=16,...,20
B_i=4, i=1,…,19

Γραμμή 12, L(12):
M =30
S_i=5, μ_i=0.9, i=1,…,10
S_k=3, μ_k=1, k=11,…,16
S_m=5, μ_m=0.9, m=17,...,25
S_m=4, μ_m=0.95,
m=26,...,30
B_i=3, i=1,…,29

Γραμμή 13, L(13):
M =40
S_i=2, μ_i=1, i=1,…,10
S_k=3, μ_k=0.95, k=11,…,20
S_m=2, μ_m=1, m=21,...,30
S_m=3, μ_m=0.95,
m=31,...,35
S_m=2, μ_m=1, m=36,...,40
B_i=2, i=1,…,39

Γραμμή 14, L(14):
M =50
S_i=2, μ_i=0.95, i=1,…,10
S_k=1, μ_k=1, k=11,…,40
S_m=2, μ_m=0.95,
m=41,...,50
B_i=2, i=1,…,49

Γραμμή 15, L(15):
M =200
S_i=2, i=1,…,80
S_i=3, i=81,…,120
S_i=2, i=121,…,200
B_i=2 i=1,…,199
μ_i=1, i=1,…,200

Γραμμή 16, L(16)
M =300
S_i=2, i=1,…,50
S_i=3, i=51,…,100
S_i=2, i=101,…,150
S_i=3, i=151,…,200
S_i=2, i=201,…,250
S_i=3, i=251,…,300
B_i=2 i=1,…,299
μ_i=1, i=1,…,300

Γραμμή 17, L(17)
M =300
S_i=2, i=1,…,50
S_i=3, i=51,…,100
S_i=2, i=101,…,150
S_i=3, i=151,…,200
S_i=2, i=201,…,250
S_i=3, i=251,…,300
B_i=5 i=1,…,299
μ_i=1, i=1,…,300

Γραμμή 18, L(18)
M =300
S_i=2, i=1,…,50
S_i=3, i=51,…,100
S_i=2, i=101,…,150
S_i=3, i=151,…,200
S_i=2, i=201,…,250
S_i=3, i=251,…,300
B_i=10 i=1,…,299
μ_i=1, i=1,…,300

Γραμμή 19, L(19)
M =400
S_i=2, i=1,…,150
S_i=3, i=151,…,250
S_i=2, i=251,…,400
B_i=2 i=1,…,399
μ_i=1, i=1,…,400

Γραμμή 20, L(20)
M =400
S_i=2, i=1,…,150
S_i=3, i=151,…,250
S_i=2, i=251,…,400
B_i=5 i=1,…,399
μ_i=1, i=1,…,400

Γραμμή 21, L(21)
M =400
S_i=4, i=1,…,150
S_i=2, i=151,…,250
S_i=3, i=251,…,400
B_i= 2 i=1,…,399
μ_i=1, i=1,…,400

Γραμμή 22, L(22)
M =400
S_i=4, i=1,…,150
S_i=1, i=151,…,250
S_i=3, i=251,…,400
B_i= 2 i=1,…,399
μ_i=1, i=1,…,400

Γραμμή 23, L(23)
M =500
S_i=2, i=1,…,200
S_i=3, i=201,…,300
S_i=2, i=301,…,500
B_i= 2 i=1,…,499
μ_i=1, i=1,…,500

Γραμμή 24, L(24)
M =500
S_i=4, i=1,…,200
S_i=1, i=201,…,300
S_i=4, i=301,…,500
B_i= 2 i=1,…,499
μ_i=1, i=1,…,500

Γραμμή 25, L(25)
M =600
S_i=4, i=1,…,200
S_i=3, i=201,…,400
S_i=4, i=401,…,600
B_i= 3 i=1,…,599
μ_i=1, i=1,…,600

Γραμμή 26, L(26)
M =600
S_i=2, i=1,…,200
S_i=3, i=201,…,400
S_i=1, i=401,…,600
B_i= 2 i=1,…,599
μ_i=1, i=1,…,600

Γραμμή 27, L(27)
M =600
S_i=2, i=1,…,200
S_i=3, i=201,…,400
S_i=2, i=401,…,600
B_i= 2 i=1,…,599
μ_i=1, i=1,…,600

Γραμμή 28, L(28)
M =700
S_i=2, i=1,…,300
S_i=3, i=301,…,400
S_i=2, i=401,…,700
B_i= 2 i=1,…,699
μ_i=1, i=1,…,700

Γραμμή 29, L(29)
M =700
S_i=4, i=1,…,300
S_i=3, i=301,…,400
S_i=4, i=401,…,700
B_i= 3 i=1,…,699
μ_i=1, i=1,…,700

Γραμμή 30, L(30)
M =700
S_i=2, i=1,…,300
S_i=3, i=301,…,400
S_i=1, i=401,…,700
B_i= 2 i=1,…,699
μ_i=1, i=1,…,700

Γραμμή 31, L(31)
M =800
S_i=2, i=1,…,300
S_i=3, i=301,…,500
S_i=2, i=501,…,800
B_i= 2 i=1,…,799
μ_i=1, i=1,…,800

Γραμμή 32, L(32)
M =800
S_i=4, i=1,…,300
S_i=3, i=301,…,500
S_i=4, i=501,…,800
B_i= 3 i=1,…,799
μ_i=1, i=1,…,800

Γραμμή 33, L(33)
M =800
S_i=3, i=1,…,100
S_i=2, i=101,…,200
S_i=1, i=201,…,300
S_i=2, i=301,…,400
S_i=3, i=401,…,500
S_i=1, i=501,…,600
S_i=3, i=601,…,700
S_i=2, i=701,…,600
B_i= 2 i=1,…,799
μ_i=1, i=1,…,800

Γραμμή 34, L(34)
M =900
S_i=2, i=1,…,400
S_i=3, i=401,…,500
S_i=2, i=501,…,900
B_i= 2 i=1,…,899
μ_i=1, i=1,…,900

Γραμμή 35, L(35)
M =900
S_i=4, i=1,…,400
S_i=3, i=401,…,500
S_i=4, i=501,…,900
B_i= 3 i=1,…,899
μ_i=1, i=1,…,900

Γραμμή 36, L(36)
M =900
S_i=2, i=1,…,400
S_i=3, i=401,…,500
S_i=1, i=501,…,900
B_i= 2 i=1,…,899
μ_i=1, i=1,…,900

Γραμμή 37, L(37)
M =1000
S_i=2, i=1,…,400
S_i=3, i=401,…,600
S_i=2, i=601,…,1000
B_i= 2 i=1,…,999
μ_i=1, i=1,…,1000

Γραμμή 38, L(38)
M =1000
S_i=4, i=1,…,400
S_i=3, i=401,…,600
S_i=4, i=601,…,1000
B_i= 3 i=1,…,999
μ_i=1, i=1,…,1000

Γραμμή 39, L(39)
M =1000
S_i=2, i=1,…,400
S_i=3, i=401,…,600
S_i=1, i=601,…,1000
B_i= 2 i=1,…,999
μ_i=1, i=1,…,1000

Γραμμή 40, L(40)
M =200
S_i=3, i=1,…,50
S_i=2, i=51,…,100
S_i=4, i=101,…,150
S_i=1, i=151,…,200
B_i= 2 i=1,…,199
μ_i=1, i=1,…,200

Γραμμή 41, L(41)
M =300
S_i=3, i=1,…,50
S_i=1, i=51,…,100
S_i=4, i=101,…,150
S_i=2, i=151,…,200
S_i=3, i=201,…,300
B_i= 3 i=1,…,299
μ_i=1, i=1,…,300

Γραμμή 42, L(42)
M =400
S_i=2, i=1,…,100
S_i=3, i=101,…,200
S_i=4, i=201,…,300
S_i=1, i=301,…,400
B_i= 2 i=1,…,399
μ_i=1, i=1,…,400

Γραμμή 43, L(43)
M =500
S_i=3, i=1,…,150
S_i=4, i=151,…,300
S_i=2, i=301,…,500
B_i= 3 i=1,…,499
μ_i=1, i=1,…,500

Γραμμή 44, L(44)
M =600
S_i=2, i=1,…,200
S_i=4, i=201,…,400
S_i=3, i=401,…,600
B_i= 2 i=1,…,599
μ_i=1, i=1,…,600

Γραμμή 45, L(45)
M =700
S_i=4, i=1,…,250
S_i=2, i=251,…,450
S_i=4, i=451,…,700
B_i= 3 i=1,…,699
μ_i=1, i=1,…,700

Γραμμή 46, L(46)
M =800
S_i=4, i=1,…,200
S_i=3, i=201,…,400
S_i=2, i=401,…,600
S_i=3, i=601,…,800
B_i= 3 i=1,…,799
μ_i=1, i=1,…,800

Γραμμή 47, L(47)
M =1000
S_i=4, i=1,…,200
S_i=3, i=201,…,400
S_i=4, i=401,…,600
S_i=3, i=601,…,800
S_i=4, i=801,…,1000
B_i= 3 i=1,…,999
μ_i=1, i=1,…,1000

Στον πίνακα 32 παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για τις γραμμές L(i), i=1,…,14, ενώ στον πίνακα 33, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για τις γραμμές L(i), i=15,…,47 των οποίων οι παράμετροι δόθηκαν προηγουμένως.

Και στους δυο αυτούς πίνακες στη πρώτη στήλη δίνεται το όνομα της υπό εξέταση γραμμής L(i), ενώ στη δεύτερη στήλη παρουσιάζεται η εκτίμηση της απόδοσης που προκύπτει από το μοντέλο της προσομοίωσης (PR_{sim}). Η τρίτη στήλη παρουσιάζει την εκτίμηση της απόδοσης που προκύπτει από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου (PR_{DECO}), ενώ στην τέταρτη στήλη παρουσιάζεται η επί τοις εκατό

απόκλιση της εκτίμησης της απόδοσης από τη μέθοδο της αποσύνθεσης σε σύγκριση με την απόδοση που προκύπτει από τη χρήση της προσομοίωσης. Τέλος στην τελευταία στήλη παρουσιάζεται ο χρόνος που απαιτείται από τον προτεινόμενο αλγόριθμο για την εκτίμηση της απόδοσης. Η επί τοις εκατό απόκλιση υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη παρακάτω σχέση

$$\%\,Error = \frac{\left|PR_{DECO} - PR_{sim}\right|}{PR_{sim}}\, x100\%$$

Πίνακας 32: Εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με 10(10),…,100 σταθμούς εργασίας

Γραμμή L	PR_{sim}	PR_{DECO}	%ERROR	Time (seconds)
L(1)	1.5415	1.5423	0.0519	0.09
L(2)	2.3956	2.3808	0.6178	0.61
L(3)	2.3298	2.3216	0.3520	0.22
L(4)	1.3781	1.3702	0.5733	54.65
L(5)	0.6095	0.6036	0.9680	0.98
L(6)	1.4310	1.4383	0.5101	1.43
L(7)	1.3364	1.3412	0.3592	13.46
L(8)	1.2244	1.2145	0.8086	64.27
L(9)	1.3312	1.3390	0.5860	244.69
L(10)	1.3246	1.3366	0.9059	260.68
L(11)	2.4006	2.3801	0.8540	0.80
L(12)	2.3287	2.3207	0.3351	0.87
L(13)	1.3796	1.3699	0.7031	11.23
L(14)	0.6087	0.6036	0.8379	7.86

Πίνακας 33: Εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με 100(100),…,1000 σταθμούς εργασίας

Γραμμή L	PR_{sim}	PR_{DECO}	%ERROR	Time
L(15)	1.3133	1.3342	1.591	119.03
L(16)	1.3195	1.3355	1.213	403.12
L(17)	1.5264	1.5569	1.998	308.11
L(18)	1.6818	1.7151	1.980	259.31
L(19)	1.3104	1.3336	1.770	253.68
L(20)	1.5191	1.5557	2.409	301.96
L(21)	1.3137	1.3339	1.538	14.06
L(22)	0.5996	0.6004	0.133	10.234
L(23)	1.3084	1.3335	1.918	301.71
L(24)	0.5998	0.6004	0.100	14.65
L(25)	2.1792	2.2287	2.271	97.28
L(26)	0.5982	0.6000	0.301	35.09
L(27)	1.3077	1.3335	1.972	394.03
L(28)	1.3075	1.3334	1.981	466.00
L(29)	2.1836	2.2292	2.088	40.07
L(30)	0.5965	0.6000	0.587	73.45
L(31)	1.3072	1.3334	2.004	55.32
L(32)	2.1789	2.2287	2.285	132.40
L(33)	0.5992	0.6004	0.133	197.454
L(34)	1.3059	1.3334	2.106	681.00
L(35)	2.1807	2.2292	2.224	239.97
L(36)	0.5960	0.6000	0.671	622.58
L(37)	1.3065	1.3334	2.059	3533.25
L(38)	2.1757	2.2287	2.436	804.60
L(39)	0.5961	0.6000	0.654	721.55
L(40)	0.6042	0.6014	0.463	7.58
L(41)	0.6618	0.6678	0.907	15.05
L(42)	0.5994	0.6004	0.167	131.77
L(43)	1.3987	1.4287	2.145	369.16
L(44)	1.3082	1.3335	1.934	347.08
L(45)	1.3986	1.4287	2.152	361.09
L(46)	1.3973	1.4287	2.247	571.55
L(47)	2.1770	2.2287	2.375	3841.00

Τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους πίνακες 32 και 33 μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο προτεινόμενος αλγόριθμος εκτιμά την απόδοση γραμμών παραγωγής με παράλληλες μηχανές σε κάθε σταθμό εργασίας με πολύ μεγάλη ακρίβεια.

Κοιτάζοντας αναλυτικά τα αποτελέσματα στους πίνακες αυτούς, παρατηρούμε ότι η επί τοις εκατό απόκλιση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τη μέθοδο της αποσύνθεσης σε σύγκριση με εκείνα της προσομοίωσης δεν ξεπερνούν σε καμιά περίπτωση το 2,5%.

Ο χρόνος που απαιτείται από τον προτεινόμενο αλγόριθμο για την εκτίμηση της απόδοσης είναι αρκετά μικρός για όλες τις περιπτώσεις. Αν δούμε το χρόνο που απαιτείται από τον προτεινόμενο αλγόριθμο για τη γραμμή L(46) η οποία αποτελείται

από 800 σταθμούς διαπιστώνουμε ότι απαιτούνται λιγότερο από 10 λεπτά για την εκτίμηση της απόδοσης μιας τόσο μεγάλης γραμμής.
Ένα πολύ σημαντικό στοιχείο του αλγόριθμου που πρέπει να σημειωθεί είναι ότι ο αλγόριθμος εφαρμόστηκε σε πολλές ακόμη γραμμές παραγωγής και δεν βρέθηκε κανένα παράδειγμα για το οποίο ο αλγόριθμος να μην συγκλίνει.

5.18 Συμπεράσματα και περαιτέρω έρευνα

Στο κεφάλαιο αυτό ασχοληθήκαμε με την ανάλυση σειριακών συστημάτων σαν και αυτό του σχήματος 22 στα οποία κάθε σταθμός εργασίας αποτελείται από παράλληλες μηχανές επεξεργασίας.

Η ανάλυση των συστημάτων αυτών έγινε τροποποιώντας την κλασσική μέθοδο της αποσύνθεσης που παρουσιάστηκε από τον Gershwin (1987) και εφαρμόστηκε αρχικά σε σειριακά συστήματα στα οποία κάθε σταθμός εργασίας αποτελείται από μόνο μια μηχανή επεξεργασίας.
Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετοί ερευνητές όπως οι Ancelin και Semery (1987), Burman (1995), Jeong και Kim (1999) και Patchong και Willaeys (2001), οι οποίοι ασχολήθηκαν με την ανάλυση παρόμοιων συστημάτων χρησιμοποιώντας διάφορες τεχνικές αντικατάστασης. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σταθμός εργασίας με παράλληλες μηχανές επεξεργασίας αντικαθίσταται από ένα ισοδύναμο σταθμό εργασίας ο οποίος αποτελείται από μόνο μια μηχανή επεξεργασίας. Με τον τρόπο αυτό μια γραμμή παραγωγής με σταθμούς εργασίας που αποτελούνται από παράλληλους εξυπηρετητές σαν και αυτή του σχήματος 22, μετατρέπεται σε μια ισοδύναμη σειριακή γραμμή παραγωγής όπου κάθε σταθμός εργασίας αποτελείται από ένα μόνο εξυπηρετητή. Στη συνέχεια η ισοδύναμη αυτή γραμμή αναλύεται χρησιμοποιώντας την κλασσική μέθοδο της αποσύνθεσης Gershwin (1987).
Στο κεφάλαιο αυτό η συνεισφορά της εργασίας είναι ότι η μέθοδος της αποσύνθεσης επεκτείνεται και εφαρμόζεται απευθείας στη γραμμή παραγωγής χωρίς να χρησιμοποιείται καμία τεχνική αντικατάστασης όπως γίνεται στις παραπάνω μελέτες.
Στη διεθνή βιβλιογραφία δεν έχουμε βρει καμιά εργασία στην οποία να επιχειρείται απευθείας εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης σε γραμμές παραγωγής με παράλληλους εξυπηρετητές ανά σταθμό εργασίας.
Ο τρόπος με τον οποίο έγινε η απευθείας εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης είναι ο εξής:
Αρχικά αναλύθηκε το δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης του σχήματος 24 το οποίο αποτελείται από δυο σταθμούς εργασίας με παράλληλους εξυπηρετητές και έναν ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο. Η ανάλυση του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης γίνεται χρησιμοποιώντας Μαρκοβιανή Αλυσίδα. Δημιουργήθηκαν αναλυτικά όλες οι εξισώσεις μετάβασης του συστήματος του σχήματος 24 για οποιαδήποτε τιμή N της χωρητικότητάς του, που περιγράφουν την πιθανότητα μετάβασης του συστήματος από μια κατάσταση σε μια άλλη. Στη συνέχεια κατασκευάστηκε ένας αλγόριθμος ο οποίος γεννά τον πίνακα μετάβασης για οποιαδήποτε τιμή N της χωρητικότητας του συστήματος και ο αλγόριθμος αυτός προγραμματίστηκε στη γλώσσα προγραμματισμού C++.
Η επίλυση των εξισώσεων που προέκυψαν από την εφαρμογή του αλγόριθμου με σκοπό τον υπολογισμό της απόδοσης του συστήματος αυτού έγινε με χρήση της μεθόδου απαλοιφής του Gauss.
Για λόγους σύγκρισης ένα μοντέλο προσομοίωσης δημιουργήθηκε στο πρόγραμμα προσομοίωσης ARENA 3.0. Τα αποτελέσματα συγκρινόμενα με αυτά της

προσομοίωσης, πιστοποιούν ότι ο προτεινόμενος αλγόριθμος για τον υπολογισμό της απόδοσης του συστήματος του σχήματος 24 εκτιμά την απόδοση με μεγάλη ακρίβεια.

Μετά τον υπολογισμό της απόδοσης του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης του σχήματος 24, αναπτύχθηκαν οι εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης. Οι εξισώσεις αυτές μοιάζουν με εκείνες που παρουσιάστηκαν από τον Gershwin (1987) για σειριακά συστήματα στα οποία κάθε σταθμός εργασίας αποτελείται από μόνο μια μηχανή επεξεργασίας.

Μετά τη δημιουργία των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης παρουσιάστηκε ένας αλγόριθμος ο οποίος χρησιμοποιείται για την ταυτόχρονη επίλυση όλων των εξισώσεων αυτών με σκοπό την εκτίμηση της απόδοσης μεγάλων γραμμών παραγωγής με παράλληλες μηχανές ανά σταθμό εργασίας. Ο αλγόριθμος αυτός προγραμματίστηκε στη γλώσσα προγραμματισμού C++ και εφαρμόστηκε σε μια μεγάλη ποικιλία συστημάτων για να διαπιστωθεί η αποτελεσματικότητά του.
Για το λόγο αυτό ο προτεινόμενος αλγόριθμος εφαρμόστηκε σε δυο βασικές κατηγορίες γραμμών. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει μικρές γραμμές παραγωγής που αποτελούνται μέχρι και επτά σταθμούς εργασίας ενώ η δεύτερη κατηγορία αποτελείται από μεγάλες γραμμές παραγωγής ξεκινώντας από 10 σταθμούς εργασίας και φτάνοντας μέχρι και 1000 σταθμούς εργασίας.
Για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων της πρώτης κατηγορίας γραμμών χρησιμοποιήθηκαν αποτελέσματα που παρουσιάζονται σε εργασίες άλλων ερευνητών, ενώ για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων της δεύτερης κατηγορίας γραμμών παραγωγής χρησιμοποιείται ένα μοντέλο προσομοίωσης που αναπτύχθηκε στο πρόγραμμα προσομοίωσης eM-plant.
Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται και για τις δυο κατηγορίες γραμμών παραγωγής δείχνουν ότι ο αλγόριθμος λειτουργεί γρήγορα και προσδιορίζει την απόδοση των συστημάτων με αρκετά μεγάλη ακρίβεια. Αξίζει να σημειωθεί ότι η απόκλιση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την εφαρμογή του αλγόριθμου σε σύγκριση με τα αποτελέσματα άλλων ερευνητών ή αυτών της προσομοίωσης δεν ξεπερνά το 2,5% ακόμη και για πολύ μεγάλες γραμμές (π.χ. με χίλιους σταθμούς εργασίας).

Πιθανές περιοχές περαιτέρω έρευνας είναι οι εξής :

- Επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό ώστε να είναι δυνατή η μοντελοποίηση συστημάτων σαν και αυτό του σχήματος 22 στα οποία όμως οι μηχανές θα είναι μη αξιόπιστες (θα υπόκεινται σε βλάβες).

- Επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης, τροποποιώντας τις εξισώσεις και τον αλγόριθμο της αποσύνθεσης που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό σε συστήματα στα οποία οι χρόνοι επεξεργασίας των μηχανών θα ακολουθούν και άλλες κατανομές πιθανοτήτων.

- Επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό ώστε να είναι δυνατή η μοντελοποίηση συστημάτων σαν και αυτό του σχήματος 22 στα οποία όμως θα υπάρχει η δυνατότητα παραγωγής δυο η και περισσότερων τύπου προϊόντων.

- Επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό ώστε να είναι δυνατή η μοντελοποίηση συστημάτων σαν και αυτό του σχήματος 22 στα οποία θα υπάρχουν εργασίες συγχώνευσης ή και διάσπασης.

Βιβλιογραφία

[1] Altiok, T. (1997), *Performance Analysis of Manufacturing Systems*, New York: Springer.

[2] Ancelin, B. and Semery, A. (1987), ``Calcul de la productivité d'une ligne intégrée de fabrication: CALIF, une méthode analytique industrielle*'', RAIRO APII*, 21(3), pp. 209--238.

[3] Burman, Mitchell H. (1995), *New Results in Flow Line Analysis*, Ph.D. Thesis, Operations Research Center, Massachusetts Institute of Technology, USA.

[4] Buzacott, J.A. and Shanthikumar , J.G. (1993), *Stochastic models of manufacturing systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[5] Cheah, Jen.Yeng and J.MacGregor, Smith. (1994), "Generalized M/G/C/C state dependent queueing models and pedestrian traffic flows", *Queueing Systems*, 15, pp. 365-386.

[6] Colledani, M., Matta, A. and Tolio, T. (2003), ‘‘Performance evaluation of production lines with finite buffer capacity producing two different products’’, Proceedings of the Fourth Aegean International Conference on "Analysis of manufacturing systems" 1-4 July 2003, Samos Island, Greece, pp. 231—240.

[7] Dallery, Y., David, R. and Xie, X. (1988), "An efficient algorithm for the analysis of transfer lines with unreliable machines and finite buffers", *IIE Transactions,* 20(3), pp. 280–283.

[8] Dallery, Y., and Gershwin, S.B. (1992), "Manufacturing flow line systems: A review of models and analytical results", *Queueing Systems Theory and Applications*, 12, 3–94: Special issue on queuing models of manufacturing systems.

[9] Diamantidis, A.C., Papadopoulos, C.T., and Vidalis, M.I., (2004), "Exact analysis of a discrete material three station one buffer merge system with unreliable machines", *International Journal of Production Research,*42(4), pp. 651—675.

[10] Di Mascolo, M., David, R., and Dallery, Y., (1991), "Modeling and Analysis of assembly systemswith unreliable machines and finite buffers", *IIE Transactions*, 23(4), pp. 315–331.

[11] Dubois, D. and Forestier, J.P. (1982), ‘’Productivité et en-cours moyens d'un ensemble de deux machines se parées par une zone de stockage’’, *RAIRO Automatique*, 16(2), pp. 105--132

[12] Forestier, J.P. (1980), ``Modélisation stochastique et comportement asymptotique d’un système automatise de production’’, *RAIRO Automatique,* 14(2), pp. 127--143.

[13] Friedman, Henry.D. (1963), “Reduction methods for tandem queuing systems”, *Tandem Queuing Systems*, pp.121-131.

[14] Futamura, K. (2000), “The multiple server effect: Optimal allocation of servers to stations with different service – time distributions in tandem queuing networks”, *Annals of Operations Research*, 93, pp. 71–90.

[15] Gershwin, S.B. (1987), “An efficient decomposition algorithm for the approximate evaluation of tandem queues with finite storage space and blocking”, *Operations Research,* 35, pp. 291–305.

[16] Gershwin S. B., (1991), “Assembly/disassembly systems: An efficient decomposition Algorithm for tree structured networks”, *IIE Transactions,* 23(4), pp. 302–314.

[17] Gershwin, S.B. (1994), *Manufacturing Systems Engineering,* Englewood Cliffs, Prentice Hall.

[18] Gershwin, S.B., Maggio, N., Matta, A., Tolio, T. and Werner, L. (2001), *“*Analysis of Loop Networks by decomposition”, Proceedings of the Third Aegean International Conference on Analysis and Modeling of Manufacturing Systems, May 19-22, Tinos Island, Greece, pp. 239–248.

[19] Gosavi, Hemant. D. and J.MacGregor, Smith. (1995), “Asymptotic bounds of throughput in series-parallel queueing networks”, *Computers Ops Res.,* Vol 22, No 10, pp. 1057--1073.

[20] Helber, S., (1998), “Decomposition of unreliable assembly/disassembly networks with limited buffer capacity and random processing times”, *European Journal of Operational Research*, 109, pp. 24–42.

[21] Helber, S. (1999), *Performance Analysis of Flow-Lines with Nonlinear Flow of Material, Volume,* 473 of Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag.

[22] Helber, S. and Mehrtens, N. (1999), “Exact analysis of a continuous material merge system with limited buffer capacity and three stations”, Technical Report, D-38678, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

[23] Helber, S. and Jusic, H. (2002), “A new decomposition approach for non-cyclic continuous material flow lines with a merging flow of material”, Technical Report, Clausthal-Zellerfeld, Germany

[24] Hillier, F.S. and Boling, R.W. (1967), ``Finite queues in series, with exponential or Erlang service times -- a numerical approach", *Operations Research*, 15, pp. 286—303.

[25] Hillier, Frederick S. and So, Kut C. (1989), "The Assignment of Extra Servers to Stations in Tandem Queueing Systems with Small or No Buffer", *Performance Evaluation,* 10, pp. 219-231.

[26] Hillier, Frederick.S.and So, Kut.C (1995), "On the optimal design of tandem queueing systems with finite buffers", *Queueing Systems* 21, pp. 245-266.

[27] Hillier, Frederick S. and So, Kut C. (1996), "On the simultaneous optimization of server and work allocations in production line systems with variable processing times", *Operations Research*, Vol. 44, No. 3, pp. 435-443.

[28] Iyama, Toshirou and Ito, Seigo. (1987), "The maximum production rate for an unbalanced multi-server flow line with finite buffer storage", *International Journal of Production Research*, Vol. 25, No. 8, pp. 1157-1170

[29] Jain, Sushant and J.MacGregor, Smith. (1994), "Open finite queueing networks with M/M/C/K parallel servers", *Computers Ops Res.,* Vol 21, No 3, pp. 297—317.

[30] Jeong, K.C. and Kim, D. (1999), "An approximation method for performance analysis of assembly/disassembly systems with parallel – machine stations", *IIE Transactions* 31, pp. 391–394.

[31] Kerbache, L. and Smith, J.M. (1987), "The Generalized expansion method for open finite queueing networks", *European Journal of Operational Research,* 32, pp. 448–461.

[32] Lim, J.-T., Meerkov, S.M. and Top, F. (1990), "Homogeneous, asymptotically reliable serial production lines: Theory and a case study'', *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 5, pp. 525—533.

[33] Magazine, M.J. and Stecke, K.E. (1996), "Throughput for production lines with serial workstations and parallel service facilities", *Performance Evaluation*, 25, pp. 211–232.

[34] Nemec, Joseph E., February, (1999), "Diffusion and Decomposition Approximations of Stochastic Models of Multiclass Processing Networks", Ph.D. Thesis, Operations Research Center, M.I.T., USA

[35] Nico M. van Dijk and Jan van der Wal. (1989), "Simple bounds and monotonicity results for finite multi-server exponential tandem queues", *Queuing Systems,* 4, pp. 1-16.

[36] Papadopoulos, H.T., Heavey, C. and O'Kelly, M.E.J. (1989), "The throughput rate of multistation reliable production lines with interstation buffers: (I) Exponential case '', *Computers in Industry,* 13, pp. 229–244.

[37] Papadopoulos, H. T., Heavey, C., and Browne, J., (1993), *Queueing Theory in Manufacturing Systems Analysis and Design*. (Chapman & Hall, London).

[38] Papadopoulos, H. T., and O'Kelly, M. E. J., (1989), "A Recursive algorithm for generating the transition matrices of multistation series production lines", *Computers in Industry,* 12, pp. 227–240

[39] Patchong, A. and Willaeys, D. (2001), "Modelling and analysis of an unreliable flow line composed parallel – machine stages", *IIE Transactions*, 33, pp. 559–568.

[40] Perros, G. Harry (1994), *Queueing Networks with Blocking – Exact and Approximate Solutions*, Oxford University Press, New York.

[41] Spinellis, D., Papadopoulos, C. and Smith, J. Macgregor (2000), "Large production line optimisation using simulated annealing", *International Journal of Production Research*, 38, pp. 509–541.

[42] Tan, B. (2001), "A three station merge system with unreliable stations and a shared buffer", *Mathematical and Computer Modelling*, 33, pp. 1011–1026.

[43] Tan, B. and Yeralan, S. (1997), "Analysis of multistation production systems with limited buffer capacity, Part II", *Mathematical and Computer Modelling*, 25(11), pp. 109–123.

[44] Tempelmeier, H. Burger, M. (2001), "Performance evaluation of unbalanced flow lines with general distributed processing times, failures and imperfect production'', *IIE Transactions 33*, pp. 293-302.

[45] Tolio, T. and Matta, A.(1998), "A method for performance evaluation of automated flow lines", *Annals of the CIRP*, 47.

[46] Vidalis, M.I. and Papadopoulos, H.T. (2000),"A recursive algorithm for Generating the transition matrices of multistation multiserver exponential reliable queuing networks", *Computers and Operations Research,* 28, 853--883.

[47] Yeralan, S. and Tan, B. (1997), "Analysis of multistation production systems with limited buffer capacity, Part I", *Mathematical and Computer Modelling*, 25(7), 109–122.

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΗ:

Diamantidis, A.C., Papadopoulos, C.T., and Heavey, Cathal.," Approximate analysis of serial flow lines with multiple parallel machine stations", *IIE Transactions*.
(το άρθρο αυτό έχει γίνει δεκτό προς δημοσίευση)

Γενικά συμπεράσματα και συνεισφορά της εργασίας

Η εργασία αυτή ασχολήθηκε με την ανάλυση τριών διαφορετικών βιομηχανικών συστημάτων.
Στο κεφάλαιο 3 έγινε ανάλυση βιομηχανικών συστημάτων στα οποία παρουσιάζονται εργασίες συγχώνευσης (merge operations) και παράγονται ενός μόνο τύπου προϊόντα. Η ανάλυση αυτής της κατηγορίας βιομηχανικών συστημάτων με σκοπό την εκτίμηση της απόδοσής τους έγινε επεκτείνοντας την κλασσική μέθοδο της αποσύνθεσης (decomposition method) που αρχικά προτάθηκε το 1987 από τον Gershwin για την ανάλυση απλών σειριακών γραμμών παραγωγής.
Για να γίνει εφικτή η επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης ώστε να είναι εφαρμόσιμη σε συστήματα σαν και αυτά που εξετάζονται στο κεφαλαίο 3, πραγματοποιήθηκαν δυο βασικές τροποποιήσεις της μεθόδου αυτής οι οποίες αποτελούν και τη συνεισφορά της εργασίας στο συγκεκριμένο κεφάλαιο:
Η πρώτη τροποποίηση αφορά στην εισαγωγή ενός νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης που μοντελοποιεί τις εργασίες συγχώνευσης και απεικονίζεται στο σχήμα 5, το οποίο χρησιμοποιείται παράλληλα με το κλασσικό δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης (σχήμα 11). Αυτό το νέο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης επιλύθηκε με χρήση Μαρκοβιανής Αλυσίδας. Αρχικά δημιουργήθηκαν όλες οι εξισώσεις μετάβασης που περιγράφουν την μετάβαση του συστήματος αυτού από μια κατάσταση σε μια άλλη, ενώ στη συνέχεια δημιουργήθηκε ένας αλγόριθμος που γεννά τον πίνακα μετάβασης ο οποίος χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της απόδοσης του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης.
Για την επιβεβαίωση της ορθότητας της ανάλυσης αυτής παρουσιάσθηκαν επίσης αριθμητικά αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγόριθμου, τα οποία συγκρίθηκαν με αποτελέσματα που λήφθηκαν από την προσομοίωση του συστήματος αυτού.
Η δεύτερη τροποποίηση αφορά στις εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης.
Πιο συγκεκριμένα λόγω της εισαγωγής του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης του σχήματος 5 και της ταυτόχρονης χρήσης του με το κλασσικό δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης του σχήματος 11, οι εξισώσεις της κλασσικής μεθόδου της αποσύνθεσης τροποποιήθηκαν ώστε να γίνει δυνατή η ενσωμάτωση του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης που μοντελοποιεί την ύπαρξη των εργασιών συγχώνευσης.
Οι νέες τροποποιημένες εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης των οποίων η μαθηματική μορφή και οι αναλυτικές αποδείξεις τους παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 3, διαφέρουν αρκετά από τις εξισώσεις της κλασσικής μεθόδου που δόθηκαν από τον Gershwin το 1987. Επίσης, κατασκευάστηκε και παρουσιάστηκε ο αλγόριθμος της μεθόδου της αποσύνθεσης που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ταυτόχρονη επίλυση όλων των εξισώσεων αυτών με σκοπό την εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με εργασίες συγχώνευσης.
Η επίλυση του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης, μαζί με τη δημιουργία των νέων εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης για την ανάλυση βιομηχανικών συστημάτων με εργασίες συγχώνευσης και παραγωγή ενός μόνο τύπου προϊόντων συνιστούν τη συνεισφορά της εργασίας σχετικά με το θέμα που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3.

Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάσθηκε η ανάλυση γραμμών παραγωγής των οποίων η γραφική απεικόνιση είναι ίδια με τη γραφική απεικόνιση των συστημάτων που εξετάζονται στο κεφάλαιο 3 (δηλαδή γίνονται εργασίες συγχώνευσης). Η ουσιώδης διαφορά μεταξύ των συστημάτων που εξετάστηκαν στο κεφάλαιο 4 από εκείνα που εξετάστηκαν στο κεφάλαιο 3, είναι ότι στα συστήματα του κεφαλαίου 4 υπάρχει η δυνατότητα παραγωγής δυο διαφορετικών τύπων προϊόντων.

Η ανάλυση αυτής της κατηγορίας βιομηχανικών συστημάτων με σκοπό την εκτίμηση της απόδοσής τους έγινε επεκτείνοντας την μέθοδο της αποσύνθεσης (decomposition method) που παρουσιάστηκε από τον Nemec (1999) για την ανάλυση απλών σειριακών γραμμών παραγωγής στις οποίες υπάρχει η δυνατότητα παραγωγής δυο διαφορετικών τύπων προϊόντων.
Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν ελάχιστες εργασίες οι οποίες ασχολούνται με την ανάλυση σειριακών μόνο συστημάτων στα οποία παράγονται περισσότερα του ενός τύπου προϊόντα.
Η επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης που παρουσιάστηκε από τον Nemec (1999) ώστε να είναι εφαρμόσιμη σε συστήματα σαν και αυτά που εξετάζονται στο κεφαλαίου 4 αποτελεί τη συνεισφορά της εργασίας και έγινε εισάγοντας ένα νέο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης που μοντελοποιεί τις εργασίες συγχώνευσης και την ύπαρξη δυο τύπων προϊόντων και το οποίο απεικονίζεται στο σχήμα 21. Το νέο αυτό δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης χρησιμοποιήθηκε παράλληλα με το κλασσικό δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιήθηκε από τον Nemec (1999). Η ύπαρξη δυο τύπων προϊόντων μοντελοποιήθηκε υποθέτοντας ότι οι μηχανές του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης μπορούν να παρουσιάσουν βλάβη όχι μόνο όταν βρίσκονται σε λειτουργία, αλλά ακόμη και όταν είναι αδρανείς **(βλάβες αδράνειας)**. Η ύπαρξη των βλαβών αδράνειας είναι και η βασική διαφορά του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης του σχήματος 21 που χρησιμοποιήθηκε στο κεφάλαιο 4 με εκείνο του σχήματος 5 που χρησιμοποιήθηκε στο κεφάλαιο 3.
Αυτό το νέο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης επιλύθηκε χρησιμοποιώντας Μαρκοβιανή Αλυσίδα. Αρχικά δημιουργήθηκαν όλες οι εξισώσεις μετάβασης που περιγράφουν την μετάβαση του συστήματος αυτού από μια κατάσταση σε μια άλλη, ενώ στη συνέχεια δημιουργήθηκε ένας αλγόριθμος ο οποίος γεννά τον πίνακα μετάβασης και χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της απόδοσης του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης.
Για την επιβεβαίωση της ορθότητας της ανάλυσης αυτής παρουσιάστηκαν αριθμητικά αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγόριθμου, τα οποία συγκρίθηκαν με αποτελέσματα που λήφθηκαν από την προσομοίωση του συστήματος αυτού.
Λόγω της εισαγωγής του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης του σχήματος 21 και της ταυτόχρονης χρήσης του με το κλασσικό δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης που χρησιμοποιείται από τον Nemec, οι εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης τροποποιήθηκαν ώστε να ενσωματώσουν το νέο δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης που μοντελοποιεί την ύπαρξη των εργασιών συγχώνευσης. Οι νέες τροποποιημένες εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης διαφέρουν αρκετά από τις εξισώσεις που παρουσιάζονται από τον Nemec (1999). Η μαθηματική μορφή των εξισώσεων αυτών καθώς και οι αναλυτικές αποδείξεις τους παρουσιάζονται στο παράρτημα Γ.

Τέλος παρουσιάστηκε και ο αλγόριθμος της μεθόδου της αποσύνθεσης που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ταυτόχρονη επίλυση όλων των εξισώσεων αυτών με σκοπό την εκτίμηση της απόδοσης αυτής της κατηγορίας γραμμών παραγωγής.
Η επίλυση του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης, μαζί με τη δημιουργία των νέων εξισώσεων για την επέκταση της μεθόδου της αποσύνθεσης ώστε να είναι εφαρμόσιμη στην ανάλυση βιομηχανικών συστημάτων με εργασίες συγχώνευσης και παραγωγή δυο τύπων προϊόντων συνιστούν την συνεισφορά της διατριβής στο κεφάλαιο 4.

Στο κεφάλαιο 5 αναλύθηκε μια άλλη κατηγορία σειριακών γραμμών παραγωγής στις οποίες κάθε σταθμός εργασίας αποτελείται από παράλληλες μηχανές επεξεργασίας.
Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές εργασίες ερευνητών οι οποίες ασχολήθηκαν με την ανάλυση αυτής της κατηγορίας γραμμών παραγωγής χρησιμοποιώντας διάφορες τεχνικές αντικατάστασης (replacement techniques). Σύμφωνα με τις τεχνικές αυτές κάθε σταθμός εργασίας που αποτελείται από παράλληλες μηχανές επεξεργασίας αντικαθίστανται από ένα ισοδύναμο σταθμό εργασίας που αποτελείται από μόνο μια μηχανή επεξεργασίας και στη συνέχεια το ισοδύναμο σύστημα αναλύεται σαν μια απλή σειριακή γραμμή παραγωγής στην οποία κάθε σταθμός εργασίας αποτελείται από μόνο μια μηχανή επεξεργασίας.

Η συνεισφορά της εργασίας στο κεφάλαιο 5 είναι η επέκταση και η απευθείας εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης για την εκτίμηση της απόδοσης γραμμών παραγωγής με παράλληλες μηχανές επεξεργασίας σε κάθε σταθμό εργασίας χωρίς τη χρήση καμιάς τεχνικής αντικατάστασης αλλά με άμεση ανάπτυξη των σχετικών εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης. Στη διεθνή βιβλιογραφία δεν έχει υποπέσει στην αντίληψή μας καμιά άλλη εργασία στην οποία να γίνεται απευθείας εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης χωρίς να χρησιμοποιείται κάποια τεχνική αντικατάστασης.
Για την εφαρμογή της μεθόδου της αποσύνθεσης σε αυτή τη κατηγορία γραμμών παραγωγής, εισάγεται ένα σύστημα που αποτελείται από δυο σταθμούς εργασίας με παράλληλες μηχανές επεξεργασίας και ένα ενδιάμεσο αποθηκευτικό χώρο σαν και αυτό του σχήματος 24 που χρησιμοποιήθηκε σαν δομικό στοιχείο της μεθόδου της αποσύνθεσης.
Το σύστημα αυτό επιλύθηκε με χρήση Μαρκοβιανής Αλυσίδας δημιουργώντας αρχικά όλες τις εξισώσεις μετάβασης που περιγράφουν την μετάβαση του συστήματος αυτού από μια κατάσταση σε μια άλλη, ενώ στη συνέχεια κατασκευάστηκε ένας αλγόριθμος ο οποίος γεννά τον πίνακα μετάβασης και χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της απόδοσης του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης.
Για την επιβεβαίωση της ορθότητας της ανάλυσης του δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου, τα οποία συγκρίνονται με αποτελέσματα που λαμβάνονται από την προσομοίωση του συστήματος αυτού.
Μετά την ανάλυση του νέου δομικού στοιχείου της μεθόδου της αποσύνθεσης παρουσιάστηκαν οι εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης οι οποίες μοιάζουν αρκετά με της εξισώσεις της κλασσικής μεθόδου της αποσύνθεσης που αναπτύχθηκαν από τον Gershwin (1987) για σειριακά συστήματα στα οποία κάθε σταθμός εργασίας αποτελείτο από μόνο μια μηχανή επεξεργασίας. Επίσης παρουσιάστηκε και ο αλγόριθμος της μεθόδου της αποσύνθεσης ο οποίος επιλύει

ταυτόχρονα τις εξισώσεις της μεθόδου της αποσύνθεσης και χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της απόδοσης αυτών των γραμμών παραγωγής.
Για την αξιολόγηση του προτεινόμενου αλγόριθμου της μεθόδου της αποσύνθεσης, παρουσιάστηκαν αρκετά αριθμητικά αποτελέσματα από την εφαρμογή του σε γραμμές παραγωγής που αποτελούνται από τέσσερις έως και χίλιους σταθμούς εργασίας και των οποίων οι παράμετροι που προσδιορίζουν τον τρόπο λειτουργίας τους ποικίλουν. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή του αλγόριθμου συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν σε άλλες εργασίες ερευνητών καθώς επίσης και με αποτελέσματα που προέκυψαν από την μέθοδο της προσομοίωσης.
Από την εξέταση όλων των αριθμητικών αποτελεσμάτων τόσο για μικρές όσο και για πολύ μεγάλες γραμμές παραγωγής, προέκυψε ότι ο προτεινόμενος αλγόριθμος υπολογίζει γρήγορα και με αρκετά μεγάλη ακρίβεια (η μέγιστη απόκλιση που παρατηρήθηκε σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν ήταν 2.5%) την απόδοση συστημάτων με σταθμούς εργασίας που αποτελούνται από παράλληλες μηχανές επεξεργασίας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΟΙ ΥΠΟΠΙΝΑΚΕΣ $S_{i,5}S_{j,5}$,i,j = 0,1,2,3,4,5 ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ P_5 ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

Οι υποπίνακες $S_{i,5}S_{j,5}$,i,j = 0,1,2,3,4,5 του πίνακα μετάβασης P_5 (πίνακας 1) του κεφαλαίου 3 έχουν την ακόλουθη μορφή.

Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{0,5}$ είναι ένας (4 x 4) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {0, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {0, a_1, a_2, a_3 }. Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{0,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή:

Πίνακας Α1: Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{0,5}$

States	(0,0,0,1)	(0,0,1,1)	(0,1,0,1)	(0,1,1,1)
(0,0,0,1)	$(1-r_1)(1-r_2)$	0	0	0
(0,0,1,1)	$(1-r_1)p_2$	0	0	0
(0,1,0,1)	$p_1(1-r_2)$	0	0	0
(0,1,1,1)	p_1p_2	0	0	0

Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{1,5}$ είναι ένας (4 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {0, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {1, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{1,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή:

Πίνακας A2: Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{1,5}$

States	(1,0,0,0)	(1,0,0,1)	(1,0,1,0)	(1,0,1,1)	(1,1,0,0)	(1,1,0,1)	(1,1,1,0)	(1,1,1,1)
(0,0,0,1)	0	0	0	$(1-r_1)r_2$	0	$r_1(1-r_2)$	0	0
(0,0,1,1)	0	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)$	0	r_1p_2	0	0
(0,1,0,1)	0	0	0	p_1r_2	0	$(1-p_1)(1-r_2)$	0	0
(0,1,1,1)	0	0	0	$p_1(1-p_2)$	0	$(1-p_1)p_2$	0	0

Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{2,5}$ είναι ένας (4 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {0, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {2, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{2,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή:

Πίνακας A3: Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{2,5}$

States	(2,0,0,0)	(2,0,0,1)	(2,0,1,0)	(2,0,1,1)	(2,1,0,0)	(2,1,0,1)	(2,1,1,0)	(2,1,1,1)
(0,0,0,1)	0	0	0	0	0	0	0	r_1r_2
(0,0,1,1)	0	0	0	0	0	0	0	$r_1(1-p_2)$
(0,1,0,1)	0	0	0	0	0	0	0	$(1-p_1)r_2$
(0,1,1,1)	0	0	0	0	0	0	0	$(1-p_{1)}(1-p_2)$

$S_{0,5}S_{3,5} = S_{0,5}S_{4,5} = S_{0,5}S_{5,5} = 0$

Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{0,5}$ είναι ένας (8 x 4) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {1, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {0, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{0,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή:

Πίνακας A4: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{0,5}$

States	(0,0,0,1)	(0,0,1,1)	(0,1,0,1)	(0,1,1,1)
(1,0,0,0)	$(1-r_1)(1-r_2)r_3$	0	0	0
(1,0,0,1)	$(1-r_1)(1-r_2)(1-p_3)$	0	0	0
(1,0,1,0)	$(1-r_1)p_2r_3$	0	0	0
(1,0,1,1)	$(1-r_1)p_2(1-p_3)$	0	0	0
(1,1,0,0)	$p_1(1-r_2)r_3$	0	0	0
(1,1,0,1)	$p_1(1-r_2)(1-p_3)$	0	0	0
(1,1,1,0)	$p_1p_2r_3$	0	0	0
(1,1,1,1)	$p_1p_2(1-p_3)$	0	0	0

Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{1,5}$ είναι ένας (8 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις $\{1, a_1, a_2, a_3\}$ στις καταστάσεις $\{1, a_1, a_2, a_3\}$ Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{1,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή:

Πίνακας A5: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{1,5}$

States	(1,0,0,0)	(1,0,0,1)	(1,0,1,0)	(1,0,1,1)	(1,1,0,0)	(1,1,0,1)	(1,1,1,0)	(1,1,1,1)
(1,0,0,0)	$(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$(1-r_1)r_2r_3$	0	$r_1(1-r_2)r_3$	0	0
(1,0,0,1)	$(1-r_1)(1-r_2)p_3$	0	0	$(1-r_1)r_2(1-p_3)$	0	$r_1(1-r_2)(1-p_3)$	0	0
(1,0,1,0)	$(1-r_1)p_2(1-r_3)$	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)r_3$	0	$r_1p_2r_3$	0	0
(1,0,1,1)	$(1-r_1)p_2p_3$	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)(1-p_3)$	0	$_{r1}p_2(1-p_3)$	0	0
(1,1,0,0)	$p_1(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$p_1r_2r_3$	0	$(1-p_1)(1-r_2)r_3$	0	0
(1,1,0,1)	$p_1(1-r_2)p_3$	0	0	$p_1r_2(1-r_3)$	0	$(1-p_1)(1-r_2)(1-p_3)$	0	0
(1,1,1,0)	$p_1p_2(1-r_3)$	0	0	$p_1(1-p_2)r_3$	0	$(1-p_1)p_2r_3$	0	0
(1,1,1,1)	$p_1p_2p_3$	0	0	$p_1(1-p_2)(1-p_3)$	0	$(1-p_1)p_2(1-p_3)$	0	0

Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{2,5}$ είναι ένας (8 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις $\{1, a_1, a_2, a_3\}$ στις καταστάσεις $\{2, a_1, a_2, a_3\}$ Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{2,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας A6: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{2,5}$

States	(2,0,0,0)	(2,0,0,1)	(2,0,1,0)	(2,0,1,1)	(2,1,0,0)	(2,1,0,1)	(2,1,1,0)	(2,1,1,1)
(1,0,0,0)	0	0	$(1-r_1)r_2(1-r_3)$	0	$r_1(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$r_1r_2r_3$
(1,0,0,1)	0	0	$(1-r_1)r_2p_3$	0	$r_1(1-r_2)p_3$	0	0	$r_1r_2(1-p_3)$
(1,0,1,0)	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)(1-r_3)$	0	$r_1p_2(1-r_3)$	0	0	$r_1(1-p_2)r_3$
(1,0,1,1)	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)p_3$	0	$r_1p_2p_3$	0	0	$r_1(1-p_2)(1-p_3)$
(1,1,0,0)	0	0	$p_1r_2(1-r_3)$	0	$(1-p_1)(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$(1-p_1)r_2r_3$
(1,1,0,1)	0	0	$p_1r_2p_3$	0	$(1-p_1)(1-r_2)p_3$	0	0	$(1-p_1)r_2(1-p_3)$
(1,1,1,0)	0	0	$P_1(1-p_2)(1-r_3)$	0	$(1-p_1)p_2(1-r_3)$	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)r_3$
(1,1,1,1)	0	0	$p_1(1-p_2)p_3$	0	$(1-p_1)p_2p_3$	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{3,5}$ είναι ένας (8 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις $\{1, a_1, a_2, a_3\}$ στις καταστάσεις $\{3, a_1, a_2, a_3\}$ Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{3,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας A7: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{3,5}$

States	(3,0,0,0)	(3,0,0,1)	(3,0,1,0)	(3,0,1,1)	(3,1,0,0)	(3,1,0,1)	(3,1,1,0)	(3,1,1,1)
(1,0,0,0)	0	0	0	0	0	0	$r_1r_2(1-r_3)$	0
(1,0,0,1)	0	0	0	0	0	0	$r_1r_2p_3$	0
(1,0,1,0)	0	0	0	0	0	0	$r_1(1-p_2)(1-r_3)$	0
(1,0,1,1)	0	0	0	0	0	0	$r_1(1-p_2)p_3$	0
(1,1,0,0)	0	0	0	0	0	0	$(1-p_1)r_2(1-r_3)$	0
(1,1,0,1)	0	0	0	0	0	0	$(1-p_1)r_2p_3$	0
(1,1,1,0)	0	0	0	0	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)(1-r_3)$	0
(1,1,1,1)	0	0	0	0	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)p_3$	0

$$S_{1,5}S_{4,5} = S_{1,5}S_{5,5} = 0$$

$$S_{2,5}S_{0,5} = S_{2,5}S_{5,5} = 0$$

Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{1,5}$ είναι ένας (8 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {2, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {1, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{1,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας Α8: Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{1,5}$

States	(1,0,0,0)	(1,0,0,1)	(1,0,1,0)	(1,0,1,1)	(1,1,0,0)	(1,1,0,1)	(1,1,1,0)	(1,1,1,1)
(2,0,0,0)	0	$(1-r_1)(1-r_2)r_3$	0	0	0	0	0	0
(2,0,0,1)	0	$(1-r_1)(1-r_2)(1-p_3)$	0	0	0	0	0	0
(2,0,1,0)	0	$(1-r_1)p_2r_3$	0	0	0	0	0	0
(2,0,1,1)	0	$(1-r_1)p_2(1-p_3)$	0	0	0	0	0	0
(2,1,0,0)	0	$p_1(1-r_2)r_3$	0	0	0	0	0	0
(2,1,0,1)	0	$p_1(1-r_2)(1-p_3)$	0	0	0	0	0	0
(2,1,1,0)	0	$p_1p_2r_3$	0	0	0	0	0	0
(2,1,1,1)	0	$p_1p_2(1-p_3)$	0	0	0	0	0	0

Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{2,5}$ είναι ένας (8 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {2, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {2, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{2,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας Α9: Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{2,5}$

States	(2,0,0,0)	(2,0,0,1)	(2,0,1,0)	(2,0,1,1)	(2,1,0,0)	(2,1,0,1)	(2,1,1,0)	(2,1,1,1)
(2,0,0,0)	$(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$(1-r_1)r_2r_3$	0	$r_1(1-r_2)r_3$	0	0
(2,0,0,1)	$(1-r_1)(1-r_2)p_3$	0	0	$(1-r_1)r_2(1-p_3)$	0	$r_1(1-r_2)(1-p_3)$	0	0
(2,0,1,0)	$(1-r_1)p_2(1-r_3)$	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)r_3$	0	$r_1p_2r_3$	0	0
(2,0,1,1)	$(1-r_1)p_2p_3$	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)(1-p_3)$	0	$r_1p_2(1-p_3)$	0	0
(2,1,0,0)	$p_1(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$p_1r_2r_3$	0	$(1-p_1)(1-r_2)r_3$	0	0
(2,1,0,1)	$p_1(1-r_2)p_3$	0	0	$p_1r_2(1-p_3)$	0	$(1-p_1)(1-r_2)(1-p_3)$	0	0
(2,1,1,0)	$p_1p_2(1-r_3)$	0	0	$p_1(1-p_2)r_3$	0	$(1-p_1)p_2r_3$	0	0
(2,1,1,1)	$p_1p_2p_3$	0	0	$p_1(1-p_2)(1-p_3)$	0	$(1-p_1)p_2(1-p_3)$	0	0

Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{3,5}$ είναι ένας (8 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {2, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {3, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{3,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας A10: Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{3,5}$

States	(3,0,0,0)	(3,0,0,1)	(3,0,1,0)	(3,0,1,1)	(3,1,0,0)	(3,1,0,1)	(3,1,1,0)	(3,1,1,1)
(2,0,0,0)	0	0	$(1-r_1)r_2(1-r_3)$	0	$r_1(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$r_1r_2r_3$
(2,0,0,1)	0	0	$(1-r_1)r_2p_3$	0	$r_1(1-r_2)p_3$	0	0	$r_1r_2(1-p_3)$
(2,0,1,0)	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)(1-r_3)$	0	$r_1p_2(1-r_3)$	0	0	$r_1(1-p_2)r_3$
(2,0,1,1)	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)p_3$	0	$r_1p_2p_3$	0	0	$r_1(1-p_2)(1-p_3)$
(2,1,0,0)	0	0	$p_1r_2(1-r_3)$	0	$(1-p_1)(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$(1-p_1)r_2r_3$
(2,1,0,1)	0	0	$p_1r_2p_3$	0	$(1-p_1)(1-r_2)p_3$	0	0	$(1-p_1)r_2(1-p_3)$
(2,1,1,0)	0	0	$P_1(1-p_2)(1-r_3)$	0	$(1-p_1)p_2(1-r_3)$	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)r_3$
(2,1,1,1)	0	0	$p_1(1-p_2)p_3$	0	$(1-p_1)p_2p_3$	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{4,5}$ είναι ένας (8 x 6) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {2, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {4, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{4,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας A11: Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{4,5}$

States	(4,0,1,0)	(4,0,1,1)	(4,1,0,0)	(4,1,0,1)	(4,1,1,0)	(4,1,1,1)
(2,0,0,0)	0	0	0	0	$r_1r_2(1-r_3)$	0
(2,0,0,1)	0	0	0	0	$r_1r_2p_3$	0
(2,0,1,0)	0	0	0	0	$r_1(1-p_2)(1-r_3)$	0
(2,0,1,1)	0	0	0	0	$r_1(1-p_2)p_3$	0
(2,1,0,0)	0	0	0	0	$(1-p_1)r_2(1-r_3)$	0
(2,1,0,1)	0	0	0	0	$(1-p_1)r_2p_3$	0
(2,1,1,0)	0	0	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)(1-r_3)$	0
(2,1,1,1)	0	0	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)p_3$	0

$S_{3,5}S_{0,5} = S_{3,5}S_{1,5} = 0$

Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{2,5}$ είναι ένας (8 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {3, a_1, a_2, a_3} στις καταστάσεις {2, a_1, a_2, a_3} Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{2,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας A12: Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{2,5}$

States	(2,0,0,0)	(2,0,0,1)	(2,0,1,0)	(2,0,1,1)	(2,1,0,0)	(2,1,0,1)	(2,1,1,0)	(2,1,1,1)
(3,0,0,0)	0	$(1-r_1)(1-r_2)r_3$	0	0	0	0	0	0
(3,0,0,1)	0	$(1-r_1)(1-r_2)(1-p_3)$	0	0	0	0	0	0
(3,0,1,0)	0	$(1-r_1)p_2r_3$	0	0	0	0	0	0
(3,0,1,1)	0	$(1-r_1)p_2(1-p_3)$	0	0	0	0	0	0
(3,1,0,0)	0	$p_1(1-r_2)r_3$	0	0	0	0	0	0
(3,1,0,1)	0	$p_1(1-r_2)(1-p_3)$	0	0	0	0	0	0
(3,1,1,0)	0	$p_1p_2r_3$	0	0	0	0	0	0
(3,1,1,1)	0	$p_1p_2(1-p_3)$	0	0	0	0	0	0

Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{3,5}$ είναι ένας (8 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {3, a_1, a_2, a_3} στις καταστάσεις {3, a_1, a_2, a_3} Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{3,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας A13: Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{3,5}$

States	(3,0,0,0)	(3,0,0,1)	(3,0,1,0)	(3,0,1,1)	(3,1,0,0)	(3,1,0,1)	(3,1,1,0)	(3,1,1,1)
(3,0,0,0)	$(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$(1-r_1)r_2r_3$	0	$r_1(1-r_2)r_3$	0	0
(3,0,0,1)	$(1-r_1)(1-r_2)p_3$	0	0	$(1-r_1)r_2(1-p_3)$	0	$r_1(1-r_2)(1-p_3)$	0	0
(3,0,1,0)	$(1-r_1)p_2(1-r_3)$	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)r_3$	0	$r_1p_2r_3$	0	0
(3,0,1,1)	$(1-r_1)p_2p_3$	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)(1-p_3)$	0	$r_1p_2(1-p_3)$	0	0
(3,1,0,0)	$p_1(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$p_1r_2r_3$	0	$(1-p_1)(1-r_2)r_3$	0	0
(3,1,0,1)	$p_1(1-r_2)p_3$	0	0	$p_1r_2(1-p_3)$	0	$(1-p_1)(1-r_2)(1-p_3)$	0	0
(3,1,1,0)	$p_1p_2(1-r_3)$	0	0	$p_1(1-p_2)r_3$	0	$(1-p_1)p_2r_3$	0	0
(3,1,1,1)	$p_1p_2p_3$	0	0	$p_1(1-p_2)(1-p_3)$	0	$(1-p_1)p_2(1-p_3)$	0	0

Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{4,5}$ είναι ένας (8 x 6) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {3, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {4, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{4,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας A14: Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{4,5}$

States	(4,0,1,0)	(4,0,1,1)	(4,1,0,0)	(4,1,0,1)	(4,1,1,0)	(4,1,1,1)
(3,0,0,0)	$(1-r_1)r_2(1-r_3)$	0	$r_1(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$r_1r_2r_3$
(3,0,0,1)	$(1-r_1)r_2p_3$	0	$r_1(1-r_2)p_3$	0	0	$r_1r_2(1-p_3)$
(3,0,1,0)	$(1-r_1)(1-p_2)(1-r_3)$	0	$r_1p_2(1-r_3)$	0	0	$r_1(1-p_2)r_3$
(3,0,1,1)	$(1-r_1)(1-p_2)p_3$	0	$r_1p_2p_3$	0	0	$r_1(1-p_2)(1-p_3)$
(3,1,0,0)	$p_1r_2(1-r_3)$	0	$(1-p_1)(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$(1-p_1)r_2r_3$
(3,1,0,1)	$p_1r_2p_3$	0	$(1-p_1)(1-r_2)p_3$	0	0	$(1-p_1)r_2(1-p_3)$
(3,1,1,0)	$P_1(1-p_2)(1-r_3)$	0	$(1-p_1)p_2(1-r_3)$	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)r_3$
(3,1,1,1)	$p_1(1-p_2)p_3$	0	$(1-p_1)p_2p_3$	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{5,5}$ είναι ένας (8 x 2) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {3, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {5, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{5,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας A15: Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{5,5}$

States	(5,1,1,0)	(5,1,1,1)
(3,0,0,0)	$r_1r_2(1-r_3)$	0
(3,0,0,1)	$r_1r_2p_3$	0
(3,0,1,0)	$r_1(1-p_2)(1-r_3)$	0
(3,0,1,1)	$r_1(1-p_2)p_3$	0
(3,1,0,0)	$(1-p_1)r_2(1-r_3)$	0
(3,1,0,1)	$(1-p_1)r_2p_3$	0
(3,1,1,0)	$(1-p_1)(1-p_2)(1-r_3)$	0
(3,1,1,1)	$(1-p_1)(1-p_2)p_3$	0

$S_{4,5}S_{0,5} = S_{4,5}S_{1,5} = S_{4,5}S_{2,5} = 0$

Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{3,5}$ είναι ένας (6 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {4, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {3, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{3,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας A16: Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{3,5}$

States	(3,0,0,0)	(3,0,0,1)	(3,0,1,0)	(3,0,1,1)	(3,1,0,0)	(3,1,0,1)	(3,1,1,0)	(3,1,1,1)
(4,0,1,0)	0	0	0	$(1-r_1)r_3$	0	0	0	0
(4,0,1,1)	0	0	0	$(1-r_1)(1-p3)$	0	0	0	0
(4,1,0,0)	0	0	0	0	0	$(1-r_2)r_3$	0	0
(4,1,0,1)	0	0	0	0	0	$(1-r_2)(1-p_3)$	0	0
(4,1,1,0)	0	0	0	p_1r_3	0	0	0	0
(4,1,1,1)	0	0	0	$p_1(1-p_3)$	0	0	0	0

Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{4,5}$ είναι ένας (6 x 6) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {4, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {4, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{4,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας A17: Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{4,5}$

States	(4,0,1,0)	(4,0,1,1)	(4,1,0,0)	(4,1,0,1)	(4,1,1,0)	(4,1,1,1)
(4,0,1,0)	$(1-r_1)(1-r_3)$	0	0	0	0	r_1r_3
(4,0,1,1)	$(1-r_1)p_3$	0	0	0	0	$r_1(1-p_3)$
(4,1,0,0)	0	0	$(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	r_2r_3
(4,1,0,1)	0	0	$(1-r_2)p_3$	0	0	$r_2(1-p_3)$
(4,1,1,0)	$p_1(1-r_3)$	0	0	0	0	$(1-p_1)r_3$
(4,1,1,1)	p_1p_3	0	0	0	0	$(1-p_1)(1-p_3)$

Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{5,5}$ είναι ένας (6 x 2) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {4, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {5, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{5,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας A18: Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{5,5}$

States	(5,1,1,0)	(5,1,1,1)
(4,0,1,0)	$r_1(1-r_3)$	0
(4,0,1,1)	r_1p_3	0
(4,1,0,0)	$r_2(1-r_3)$	0
(4,1,0,1)	r_2p_3	0
(4,1,1,0)	$(1-p_1)(1-r_3)$	0
(4,1,1,1)	$(1-p_1)p_3$	0

$S_{5,5}S_{0,5} = S_{5,5}S_{1,5} = S_{5,5}S_{2,5} = S_{5,5}S_{3,5} = 0$

Ο υποπίνακας $S_{5,5}S_{4,5}$ είναι ένας (2 x 6) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {5, a_1, a_2, a_3} στις καταστάσεις {4, a_1, a_2, a_3} Ο υποπίνακας $S_{5,5}S_{4,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας A19: Ο υποπίνακας $S_{5,5}S_{4,5}$

States	(4,0,1,0)	(4,0,1,1)	(4,1,0,0)	(4,1,0,1)	(4,1,1,0)	(4,1,1,1)
(5,1,1,0)	0	0	0	0	0	r_3
(5,1,1,1)	0	0	0	0	0	$1-p_3$

Ο υποπίνακας $S_{5,5}S_{5,5}$ είναι ένας (2 x 2) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {5, a_1, a_2, a_3} στις καταστάσεις {5, a_1, a_2, a_3} Ο υποπίνακας $S_{5,5}S_{5,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας A20: Ο υποπίνακας $S_{5,5}S_{5,5}$

States	(5,1,1,0)	(5,1,1,1)
(5,1,1,0)	$1-r_3$	0
(5,1,1,1)	p_3	0

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΟΙ ΥΠΟΠΙΝΑΚΕΣ $S_{i,5}S_{j,5}$,i,j = 0,1,2,3,4,5 ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ P_5 ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

Οι υποπίνακες $S_{i,5}S_{j,5}$,i, ,j = 0,1,2,3,4,5 του πίνακα μετάβασης P_5 (πίνακας 13) του κεφαλαίου 4 έχουν την ακόλουθη μορφή.

Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{0,5}$ είναι ένας (2 x 2) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {0, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {0, a_1, a_2, a_3 }. Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{0,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή:

Πίνακας Β1: Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{0,5}$

States	(0,0,0,0)	(0,0,0,1)
(0,0,0,0)	$(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)$	$(1-r_1)(1-r_2)r_3$
(0,0,0,1)	$(1-r_1)(1-r_2)v_3$	$(1-r_1)(1-r_2)(1-v_3)$

Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{1,5}$ είναι ένας (2 x 6) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {0, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {1, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{1,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή:

Πίνακας Β2: Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{1,5}$

States	(1,0,0,0)	(1,0,0,1)	(1,0,1,0)	(1,0,1,1)	(1,1,0,0)	(1,1,0,1)
(0,0,0,0)	0	0	$(1-r_1)r_2(1-r_3)$	$(1-r_1)r_2r_3$	$r_1(1-r_2)(1-r_3)$	$r_1(1-r_2)r_3$
(0,0,0,1)	0	0	$(1-r_1)r_2v_3$	$(1-r_1)r_2(1-v_3)$	$r_1(1-r_2)v_3$	$r_1(1-r_2)(1-v_3)$

Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{2,5}$ είναι ένας (2 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις $\{0, a_1, a_2, a_3\}$ στις καταστάσεις $\{2, a_1, a_2, a_3\}$ Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{2,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή:

Πίνακας B3: Ο υποπίνακας $S_{0,5}S_{2,5}$

States	(2,0,0,0)	(2,0,0,1)	(2,0,1,0)	(2,0,1,1)	(2,1,0,0)	(2,1,0,1)	(2,1,1,0)	(2,1,1,1)
(0,0,0,0)	0	0	0	0	0	0	$r_1r_2(1-r_3)$	$r_1r_2r_3$
(0,0,0,1)	0	0	0	0	0	0	$r_1r_2v_3$	$r_1r_2(1-v_3)$

$S_{0,5}S_{3,5} = S_{0,5}S_{4,5} = S_{0,5}S_{5,5} = 0$

Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{0,5}$ είναι ένας (6 x 2) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις $\{1, a_1, a_2, a_3\}$ στις καταστάσεις $\{0, a_1, a_2, a_3\}$ Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{0,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή:

Πίνακας B4: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{0,5}$

States	(0,0,0,0)	(0,0,0,1)
(1,0,0,0)	0	$(1-r_1)(1-r_2)r_3$
(1,0,0,1)	0	$(1-r_1)(1-r_2)(1-p_3)$
(1,0,1,0)	0	$(1-r_1)p_2r_3$
(1,0,1,1)	0	$(1-r_1)p_2(1-p_3)$
(1,1,0,0)	0	$p_1(1-r_2)r_3$
(1,1,0,1)	0	$p_1(1-r_2)(1-p_3)$

Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{1,5}$ είναι ένας (6 x 6) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις $\{1, a_1, a_2, a_3\}$ στις καταστάσεις $\{1, a_1, a_2, a_3\}$ Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{1,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή:

Πίνακας Β5: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{1,5}$

States	(1,0,0,0)	(1,0,0,1)	(1,0,1,0)	(1,0,1,1)	(1,1,0,0)	(1,1,0,1)
(1,0,0,0)	$(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$(1-r_1)r_2r_3$	0	$r_1(1-r_2)r_3$
(1,0,0,1)	$(1-r_1)(1-r_2)p_3$	0	0	$(1-r_1)r_2(1-p_3)$	0	$r_1(1-r_2)(1-p_3)$
(1,0,1,0)	$(1-r_1)p_2(1-r_3)$	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)r_3$	0	$r_1p_2r_3$
(1,0,1,1)	$(1-r_1)p_2p_3$	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)(1-p_3)$	0	$r_1p_2(1-p_3)$
(1,1,0,0)	$p_1(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$p_1r_2r_3$	0	$(1-p_1)(1-r_2)r_3$
(1,1,0,1)	$p_1(1-r_2)p_3$	0	0	$p_1r_2(1-p_3)$	0	$(1-p_1)(1-r_2)(1-p_3)$

Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{2,5}$ είναι ένας (6 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {1, a_1, a_2, a_3} στις καταστάσεις {2, a_1, a_2, a_3} Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{2,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας Β6: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{2,5}$

States	(2,0,0,0)	(2,0,0,1)	(2,0,1,0)	(2,0,1,1)	(2,1,0,0)	(2,1,0,1)	(2,1,1,0)	(2,1,1,1)
(1,0,0,0)	0	0	$(1-r_1)r_2(1-r_3)$	0	$r_1(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$r_1r_2r_3$
(1,0,0,1)	0	0	$(1-r_1)r_2p_3$	0	$r_1(1-r_2)p_3$	0	0	$r_1r_2(1-p_3)$
(1,0,1,0)	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)(1-r_3)$	0	$r_1p_2(1-r_3)$	0	0	$r_1(1-p_2)r_3$
(1,0,1,1)	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)p_3$	0	$r_1p_2p_3$	0	0	$r_1(1-p_2)(1-p_3)$
(1,1,0,0)	0	0	$p_1r_2(1-r_3)$	0	$(1-p_1)(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$(1-p_1)r_2r_3$
(1,1,0,1)	0	0	$p_1r_2p_3$	0	$(1-p_1)(1-r_2)p_3$	0	0	$(1-p_1)r_2(1-p_3)$

Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{3,5}$ είναι ένας (6 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {1, a_1, a_2, a_3} στις καταστάσεις {3, a_1, a_2, a_3} Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{3,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας B7: Ο υποπίνακας $S_{1,5}S_{3,5}$

States	(3,0,0,0)	(3,0,0,1)	(3,0,1,0)	(3,0,1,1)	(3,1,0,0)	(3,1,0,1)	(3,1,1,0)	(3,1,1,1)
(1,0,0,0)	0	0	0	0	0	0	$r_1r_2(1-r_3)$	0
(1,0,0,1)	0	0	0	0	0	0	$r_1r_2p_3$	0
(1,0,1,0)	0	0	0	0	0	0	$r_1(1-p_2)(1-r_3)$	0
(1,0,1,1)	0	0	0	0	0	0	$r_1(1-p_2)p_3$	0
(1,1,0,0)	0	0	0	0	0	0	$(1-p_1)r_2(1-r_3)$	0
(1,1,0,1)	0	0	0	0	0	0	$(1-p_1)r_2p_3$	0

$$S_{1,5}S_{4,5} = S_{1,5}S_{5,5} = 0$$

$$S_{2,5}S_{0,5} = S_{2,5}S_{5,5} = 0$$

Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{1,5}$ είναι ένας (8 x 6) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {2, a_1, a_2, a_3} στις καταστάσεις {1, a_1, a_2, a_3} Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{1,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας B8: Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{1,5}$

States	(1,0,0,0)	(1,0,0,1)	(1,0,1,0)	(1,0,1,1)	(1,1,0,0)	(1,1,0,1)
(2,0,0,0)	0	$(1-r_1)(1-r_2)r_3$	0	0	0	0
(2,0,0,1)	0	$(1-r_1)(1-r_2)(1-p_3)$	0	0	0	0
(2,0,1,0)	0	$(1-r_1)p_2r_3$	0	0	0	0
(2,0,1,1)	0	$(1-r_1)p_2(1-p_3)$	0	0	0	0
(2,1,0,0)	0	$p_1(1-r_2)r_3$	0	0	0	0
(2,1,0,1)	0	$p_1(1-r_2)(1-p_3)$	0	0	0	0
(2,1,1,0)	0	$p_1p_2r_3$	0	0	0	0
(2,1,1,1)	0	$p_1p_2(1-p_3)$	0	0	0	0

Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{2,5}$ είναι ένας (8 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {2, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {2, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{2,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας Β9: Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{2,5}$

States	(2,0,0,0)	(2,0,0,1)	(2,0,1,0)	(2,0,1,1)	(2,1,0,0)	(2,1,0,1)	(2,1,1,0)	(2,1,1,1)
(2,0,0,0)	$(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$(1-r_1)r_2r_3$	0	$r_1(1-r_2)r_3$	0	0
(2,0,0,1)	$(1-r_1)(1-r_2)p_3$	0	0	$(1-r_1)r_2(1-p_3)$	0	$r_1(1-r_2)(1-p_3)$	0	0
(2,0,1,0)	$(1-r_1)p_2(1-r_3)$	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)r_3$	0	$r_1p_2r_3$	0	0
(2,0,1,1)	$(1-r_1)p_2p_3$	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)(1-p_3)$	0	$r_1p_2(1-p_3)$	0	0
(2,1,0,0)	$p_1(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$p_1r_2r_3$	0	$(1-p_1)(1-r_2)r_3$	0	0
(2,1,0,1)	$p_1(1-r_2)p_3$	0	0	$p_1r_2(1-p_3)$	0	$(1-p_1)(1-r_2)(1-p_3)$	0	0
(2,1,1,0)	$p_1p_2(1-r_3)$	0	0	$p_1(1-p_2)r_3$	0	$(1-p_1)p_2r_3$	0	0
(2,1,1,1)	$p_1p_2p_3$	0	0	$p_1(1-p_2)(1-p_3)$	0	$(1-p_1)p_2(1-p_3)$	0	0

Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{3,5}$ είναι ένας (8 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {2, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {3, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{3,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας Β10: Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{3,5}$

States	(3,0,0,0)	(3,0,0,1)	(3,0,1,0)	(3,0,1,1)	(3,1,0,0)	(3,1,0,1)	(3,1,1,0)	(3,1,1,1)
(2,0,0,0)	0	0	$(1-r_1)r_2(1-r_3)$	0	$r_1(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$r_1r_2r_3$
(2,0,0,1)	0	0	$(1-r_1)r_2p_3$	0	$r_1(1-r_2)p_3$	0	0	$r_1r_2(1-p_3)$
(2,0,1,0)	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)(1-r_3)$	0	$r_1p_2(1-r_3)$	0	0	$r_1(1-p_2)r_3$
(2,0,1,1)	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)p_3$	0	$r_1p_2p_3$	0	0	$r_1(1-p_2)(1-p_3)$
(2,1,0,0)	0	0	$p_1r_2(1-r_3)$	0	$(1-p_1)(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$(1-p_1)r_2(1-r_3)$
(2,1,0,1)	0	0	$p_1r_2p_3$	0	$(1-p_1)(1-r_2)p_3$	0	0	$(1-p_1)r_2(1-p_3)$
(2,1,1,0)	0	0	$p_1(1-p_2)(1-r_3)$	0	$(1-p_1)p_2(1-r_3)$	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)r_3$
(2,1,1,1)	0	0	$p_1(1-p_2)p_3$	0	$(1-p_1)p_2p_3$	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{4,5}$ είναι ένας (8 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {2, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {4, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{4,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας B11: Ο υποπίνακας $S_{2,5}S_{4,5}$

States	(4,0,0,0)	(4,0,0,1)	(4,0,1,0)	(4,0,1,1)	(4,1,0,0)	(4,1,0,1)	(4,1,1,0)	(4,1,1,1)
(2,0,0,0)	0	0	0	0	0	0	$r_1r_2(1-r_3)$	0
(2,0,0,1)	0	0	0	0	0	0	$r_1r_2p_3$	0
(2,0,1,0)	0	0	0	0	0	0	$r_1(1-p_2)(1-r_3)$	0
(2,0,1,1)	0	0	0	0	0	0	$r_1(1-p_2)p_3$	0
(2,1,0,0)	0	0	0	0	0	0	$(1-p_1)r_2(1-r_3)$	0
(2,1,0,1)	0	0	0	0	0	0	$(1-p_1)r_2p_3$	0
(2,1,1,0)	0	0	0	0	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)(1-r_3)$	0
(2,1,1,1)	0	0	0	0	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)p_3$	0

$$S_{3,5}S_{0,5} = S_{3,5}S_{1,5} = 0$$

Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{2,5}$ είναι ένας (8 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {3, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {2, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{2,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας B12: Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{2,5}$

States	(2,0,0,0)	(2,0,0,1)	(2,0,1,0)	(2,0,1,1)	(2,1,0,0)	(2,1,0,1)	(2,1,1,0)	(2,1,1,1)
(3,0,0,0)	0	$(1-r_1)(1-r_2)r_3$	0	0	0	0	0	0
(3,0,0,1)	0	$(1-r_1)(1-r_2)(1-p_3)$	0	0	0	0	0	0
(3,0,1,0)	0	$(1-r_1)p_2r_3$	0	0	0	0	0	0
(3,0,1,1)	0	$(1-r_1)p_2(1-p_3)$	0	0	0	0	0	0
(3,1,0,0)	0	$p_1(1-r_2)r_3$	0	0	0	0	0	0
(3,1,0,1)	0	$p_1(1-r_2)(1-p_3)$	0	0	0	0	0	0
(3,1,1,0)	0	$p_1p_2r_3$	0	0	0	0	0	0
(3,1,1,1)	0	$p_1p_2(1-p_3)$	0	0	0	0	0	0

Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{3,5}$ είναι ένας (8 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις $\{3, a_1, a_2, a_3\}$ στις καταστάσεις $\{3, a_1, a_2, a_3\}$ Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{3,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας B13: Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{3,5}$

States	(3,0,0,0)	(3,0,0,1)	(3,0,1,0)	(3,0,1,1)	(3,1,0,0)	(3,1,0,1)	(3,1,1,0)	(3,1,1,1)
(3,0,0,0)	$(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$(1-r_1)r_2r_3$	0	$r_1(1-r_2)r_3$	0	0
(3,0,0,1)	$(1-r_1)(1-r_2)p_3$	0	0	$(1-r_1)r_2(1-p_3)$	0	$r_1(1-r_2)(1-p_3)$	0	0
(3,0,1,0)	$(1-r_1)p_2(1-r_3)$	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)r_3$	0	$r_1p_2r_3$	0	0
(3,0,1,1)	$(1-r_1)p_2p_3$	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)(1-p_3)$	0	$r_1p_2(1-p_3)$	0	0
(3,1,0,0)	$p_1(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$p_1r_2r_3$	0	$(1-p_1)(1-r_2)r_3$	0	0
(3,1,0,1)	$p_1(1-r_2)p_3$	0	0	$p_1r_2(1-p_3)$	0	$(1-p_1)(1-r_2)(1-p_3)$	0	0
(3,1,1,0)	$p_1p_2(1-r_3)$	0	0	$p_1(1-p_2)r_3$	0	$(1-p_1)p_2r_3$	0	0
(3,1,1,1)	$p_1p_2p_3$	0	0	$p_1(1-p_2)(1-p_3)$	0	$(1-p_1)p_2(1-p_3)$	0	0

Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{4,5}$ είναι ένας (8 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {3, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {4, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{4,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας B14: Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{4,5}$

States	(4,0,0,0)	(4,0,0,1)	(4,0,1,0)	(4,0,1,1)	(4,1,0,0)	(4,1,0,1)	(4,1,1,0)	(4,1,1,1)
(3,0,0,0)	0	0	$(1-r_1)r_2(1-r_3)$	0	$r_1(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$r_1r_2r_3$
(3,0,0,1)	0	0	$(1-r_1)r_2p_3$	0	$r_1(1-r_2)p_3$	0	0	$r_1r_2(1-p_3)$
(3,0,1,0)	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)(1-r_3)$	0	$r_1p_2(1-r_3)$	0	0	$r_1(1-p_2)r_3$
(3,0,1,1)	0	0	$(1-r_1)(1-p_2)p_3$	0	$r_1p_2p_3$	0	0	$r_1(1-p_2)(1-p_3)$
(3,1,0,0)	0	0	$p_1r_2(1-r_3)$	0	$(1-p_1)(1-r_2)(1-r_3)$	0	0	$(1-p_1)r_2r_3$
(3,1,0,1)	0	0	$p_1r_2p_3$	0	$(1-p_1)(1-r_2)p_3$	0	0	$(1-p_1)r_2(1-p_3)$
(3,1,1,0)	0	0	$p_1(1-p_2)(1-r_3)$	0	$(1-p_1)p_2(1-r_3)$	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)r_3$
(3,1,1,1)	0	0	$p_1(1-p_2)p_3$	0	$(1-p_1)p_2p_3$	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{5,5}$ είναι ένας (8 x 4) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {3, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {5, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{5,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας B15: Ο υποπίνακας $S_{3,5}S_{5,5}$

States	(5,0,0,0)	(5,0,1,0)	(5,1,0,0)	(5,1,1,0)
(3,0,0,0)	0	0	0	$r_1r_2(1-r_3)$
(3,0,0,1)	0	0	0	$r_1r_2p_3$
(3,0,1,0)	0	0	0	$r_1(1-p_2)(1-r_3)$
(3,0,1,1)	0	0	0	$r_1(1-p_2)p_3$
(3,1,0,0)	0	0	0	$(1-p_1)r_2(1-r_3)$
(3,1,0,1)	0	0	0	$(1-p_1)r_2p_3$
(3,1,1,0)	0	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)(1-r_3)$
(3,1,1,1)	0	0	0	$(1-p_1)(1-p_2)p_3$

$$S_{4,5}S_{0,5} = S_{4,5}S_{1,5} = S_{4,5}S_{2,5} = 0$$

Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{3,5}$ είναι ένας (8 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {4, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {3, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{3,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας B16: Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{3,5}$

States	(3,0,0,0)	(3,0,0,1)	(3,0,1,0)	(3,0,1,1)	(3,1,0,0)	(3,1,0,1)	(3,1,1,0)	(3,1,1,1)
(4,0,0,0)	0	$(1-r_1)(1-r_2)r_3$	0	$(1-r_1)r_2r_3$	0	0	0	0
(4,0,0,1)	0	$(1-r_1)(1-r_2)(1-p_3)$	0	$(1-r_1)r_2(1-p_3)$	0	0	0	0
(4,0,1,0)	0	$(1-r_1)p_2r_3$	0	$(1-r_1)(1-v_2)r_3$	0	0	0	0
(4,0,1,1)	0	$(1-r_1)p_2(1-p_3)$	0	$(1-r_1)(1-v_2)(1-p_3)$	0	0	0	0
(4,1,0,0)	0	$p_1(1-r_2)r_3$	0	$p_1r_2r_3$	0	0	0	0
(4,1,0,1)	0	$p_1(1-r_2)(1-p_3)$	0	$p_1r_2(1-p_3)$	0	0	0	0
(4,1,1,0)	0	$p_1p_2r_3$	0	$p_1(1-v_2)r_3$	0	0	0	0
(4,1,1,1)	0	$p_1p_2(1-p_3)$	0	$p_1(1-v_2)(1-p_3)$	0	0	0	0

Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{4,5}$ είναι ένας (8 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {4, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {4, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{4,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας B17: Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{4,5}$

States	(4,0,0,0)	(4,0,0,1)	(4,0,1,0)	(4,0,1,1)	(4,1,0,0)	(4,1,0,1)	(4,1,1,0)	(4,1,1,1)
(4,0,0,0)	$(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)$	0	$(1-r_1)r_2(1-r_3)$	0	0	$r_1(1-r_2)r_3$	0	$r_1r_2r_3$
(4,0,0,1)	$(1-r_1)(1-r_2)p_3$	0	$(1-r_1)r_2p_3$	0	0	$r_1(1-r_2)(1-p_3)$	0	$r_1r_2(1-p_3)$
(4,0,1,0)	$(1-r_1)v_2(1-r_3)$	0	$(1-r_1)(1-v_2)(1-r_3)$	0	0	$r_1v_2r_3$	0	$r_1(1-v_2)r_3$
(4,0,1,1)	$(1-r_1)v_2p_3$	0	$(1-r_1)(1-v_2)p_3$	0	0	$r_1v_2(1-p_3)$	0	$r_1(1-v_2)(1-p_3)$
(4,1,0,0)	$p_1(1-r_2)(1-r_3)$	0	$p_1r_2(1-r_3)$	0	0	$(1-p_1)(1-r_2)r_3$	0	$(1-p_1)r_2r_3$
(4,1,0,1)	$p_1(1-r_2)p_3$	0	$p_1r_2p_3$	0	0	$(1-p_1)(1-r_2)(1-p_3)$	0	$(1-p_1)r_2(1-p_3)$
(4,1,1,0)	$p_1v_2(1-r_3)$	0	$p_1(1-v_2)(1-r_3)$	0	0	$(1-p_1)v_2r_3$	0	$(1-p_1)(1-v_2)r_3$
(4,1,1,1)	$p_1v_2p_3$	0	$p_1(1-v_2)p_3$	0	0	$(1-p_1)v_2(1-p_3)$	0	$(1-p_1)(1-v_2)(1-p_3)$

Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{5,5}$ είναι ένας (8 x 4) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {4, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {5, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{5,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας B18: Ο υποπίνακας $S_{4,5}S_{4,5}$

States	(5,0,0,0)	(5,0,1,0)	(5,1,0,0)	(5,1,1,0)
(4,0,0,0)	0	0	$r_1(1-r_2)(1-r_3)$	$r_1r_2(1-r_3)$
(4,0,0,1)	0	0	$r_1(1-r_2)p_3$	$r_1r_2p_3$
(4,0,1,0)	0	0	$r_1v_2(1-r_3)$	$r_1(1-v_2)(1-r_3)$
(4,0,1,1)	0	0	$r_1v_2p_3$	$r_1(1-v_2)p_3$
(4,1,0,0)	0	0	$(1-p_1)(1-r_2)(1-r_3)$	$(1-p_1)r_2(1-r_3)$
(4,1,0,1)	0	0	$(1-p_1)(1-r_2)p_3$	$(1-p_1)r_2p_3$
(4,1,1,0)	0	0	$(1-p_1)v_2(1-r_3)$	$(1-p_1)(1-v_2)(1-r_3)$
(4,1,1,1)	0	0	$(1-p_1)v_2p_3$	$(1-p_1)(1-v_2)p_3$

$$S_{5,5}S_{0,5} = S_{5,5}S_{1,5} = S_{5,5}S_{2,5} = S_{5,5}S_{3,5} = 0$$

Ο υποπίνακας $S_{5,5}S_{4,5}$ είναι ένας (4 x 8) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {5, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {4, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{5,5}S_{4,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας B19: Ο υποπίνακας $S_{5,5}S_{4,5}$

States	(4,0,0,0)	(4,0,0,1)	(4,0,1,0)	(4,0,1,1)	(4,1,0,0)	(4,1,0,1)	(4,1,1,0)	(4,1,1,1)
(5,0,0,0)	0	$(1-r_1)(1-r_2)r_3$	0	$(1-r_1)r_2r_3$	0	$r_1(1-r_2)r_3$	0	$r_1r_2r_3$
(5,0,1,0)	00	$(1-r_1)v_2r_3$	0	$(1-r_1)(1-v_2)r_3$	0	$r_1v_2r_3$	0	$r_1(1-v_2)r_3$
(5,1,0,0)	0	$v_1(1-r_2)r_3$	0	$V_1r_2r_3$	0	$(1-v_1)(1-r_2)r_3$	0	$(1-v_1)r_2r_3$
(5,1,1,0)	0	$v_1v_2r_3$	0	$V_1(1-v_2)r_3$	0	$(1-v_1)v_2r_3$	0	$(1-v_1)(1-v_2)r_3$

Ο υποπίνακας $S_{5,5}S_{5,5}$ είναι ένας (4 x 4) πίνακας, ο οποίος περιγράφει τις μεταβάσεις από τις καταστάσεις {5, a_1, a_2, a_3 } στις καταστάσεις {5, a_1, a_2, a_3 } Ο υποπίνακας $S_{5,5}S_{5,5}$ έχει την ακόλουθη μορφή

Πίνακας B20: Ο υποπίνακας $S_{5,5}S_{5,5}$

States	(5,0,0,0)	(5,0,1,0)	(5,1,0,0)	(5,1,1,0)
(5,0,0,0)	$(1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)$	$(1-r_1)r_2(1-r_3)$	$r_1(1-r_2)(1-r_3)$	$r_1r_2(1-r_3)$
(5,0,1,0)	$(1-r_1)v_2(1-r_3)$	$(1-r_1)(1-v_2)(1-r_3)$	$r_1v_2(1-r_3)$	$r_1(1-v_2)(1-r_3)$
(5,1,0,0)	$v_1(1-r_2)(1-r_3)$	$v_1r_2(1-r_3)$	$(1-v_1)(1-r_2)(1-r_3)$	$(1-v_1)r_2(1-r_3)$
(5,1,1,0)	$v_1v_2(1-r_3)$	$v_1(1-v_2)(1-r_3)$	$(1-v_1)v_2(1-r_3)$	$(1-v_1)(1-v_2)(1-r_3)$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΗΣ ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗΣ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΜΕ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΣΥΓΧΩΝΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΥΟ ΤΥΠΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

Πριν προχωρήσουμε στην ανάπτυξη των εξισώσεων της μεθόδου της αποσύνθεσης, παρουσιάζουμε κάποιες σχέσεις που ισχύουν για κάθε ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα της μορφής L(i,j) , όπου $j = \{A, B\}$. Οι προτάσεις αυτές αποδεικνύονται από τον Nemec (1999).

ΠΡΟΤΑΣΗ Γ1:
Στη στάσιμη κατάσταση του συστήματος ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

Για κάθε ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(i,j)$, $j = \{A, B\}$ ισχύει ότι

$$r_u(i,j)\Pr[\alpha_u(i,j)(t) = 0 \cap n_{(i,j)}(t-1) < N_{(i,j)}] + r_u(i,j)\Pr[\alpha_u(i,j)(t) = 0 \cap n_{(i,j)}(t-1) = N_{(i,j)}] =$$
$$p_u(i,j)\Pr[\alpha_u(i,j)(t) = 1 \cap n_{(i,j)}(t-1) < N_{(i,j)}] + v_u(i,j)\Pr[\alpha_u(i,j)(t) = 1 \cap n_{(i,j)}(t-1) = N_{(i,j)}]$$

Ομοίως για κάθε ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(i,j)$, $j = \{A, B\}$ ισχύει ότι

$$r_d(i,j)\Pr[\alpha_d(i,j)(t) = 0 \cap n_{(i,j)}(t-1) > 0] + r_d(i,j)\Pr[\alpha_d(i,j)(t) = 0 \cap n_{(i,j)}(t-1) = 0] =$$
$$p_d(i,j)\Pr[\alpha_d(i,j)(t) = 1 \cap n_{(i,j)}(t-1) > 0] + v_d(i,j)\Pr[\alpha_d(i,j)(t) = 1 \cap n_{(i,j)}(t-1) = 0]$$

Οι δυο παραπάνω σχέσεις εκφράζουν το γεγονός ότι για κάθε βλάβη υπάρχει και η αντίστοιχη επιδιόρθωση όταν το σύστημα βρεθεί στη στάσιμη κατάσταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ Γ2:
Οι αποδόσεις των ΄΄εικονικών΄΄ μηχανών $M_u(i,j)$ και $M_d(i,j)$, $PR_u(i,j)$ και $PR_d(i,j)$, αντίστοιχα κάθε ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(i,j), $j = \{A, B\}$ δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

$$PR_u(i,j) = \Pr[\alpha_u(i,j)(t) = 1 \cap n_{(i,j)}(t-1) < N_{(i,j)}] + v_u(i,j)\,p(N_{(i,j)},1,0) - r_u(i,j)\,p(N_{(i,j)},0,0) \Rightarrow$$
$$\Pr[\alpha_u(i,j)(t) = 1 \cap n_{(i,j)}(t-1) < N_{(i,j)}] = PR_u(i,j) - v_u(i,j)\,p(N_{(i,j)},1,0) + r_u(i,j)\,p(N_{(i,j))},0,0)$$

$$PR_d(i,j) = \Pr[\alpha_u(i,j)(t) = 1 \cap n_{(i,j)}(t-1) > 0] + v_d(i,j)\,p(0,0,1) - r_d(i,j)\,p(0,0,0) \Rightarrow$$
$$\Pr[\alpha_d(i,j)(t) = 1 \cap n_{(i,j)}(t-1) > 0] = PR_d(i,j) - v_d(i,j)\,p(0,0,1) + r_d(i,j)\,p(0,0,0)$$

Γ.1 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,A)$

Οι διαφορετικοί λόγοι για τους οποίους μηχανή M_5 δεν θα μπορούσε να επεξεργαστεί ένα προϊόν τύπου Α τη χρονική στιγμή t είναι οι εξής:

- Η μηχανή M_5 είναι down τη χρονική στιγμή t και starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.
- Η μηχανή M_5 είναι down τη χρονική στιγμή t και δεν είναι starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.
- Η μηχανή M_5 είναι up τη χρονική στιγμή t και είναι starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.

Άρα η πιθανότητα $r_u(5,A)$ γράφεται ως εξής:

$$\Pr(U / V \cup W \cup Z)$$

Ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα:

$$U = \{\alpha_5(t+1) = 1 \cap n_{((3,4),A)}(t) > 0 \cap n_{(5,A)}(t-1) < N_{(5,A)}\}$$
$$V = \{\alpha_5(t) = 0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) > 0 \cap n_{(5,A)}(t-1) < N_{(5,A)}\}$$
$$W = \{\alpha_5(t) = 0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) = 0 \cap n_{(5,A)}(t-1) < N_{(5,A)}\}$$
$$Z = \{\alpha_5(t) = 1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) = 0 \cap n_{(5,A)}(t-1) < N_{(5,A)}\}$$

Παρατηρούμε ότι τα γεγονότα V,W και Z είναι ξένα μεταξύ τους

Η πιθανότητα $r_u(5,A)$ έχει τελικά τη μορφή

$$\begin{aligned} r_u(5,A) &= \Pr(U/V \cup W \cup Z) = \Pr(U/V)\Pr(V/V \cup W \cup Z) + \\ &\quad \Pr(U/W)\Pr(W/V \cup W \cup Z) + \Pr(U/Z)\Pr(Z/V \cup W \cup Z) \\ &= \frac{\Pr(U/V)\Pr(V) + \Pr(U/W)\Pr(W) + \Pr(U/Z)\Pr(Z)}{\Pr(V \cup W \cup Z)} \end{aligned} \qquad (\Gamma 1)$$

Θα αναλύσουμε τώρα ένα προς ένα τους παραπάνω όρους

$$\begin{aligned} \Pr(U/V) &= \Pr[\alpha_5(t+1) = 1 \cap n_{((3,4),A)}(t) > 0 \cap n_{(5,A)}(t-1) < N_{(5,A)} / \\ &\qquad \alpha_5(t) = 0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) > 0 \cap n_{(5,A)}(t-1) < N_{(5,A)}] \\ &= \Pr[\alpha_5(t+1) = 1 / \alpha_5(t) = 0] \\ &= r_5 \end{aligned} \qquad (\Gamma 2)$$

Το γεγονός V σημαίνει ότι η μηχανή M_5 είναι χαλασμένη τη χρονική στιγμή t και δεν είναι άδεια η μπλοκαρισμένη για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.
Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα αυτή, θα υπολογίσουμε πρώτα τις προϋποθέσεις για να είναι η μηχανή $M_u(5,A)$ down και όχι μπλοκαρισμένη.

Έτσι λοιπόν έχουμε

$$\{\alpha_u(5,A)(t)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}\} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\{\alpha_5(t)=0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)>0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}\}}_{V} \cup$$

$$\{\alpha_5(t)=0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}\} \cup$$

$$\{\alpha_5(t)=1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}\} \Leftrightarrow$$

$$\{\alpha_5(t)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}\} \cup \{\alpha_5(t)=1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}\}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\Pr(V) = &\Pr(\alpha_u(5,A)(t)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}) - \\ &\Pr(\alpha_5(t)=1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}) - \\ &\Pr(\alpha_5(t)=0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)})\end{aligned}$$

Για να αναλύσουμε τον όρο $\Pr(\alpha_5(t)=0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)})$ θα εξετάσουμε τους λόγους για τους οποίους η downstream μηχανή $M_d((3,4),A)$ μπορεί να είναι down.

Αν η μηχανή $M_d((3,4),A)$ είναι down τότε

1. Θα πρέπει η μηχανή M_5 να είναι down ή
2. Η μηχανή M_5 να είναι blocked.

Επειδή όμως $n_{((3,4),A)}(t-1)=0$ η μηχανή M_5 δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα και blocked. Άρα θα πρέπει η M_5 να είναι down.
Επειδή για το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L((3,4),A) οι στάσιμες πιθανότητες με n=0 και $\alpha_{u_1}=\alpha_{u_2}=1$, είναι παροδικές, έχουμε ότι

$$\Pr(\alpha_5(t)=0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}) = p(((3,4),A),0,0,0,0)$$

Για να αναλύσουμε τον όρο $\Pr(\alpha_5(t)=1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)})$, θα εξετάσουμε τους λόγους για τους οποίους η downstream μηχανή $M_d((3,4),A)$ μπορεί να είναι up.
Αν η μηχανή $M_d((3,4),A)$ είναι up τότε θα πρέπει η μηχανή M_5 να είναι up και όχι μπλοκαρισμένη.
Επειδή για το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L((3,4),A) οι στάσιμες πιθανότητες με n=0 και $\alpha_{u_1}=\alpha_{u_2}=1$ και $\alpha_d=1$, είναι παροδικές, έχουμε ότι

$$\Pr(\alpha_5(t)=1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}) = p(((3,4),A),0,0,0,1) =$$
$$= p_s((3,4),A)$$

άρα τελικά

$$\begin{aligned}\Pr(V) = &\Pr(\alpha_u(5,A)(t)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}) - p(((3,4),A),0,0,0,0) - \\ &p_s((3,4),A)\end{aligned} \qquad (\Gamma 3)$$

Ο όρος
$\Pr\left(\alpha_u(5,A)(t)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1) < N_{(5,A)}\right)$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας μια ισότητα που εκφράζει το γεγονός ότι για κάθε βλάβη υπάρχει μια επιδιόρθωση και παρουσιάζεται από τον Nemec (1999)

$$
\begin{aligned}
& r_u(5,A)\Pr\left[\alpha_u(5,A)(t)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1) < N_{(5,A)}\right] + \\
& r_u(5,A)\Pr\left[\alpha_u(5,A)(t)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1) = N_{(5,A)}\right] = \\
& = p_u(5,A)\Pr\left[\alpha_u(5,A)(t)=1 \cap n_{(5,A)}(t-1) < N_{(5,A)}\right] + \\
& v_u(5,A)\Pr\left[\alpha_u(5,A)(t)=1 \cap n_{(5,A)}(t-1) = N_{(5,A)}\right]
\end{aligned}
\qquad (\Gamma 4)
$$

έχουμε όμως ότι

$$
\begin{aligned}
& \Pr\left[\alpha_u(5,A)(t)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1) = N_{(5,A)}\right] = p((5,A),N,0,0) \\
& \Pr\left[\alpha_u(5,A)(t)=1 \cap n_{(5,A)}(t-1) = N_{(5,A)}\right] = p_b(5,A)
\end{aligned}
$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση (Γ4) ως προς τον όρο
$\Pr\left(\alpha_u(5,A)(t)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1) < N_{(5,A)}\right)$ και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην εξίσωση (Γ3), έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\Pr(V) = & \Pr\left(\alpha_u(5,A)(t)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1) < N_{(5,A)}\right) - p(((3,4),A),0,0,0,0) - \\
& p_s((3,4),A) = \\
& = \frac{p_u(5,A)}{r_u(5,A)}\Pr\left[\alpha_u(5,A)(t)=1 \cap n_{(5,A)}(t-1) < N_{(5,A)}\right] + \\
& \frac{v_u(5,A)}{r_u(5,A)} p_b(5,A) - p((5,A),N,0,0) - p(((3,4),A),0,0,0,0) - p_s((3,4),A)
\end{aligned}
\qquad (\Gamma 5)
$$

Ο Nemec (1999) αποδεικνύει ότι η απόδοση $PR_u(5,A)$, κάθε upstream μηχανής, του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(5,A) δίνεται από τον τύπο

$$
\begin{aligned}
PR_u(5,A) = & \Pr\left[\alpha_u(5,A)(t)=1 \cap n_{(5,A)}(t-1) < N_{(5,A)}\right] + \\
& v_u(5,A)p(N_{(5,A)},1,0) - r_u(5,A)p(N_{(5,A)},0,0) \Rightarrow \\
\Pr\left[\alpha_u(5,A)(t)=1 \cap n_{(5,A)}(t-1) < N_{(5,A)}\right] = & PR_u(5,A) - v_u(5,A)p((5,A),N\ ,1,0) + \\
& r_u(5,A)p((5,A),N\ ,0,0)
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω όρο στην ισότητα (Γ5) έχουμε ότι

$$\Pr(V)=\frac{p_u(5,A)}{r_u(5,A)}\left(PR_u(5,A)-v_u(5,A)p((5,A),N\ ,1,0)+r_u(5,A)p((5,A),N\ ,0,0)\right)+$$
$$\frac{v_u(5,A)}{r_u(5,A)}p_b(5,A)-p((5,A),N,0,0)-p(((3,4),A),0,0,0,0)-p_s((3,4),A) \tag{Γ6}$$

Ο όρος $\Pr(U/W)$ υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned}\Pr[U/W]&=\Pr\big[\alpha_5(t+1)=1\cap n_{((3,4),A)}(t)>0\cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}/\\&\qquad\alpha_5(t)=0\cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0\cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}\big]=\\&=r_5\big[r_{u_1}((3,4),A)r_{u_2}((3,4),A)+r_{u_1}((3,4),A)(1-r_{u_2}((3,4),A))+\\&\qquad r_{u_1}((3,4),A)(1-r_{u_2}((3,4),A))+r_{u_2}((3,4),A)(1-r_{u_1}((3,4),A))\big]\end{aligned} \tag{Γ7}$$

Ο όρος $\Pr(W)$ έχει ήδη υπολογιστεί έμμεσα παραπάνω και είναι ίσος με

$$\Pr(W)=\Pr\big[\alpha_5(t)=0\cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0\cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}\big]=p(((3,4),A),0,0,0,0) \tag{Γ8}$$

Ο όρος $\Pr[U/Z]$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\Pr[U/Z]&=\Pr\big[\alpha_5(t+1)=1\cap n_{((3,4),A)}(t)>0\cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}/\\&\qquad\alpha_5(t)=1\cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0\cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}\big]=\\&=(1-v_d((3,4),A))\big[r_{u_1}((3,4),A)r_{u_2}((3,4),A)+r_{u_1}((3,4),A)(1-r_{u_2}((3,4),A))+\\&\qquad r_{u_1}((3,4),A)(1-r_{u_2}((3,4),A))+r_{u_2}((3,4),A)(1-r_{u_1}((3,4),A))\big]\end{aligned} \tag{Γ9}$$

Ο όρος $\Pr(Z)$ έχει ήδη υπολογιστεί και

$$\begin{aligned}\Pr(Z)&=\Pr\big(\alpha_5(t)=1\cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0\cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}\big)=p(((3,4),A),0,0,0,1)=\\&=p_s((3,4),A)\end{aligned} \tag{Γ10}$$

Επειδή τα γεγονότα V,W και Z είναι ξένα μεταξύ τους έχουμε ότι

$$\Pr[V \cup W \cup Z] = \Pr[V] + \Pr[W] + \Pr[Z] =$$
$$\frac{p_u(5,A)}{r_u(5,A)}\left(PR_u(5,A) - v_u(5,A)p(N_{(5,A)},1,0) + r_u(5,A)p(N_{(5,A)},0,0)\right) +$$
$$\frac{v_u(5,A)}{r_u(5,A)}p_b(5,A) - p((5,A),N,0,0) - p(((3,4),A),0,0,0,0) - p_s((3,4),A) +$$
$$p(((3,4),A),0,0,0,0) + p_s((3,4),A) =$$
$$\frac{p_u(5,A)}{r_u(5,A)}\left(PR_u(5,A) - v_u(5,A)p(N_{(5,A)},1,0) + r_u(5,A)p(N_{(5,A)},0,0)\right) +$$
$$\frac{v_u(5,A)}{r_u(5,A)}p_b(5,A) - p((5,A),N,0,0)$$

(Γ11)

Αντικαθιστώντας τις ισότητες (Γ2), (Γ6), (Γ7), (Γ8), (Γ9),(Γ10) και (Γ11) στην (Γ1) παίρνουμε την τελική μορφή της εξίσωσης για την παράμετρο $r_u(5,A)$

Γ.2 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,B)$

Πριν προχωρήσουμε στη ανάπτυξη της εξίσωσης επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,A)$ θα παρουσιάσουμε κάποιες ποσότητες που είναι χρήσιμες στη δημιουργία της εξίσωσης αυτής.

Ορίζουμε τα παρακάτω σύνολα

$$A = \left\{n_{((3,4),A)} > 0 \cap n_{(5,A)} < N_{(5,A)}\right\}$$
$$A^C = \left\{n_{((3,4),A)} = 0 \cup n_{(5,A)} = N_{(5,A)}\right\}$$
$$B = \left\{n_{((3,4),B)} > 0 \cap n_{(5,B)} < N_{(5,B)}\right\}$$
$$B^C = \left\{n_{((3,4),B)} = 0 \cup n_{(5,B)} = N_{(5,B)}\right\}$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να συσχετίσουμε κάποιες στάσιμες πιθανότητες των ΄΄εικονικών΄΄ υποσυστημάτων με κάποιες πιθανότητες γεγονότων που συμβαίνουν στη πραγματική γραμμή παραγωγής.

Για την ΄΄εικονική΄΄ γραμμή L((3,4),B) η στάσιμη πιθανότητα p(0,0,0,1) που συμβολίζεται με $p((3,4),B),0,0,0,1)$ υπολογίζεται ως εξής:

Για να είναι downstream μηχανή $M_d((3,4),B)$ up θα πρέπει η μηχανή M_5 να είναι up και starved και blocked για τα προϊόντα τύπου Α. Επειδή η στάσιμη πιθανότητα $p((3,4),B),0,0,0,1)$ υποδηλώνει ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),B)}$ είναι άδειο έπεται ότι αναγκαστικά θα πρέπει ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(5,B)}$ να μην είναι γεμάτος. Επίσης αν δούμε όλες τις άνω οριακές στάσιμες πιθανότητες του υποσυστήματος L((3,4),B), οι στάσιμες πιθανότητες των καταστάσεων (0,0,1,1), (0,1,1,1), (0,1,0,1) είναι παροδικές η μοναδική κατάσταση που μένει είναι η (0,0,0,1).Η πιθανότητα της κατάστασης αυτής εκφράζει τη πιθανότητα το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L((3,4),B) να είναι starved και συμβολίζεται με $p_s((3,4),B)$

Άρα

$$p((3,4),B),0,0,0,1) = p_s((3,4),B) = \Pr\left[\alpha_5(t) = 1 \cap A^C \cap n_{((3,4),B)} = 0 \cap n_{(5,B)} < N_{(5,B)}\right]$$

Για τη στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης (0,0,0,0) της ΄΄εικονικής΄΄ γραμμής L((3,4),B) που συμβολίζεται με $p((3,4),B),0,0,0,0))$ με παρόμοιο συλλογισμό έχουμε ότι

$$p((3,4),B),0,0,0,0)) = \Pr\left[A \cap n_{((3,4),B)} = 0 \cap n_{(5,B)} < N_{(5,B)}\right]$$

Για την ΄΄εικονική΄΄ γραμμή L(5,B) η στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης (N,1,0) της ΄΄εικονικής΄΄ γραμμής L(5,B) που συμβολίζεται με $p((5,B),N,1,0)$ έχουμε τα εξής:

Η $M_u(5,B)$ είναι up εάν η μηχανή M_5 είναι up, starved ή blocked για τα προϊόντα τύπου A και όχι starved για τα προϊόντα τύπου B. Επειδή η στάσιμη πιθανότητα της κατάστασης (N,1,1) του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(5,B) είναι παροδική (μια απόδειξη για αυτό παρουσιάζεται από τον Nemec (1999)) η μοναδική κατάσταση που απομένει είναι η (N,1,0). Η πιθανότητα αυτή εκφράζει τη πιθανότητα το ΄΄εικονικό΄΄ υποσύστημα L(5,B) να είναι blocked και συμβολίζεται με $p_b(5,B)$

Έτσι λοιπόν

$$p((5,B),N,1,0) = p_b(5,B) = \Pr\left[\alpha_5(t) = 1 \cap A^C \cap n_{((3,4),B)} > 0 \cap n_{(5,B)} = N_{(5,B)}\right]$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$p((5,B),N,0,0) = \Pr\left[A \cap n_{((3,4),B)} > 0 \cap n_{(5,B)} = N_{(5,B)}\right]$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\Pr\left[\alpha_5(t) = 1 \cap A^C \cap B^C\right] = p_s((3,4),B) + p_b(5,B)$$

Επειδή οι μηχανές στη πραγματική γραμμή παραγωγής μπορούν να παρουσιάζουν βλάβες μόνο όταν επεξεργάζονται ένα προϊόν και δεν είναι starved η blocked, έχουμε ότι

$Pt\left[\alpha_5(t) = 0 \cap A^C \cap B^C\right] = 0$. Αυτό έχει σαν συνέπεια η παραπάνω εξίσωση να γίνεται

$$\Pr\left[A^C \cap B^C\right] = p_s((3,4),B) + p_b(5,B)$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\Pr\left[A \cap B^C\right] = p((3,4),B),0,0,0,0)) + p((5,B),N,0,0)$$

Λόγω του ότι

$B^C = \left(A^C \cap B^C\right) \cup \left(A \cap B^C\right)$, έχουμε

$$\Pr\left(B^C\right) = \Pr\left(A^C \cap B^C\right) \cup \Pr\left(A \cap B^C\right) =$$
$$= p_s((3,4),B) + p_b(5,B) + p((3,4),B),0,0,0,0)) + p((5,B),N,0,0)$$

Επίσης
$$\Pr(B) = 1 - \Pr\left(B^C\right) = 1 - \left[p_s((3,4),B) + p_b(5,B) + p((3,4),B),0,0,0,0)) + p((5,B),N,0,0)\right]$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται (για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης παραπέμπεται στον Nemec (1999) αποδεικνύει ότι

$$\Pr\left(A^C\right) = p_s((3,4),A) + p_b(5,A) + p_s((3,4),A,0,0,0,0) + p((5,A),N,0,0)$$
Προφανώς
$$\Pr(A) = 1 - \Pr\left(A^C\right) = 1 - \left[p_s((3,4),A) + p_b(5,A) + p_s((3,4),A,0,0,0,0) + p((5,A),N,0,0)\right]$$
Επειδή τα γεγονότα A, B, A^C *και* B^C είναι ξένα μεταξύ τους, έχουμε ότι

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap B) + \Pr\left(A \cap B^C\right) \Rightarrow \Pr(A \cap B) = \Pr(A) - \Pr\left(A \cap B^C\right) =$$
$$1 - \left[p_s((3,4),A) + p_b(5,A) + p_s((3,4),A,0,0,0,0) + p((5,A),N,0,0)\right] -$$
$$p((3,4),B),0,0,0,0)) - p((5,B),N,0,0)$$

Η ποσότητα $r_u(5,B)$ είναι η πιθανότητα η μηχανή M_u(5,B) να επεξεργαστεί ένα ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος τη χρονική στιγμή t+1 δοθέντος ότι εν μπορούσε να επεξεργαστεί ένα προϊόν και δεν ήταν μπλοκαρισμένη τη χρονική στιγμή t. Αυτό είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι η μηχανή M_5 παράγει ένα προϊόν τύπου Β τη χρονική στιγμή t+1 , δοθέντος ότι δεν μπορούσε να επεξεργαστεί ένα προϊόν τύπου Β και δεν ήταν μπλοκαρισμένη για τα προϊόντα τύπου Β τη χρονική στιγμή t. Οι διαφορετικοί λόγοι για τους οποίους η μηχανή M_5 δεν παράγει ένα προϊόν τύπου Β τη χρονική στιγμή Β (δοθέντος ότι δεν ήταν μπλοκαρισμένη για τα προϊόντα τύπου Β τη χρονική στιγμή t) αλλά είναι σε θέση να παράγει ένα προϊόν τύπου Β τη χρονική t+1 είναι οι εξής:

1. Η μηχανή M_5 είναι up τη χρονική στιγμή t , starved ή blocked για τα προϊόντα τύπου Α και starved για τα προϊόντα τύπου Β
2. Η μηχανή M_5 είναι up τη χρονική στιγμή t , παράγοντας προϊόντα τύπου Α αλλά είναι έτοιμη να γίνει blocked η starved για τα προϊόντα τύπου Α και αμέσως μετά θα ξεκινήσει τη παραγωγή προϊόντων τύπου Β
3. Η μηχανή M_5 είναι down τη χρονική στιγμή t αλλά μόλις επιδιορθωθεί η βλάβη θα ξεκινήσει τη παραγωγή προϊόντων τύπου Β.

Ο λόγος (1) περιγράφεται από το γεγονός ότι η μηχανή M_5 είναι αδρανής.
Το σύνολο I που περιγράφει το γεγονός αυτό είναι
$$I = \left\{\alpha_5(t) = 1 \cap A^C \cap n_{((3,4),B)}(t-1) = 0 \cap n_{(5,B)}(t-1) < N_{(5,B)}\right\}$$

Ο λόγος (2) περιγράφει το γεγονός όπου η μηχανή M_5 παράγει προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t, αλλά τη χρονική στιγμή t+1 θα παράγονται προϊόντα τύπου Β.

Αυτό εκφράζεται από τα εξής γεγονότα

$$V_1 = \left\{\alpha_5(t) = 1 \cap \left(n_{((3,4),A)}(t-1) = 1 \cup n_{(5,A)}(t-1) = N_{(5,A)} - 1\right) \cap n_{((3,4),B)}(t-1) > 0 \cap n_{(5,B)}(t-1) < N_{(5,B)}\right\}$$
$$V_2 = \left\{\alpha_5(t) = 1 \cap \left(n_{((3,4),A)}(t-1) = 1 \cup n_{(5,A)}(t-1) = N_{(5,A)} - 1\right) \cap n_{((3,4),B)}(t-1) = 0 \cap n_{(5,B)}(t-1) < N_{(5,B)}\right\}$$

Ο λόγος (3) περιγράφει το γεγονός όπου η μηχανή M_5 είναι down τη στιγμή t αλλά μετά την επιδιόρθωση παράγει ένα προϊόν τύπου Β. Αυτό σημαίνει ότι η μηχανή M_5 πρέπει να είναι blocked ή starved για τα προϊόντα τύπου Α και όχι starved για τα προϊόντα τύπου Β.
Το γεγονός αυτό είναι

$$D = \left\{\alpha_5(t) = 0 \cap \left(n_{((3,4),A)}(t-1) = 0 \cup n_{(5,A)}(t-1) = N_{(5,A)}\right) \cap n_{((3,4),B)}(t-1) > 0 \cap n_{(5,B)}(t-1) < N_{(5,B)}\right\}$$

Το γεγονός U εκφράζει τη δυνατότητα παραγωγής ενός προϊόντος τύπου Β τη χρονική στιγμή t+1 και ορίζεται ως εξής:

$$U = \left\{\alpha_5(t+1) = 1 \cap \left(n_{((3,4),A)}(t) = 0 \cup n_{(5,A)}(t) = N_{(5,A)}\right) \cap n_{((3,4),B)}(t) > 0 \cap n_{(5,B)}(t) < N_{(5,B)}\right\}$$

Η ποσότητα $r_u(5,B)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$r_u(5,B) = \Pr[U / I \cup V_1 \cup V_2 \cup D] =$$
$$= \frac{\Pr[U/I]\Pr[I] + \Pr[U/V_1]\Pr[V_1] + \Pr[U/V_2]\Pr[V_2] + \Pr[U/D]\Pr[D]}{\Pr[I \cup V_1 \cup V_2 \cup D]} \qquad (\Gamma 12)$$

Στη συνέχεια αναλύονται ένας προς ένας οι όροι του κλάσματος

Υπολογισμός του όρου $\Pr[U/I]$:

Η πιθανότητα αυτή εκφράζει το γεγονός η μηχανή M_5 να ολοκληρώσει τη παραγωγή ενός προϊόντος τύπου Β τη χρονική στιγμή t+1, δοθέντος ότι δεν μπορούσε να επεξεργαστεί ούτε προϊόντα τύπου Α (γιατί ήταν blocked ή starved για τα προϊόντα τύπου Α) , ούτε προϊόντα τύπου Β γιατί ήταν starved για τα προϊόντα τύπου Β.
Για να είναι σε θέση η μηχανή M_5 να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος τύπου Β τη χρονική στιγμή t+1, θα πρέπει δυο γεγονότα να συμβούν ταυτόχρονα
Το πρώτο γεγονός είναι ότι θα πρέπει ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),B)}$ τη χρονική στιγμή t+1 να βρεθεί να έχει τουλάχιστον ένα προϊόν και το δεύτερο γεγονός είναι ότι θα πρέπει η μηχανή M_5 να εξακολουθήσει τη χρονική στιγμή να είναι blocked ή starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t+1.

Για να συμβεί το πρώτο γεγονός θα πρέπει κάποια από τις upstream ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές $M_{u1}((3,4),B)$ ή $M_{u1}((3,4),B)$ να τροφοδοτήσει τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((3,4),B)}$ με ένα τουλάχιστον προϊόν. Αυτό μπορεί να συμβεί αν υπάρξει επιδιόρθωση της βλάβης που παρουσιάστηκε σε κάποιο σημείο της γραμμής upstream του αποθηκευτικού χώρου $B_{((3,4),B)}$ με αποτέλεσμα ο αποθηκευτικός χώρος να μην τροφοδοτείται με προϊόντα και να βρεθεί άδειος. Αυτή η επιδιόρθωση μπορεί να γίνει με πιθανότητα

$$1-\left[(1-r_{u_1}((3,4),B))((1-r_{u_2}((3,4),B)))\right]$$

Το δεύτερο γεγονός αναλύεται σε δυο επιμέρους γεγονότα.

Αν η μηχανή M_5 ήταν starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t, θα πρέπει να εξακολουθήσει να είναι starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t+1. Χρησιμοποιώντας και τροποποιώντας ελαφρά ένα τύπο που παρουσιάζεται από τον Nemec (1999), αυτό το γεγονός εκφράζεται από τη πιθανότητα:

$$(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A)))\frac{p_s((3,4),A)}{p_s((3,4),A)+p_b((3,4),A)}$$

Αν η μηχανή M_5 ήταν blockedγια τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t, θα πρέπει να εξακολουθήσει να είναι blocked για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t+1. Χρησιμοποιώντας και τροποποιώντας ελαφρά ένα τύπο που παρουσιάζεται από τον Nemec (1999), αυτό το γεγονός εκφράζεται από τη πιθανότητα:

$$\left(1-r_d(5,A)\right)\frac{p_b(5,A)}{p_s((3,4),A)+p_b(5,A)}$$

Συνολικά λοιπόν το δεύτερο γεγονός μπορεί να συμβεί με πιθανότητα

$$(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A)))\frac{p_s((3,4),A)}{p_s((3,4),A)+p_b((3,4),A)}+$$

$$\left(1-r_d(5,A)\right)\frac{p_b(5,A)}{p_s((3,4),A)+p_b(5,A)}$$

Άρα

$$\Pr[U/I]=\Psi_1(\Psi_2+\Psi_3) \qquad (\Gamma 13)$$

$$\Psi_1=1-\left[(1-r_{u_1}((3,4),B))((1-r_{u_2}((3,4),B)))\right]$$

$$\Psi_2=(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A)))\frac{p_s((3,4),A)}{p_s((3,4),A)+p_b((3,4),A)}$$

$$\Psi_3=\left(1-r_d(5,A)\right)\frac{p_b(5,A)}{p_s((3,4),A)+p_b(5,A)}$$

Υπολογισμός της ποσότητας $\Pr[U/D]$:

Αυτός ο όρος εκφράζει τη πιθανότητα του γεγονότος η μηχανή M_5 να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος τύπου Β τη χρονική στιγμή t+1, δοθέντος ότι δεν παρήγαγε προϊόντα τύπου Β γιατί ήταν down αλλά ήταν και starved ή blocked για τα προϊόντα τύπου Α.

Πρώτα από όλα θα πρέπει η μηχανή M_5 να επισκευαστεί και αυτό μπορεί να συμβεί με πιθανότητα r_5.

Επίσης αν η μηχανή M_5 ήταν down και starved τη χρονική στιγμή t για τα προϊόντα τύπου A, θα πρέπει να εξακολουθήσει να είναι starved για τα προϊόντα τύπου A τη χρονική στιγμή t+1.
Τροποποιώντας ελαφρά ένα τύπο που παρουσιάζεται από τον Nemec (1999), αυτό το γεγονός εκφράζεται από τη πιθανότητα:

$$(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A)))\frac{p\ ((3,4),A,0,0,0,0)}{p\ ((3,4),A,0,0,0,0)+p((5,A),N,0,0)}$$

Αν η μηχανή M_5 ήταν down και blocked τη χρονική στιγμή t για τα προϊόντα τύπου A, θα πρέπει να εξακολουθήσει να είναι blocked για τα προϊόντα τύπου A τη χρονική στιγμή t+1.
Τροποποιώντας ελαφρά ένα τύπο που παρουσιάζεται από τον Nemec (1999), αυτό το γεγονός εκφράζεται από τη πιθανότητα:

$$(1-r_d(5,A))\frac{p\ ((5,A),N0,0,0)}{p\ ((5,A),N0,0,0)+p\ ((3,4),A,0,0,0,0)}$$

Άρα

$$\Pr[U/D]=\Omega_1(\Omega_2+\Omega_3) \qquad (\Gamma 14)$$

Όπου

$$\Omega_1=r_5$$

$$\Omega_2=(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A)))\frac{p\ ((3,4),A,0,0,0,0)}{p\ ((3,4),A,0,0,0,0)+p((5,A),N,0,0)}$$

$$\Omega_3=(1-r_d(5,A))\frac{p\ ((5,A),N0,0,0)}{p\ ((5,A),N0,0,0)+p\ ((3,4),A,0,0,0,0)}$$

Υπολογισμός της ποσότητας $\Pr[U/V_1]$:

Η πιθανότητα αυτή εκφράζει το γεγονός η μηχανή M_5 να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος τη χρονική στιγμή t+1, δοθέντος ότι η μηχανή M_5 ήταν up και ΄΄μόλις΄΄ έγινε blocked ή starved για τα προϊόντα τύπου A και δεν ήταν blocked ή starved για τα προϊόντα τύπου B τη χρονική στιγμή t..

Πρώτα θα ασχοληθούμε με το γεγονός ότι τη χρονική στιγμή t-1, ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ έχει μόνο ένα προϊόν ή ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(5,A)}$ έχει μόνο ένα χώρο ελεύθερο δηλαδή έχει $N_{(5,A)}$-1 προϊόντα.

Για να γίνει η M_5 starved τη χρονική στιγμή t, ενώ τη χρονική στιγμή t-1 ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ είχε μόνο ένα προϊόν θα πρέπει καμιά από τις upstream μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$ και $M_{u1}((3,4),A)$ να μην προσθέσει προϊόν στον αποθηκευτικό χώρο $B_{((3,4),A.}$

Το γεγονός ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ έχει μόνο ένα προϊόν εκφράζεται από τις πιθανότητες του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L((3,4),A) για τις οποίες n=1 και επειδή ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ πρέπει να είναι άδειος τη χρονική στιγμή t, θα πρέπει $\alpha_d((3,4,A)=1$.
Οι πιθανότητες αυτές είναι οι $p((3,4),A,1,0,0,1)$, $p((3,4),A,1,0,1,1)$, $p((3,4),A,1,1,0,1)$, ενώ η πιθανότητα $p((3,4),A,1,1,1,1)$ είναι παροδική και δεν χρειάζεται να ληφθεί υπόψη.

Ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A}$ είναι άδειος τη χρονική στιγμή t με πιθανότητα η οποία δίνεται από τον τύπο $\frac{A}{B}$ όπου

$$\Omega = p((3,4),A,1,0,0,1)(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A))+$$
$$p((3,4),A,1,0,1,1)(1-r_{u_1}((3,4),A))p_{u_2}((3,4),A)+$$
$$p((3,4),A,1,1,0,1)(1-r_{u_2}((3,4),A))p_{u_1}((3,4),A)$$

και $C = p((3,4),A,1,0,0,1)+p((3,4),A,1,0,1,1)+p((3,4),A,1,1,0,1)$

Ομοίως Για να γίνει η M_5 blocked τη χρονική στιγμή t, ενώ τη χρονική στιγμή t-1 ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(5,A)}$ είχε $N_{(5,A)}$-1 προϊόντα, θα πρέπει η downstream μηχανή $M_d(5,A)$ να μην αφαιρέσει προϊόν στον αποθηκευτικό χώρο $B_{(5,A)}$.
Το γεγονός ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(5,A)}$ έχει $N_{(5,A)}$-1 προϊόντα εκφράζεται από τις πιθανότητες του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(5,A) για τις οποίες n=N-1 και επειδή ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(5,A)}$ πρέπει να είναι γεμάτος τη χρονική στιγμή t, θα πρέπει $\alpha_u(5,A)=1$.
Οι πιθανότητες αυτές είναι οι $p(5,A,N-1,1,0)$ *και* $p(5,A,N-1,1,1)$.
Ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(5,A)}$ είναι γεμάτος τη χρονική στιγμή t με πιθανότητα η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\frac{(1-r_d(5,A))p(5,A,N-1,1,0)+p_d(5,A)(5,A,N-1,1,1)}{p(5,A,N-1,1,0)+p(5,A,N-1,1,1)}=\Gamma$$

Άρα τελικά

$$\Pr[U/V_1]=\frac{\Omega}{C}+\Gamma \qquad (\Gamma 15)$$

Υπολογισμός του όρου $\Pr[U/V_2]$

Για τον υπολογισμό του όρου $\Pr[U/V_2]$ ισχύει ότι και προηγούμενος αλλά επιπλέον η μηχανή M_5 θα πρέπει τη χρονική στιγμή t να πάψει να είναι starved για τα προϊόντα τύπου Β, δεδομένου ότι ήταν starved τη χρονική για τα προϊόντα τύπου Β στιγμή t-1. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει κάποια από τις upstream ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές $M_{u1}((3,4),B)$ ή $M_{u2}((3,4),B)$ να προσθέσει ένα προϊόν στον αποθηκευτικό χώρο $B_{((3,4),B)}$. Αυτό γίνεται με πιθανότητα
$1-\left[(1-r_{u_1}((3,4),B))((1-r_{u_2}((3,4),B)))\right]$

Άρα τελικά ο όρος $\Pr[U/V_2]$ παίρνει τη μορφή :

$$\Pr[U/V_2]=1-\left[(1-r_{u_1}((3,4),B))((1-r_{u_2}((3,4),B)))\right]\cdot\left[\frac{\Omega}{C}+\Gamma\right] \qquad (\Gamma 16)$$

Θα αναλύσουμε τώρα ένα προς ένα τα γεγονότα D,U,I_1 και I_2.

Το γεγονός D είναι

$$D=\{\alpha_5(t)=0\cap(n_{((3,4),A)}(t-1)=0\cup n_{(5,A)}(t-1)=N_{(5,A)})\cap$$
$$n_{((3,4),B)}(t-1)>0\cap n_{(5,B)}(t-1)<N_{(5,B)}\}$$

Το γεγονός

$$\{\alpha_u(5,B)=0\cap n_{(5,B)}<N_{(5,B)}\}\Leftrightarrow$$
$$\{\alpha_5(t)=1\cap n_{((3,4),A)}(t-1)>0\cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}\cap n_{((3,4),B)}(t-1)>0\cap n_{(5,B)}(t-1)<N_{(5,B)}\}\cup$$
$$\{\alpha_5(t)=1\cap n_{((3,4),A)}(t-1)>0\cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}\cap n_{((3,4),B)}(t-1)=0\cap n_{(5,B)}(t-1)<N_{(5,B)}\}\cup$$
$$\{\alpha_5(t)=1\cap(n_{((3,4),A)}(t-1)=0\cup n_{(5,A)}(t-1)=N_{(5,A)})\cap n_{((3,4),B)}(t-1)>0\cap n_{(5,B)}(t-1)<N_{(5,B)}\}\cup$$
$$\{\alpha_5(t)=0\cap n_{((3,4),A)}(t-1)>0\cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}\cap n_{((3,4),B)}(t-1)>0\cap n_{(5,B)}(t-1)<N_{(5,B)}\}\cup$$
$$\{\alpha_5(t)=0\cap(n_{((3,4),A)}(t-1)=0\cup n_{(5,A)}(t-1)=N_{(5,A)})\cap n_{((3,4),B)}(t-1)>0\cap n_{(5,B)}(t-1)<N_{(5,B)}\}\cup$$
$$\{\alpha_5(t)=0\cap n_{((3,4),A)}(t-1)>0\cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}\cap n_{((3,4),B)}(t-1)=0\cap n_{(5,B)}(t-1)<N_{(5,B)}\}$$

Ισοδύναμα το γεγονός $\{\alpha_u(5,B)=0\cap n_{(5,B)}<N_{(5,B)}\}$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\{\alpha_u(5,B)=0\cap n_{(5,B)}<N_{(5,B)}\}\Leftrightarrow$$
$$\{A\cap B\}\cup\{A\cap n_{((3,4),B)}(t-1)=0\cap n_{(5,B)}(t-1)<N_{(5,B)}\}\cup$$
$$\{\alpha_5(t)=1\cap A^C\cap n_{((3,4),B)}(t-1)=0\cap n_{(5,B)}(t-1)<N_{(5,B)}\}\cup$$
$$\{\alpha_5(t)=0\cap A^C\cap B\}$$

Παρατηρούμε ότι τα παραπάνω γεγονότα είναι ξένα μεταξύ τους

Το δεύτερο γεγονός είναι ίσο με την πιθανότητα $p((3,4),B,0,0,0,0)$ και το τρίτο γεγονός είναι ίσο με τη πιθανότητα $p_s((3,4),B)$. Έχουμε ήδη δείξει ότι

$$\Pr(A\cap B)=\Pr(A)-\Pr(A\cap B^C)=1-[p_s((3,4),A)+p_b(5,A)+p_s((3,4),A,0,0,0,0)+p((5,A),N,0,0)]$$
$$-p((3,4),B),0,0,0,0))-p((5,B),N,0,0)$$

Το τελευταίο γεγονός είναι το γεγονός D,άρα

$$\Pr[D]=\Pr[\alpha_u(5,B)=0\cap n_{(5,B)}<N_{(5,B)}]-p_s((3,4),B)-1+$$
$$[p_s((3,4),A)+p_b(5,A)+p_s((3,4),A,0,0,0,0)+p((5,A),N,0,0)]+p((5,B),N,0,0)$$

Ο όρος $\Pr[\alpha_u(5,B)=0\cap n_{(5,B)}<N_{(5,B)}]$, χρησιμοποιώντας την ισότητα παρουσιάζεται από τον Nemec (1999) και εκφράζει το γεγονός ότι για κάθε βλάβη θα υπάρχει μια επιδιόρθωση έχουμε ότι

$$\Pr\left[\alpha_u(5,B)=0\cap n_{(5,B)}<N_{(5,B)}\right]=$$
$$\frac{p_u(5,B)}{r_u(5,B)}\left(PR_u(5,B)-v_u(5,B)p((5,B),N\ ,1,0)+r_u(5,B)p((5,B),N\ ,0,0)\right)+$$
$$\frac{v_u(5,B)}{r_u(5,B)}p_b(5,B)-p((5,B),N,0,0)$$

Άρα τελικά

$$\begin{aligned}\Pr[D]=&\frac{p_u(5,B)}{r_u(5,B)}\left(E_u(5,B)-v_u(5,B)p(N_{(5,B)},1,0)+r_u(5,B)p(N_{(5,A)},0,0)\right)+\\&\frac{v_u(5,B)}{r_u(5,B)}p_b(5,B)-p((5,B),N,0,0)-p_s((3,4),B)-1+\\&\left[p_s((3,4),A)+p_b(5,A)+p_s((3,4),A,0,0,0,0)+p((5,A),N,0,0)\right]+\\&p((5,B),N,0,0)\end{aligned}\qquad(\Gamma17)$$

Υπολογισμός της πιθανότητας $\Pr[I]$:

$$\Pr[I]=p_s((3,4),B)\qquad(\Gamma18)$$

Υπολογισμός του όρου $\Pr[V_1]$:
Υπενθυμίζουμε ότι

$$V_1=\left\{\alpha_5(t)=1\cap\left(n_{((3,4),A)}(t-1)=1\cup n_{(5,A)}(t-1)=N_{(5,A)}-1\right)\cap n_{((3,4),B)}(t-1)>0\cap n_{(5,B)}(t-1)<N_{(5,B)}\right\}$$

Επειδή η μηχανή M_5 είναι up και δεν είναι starved ή blocked για τα προϊόντα τύπου Α αυτό σημαίνει ότι η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d((3,4),B)$ θα είναι down. Ωστόσο δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τίποτα για τις ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές $M_{u1}((3,4),B)$ ή $M_{u2}((3,4),B)$ οι οποίες μπορεί να είναι up ή down.

Το γεγονός V_1 περιγράφεται από τη πιθανότητα

$$\Pr[V_1]=\sum_{n=1}^{n=N}\left(p((3,4),B,n,0,0,0)+p((3,4),B,n,0,1,0)+p((3,4),B,n,1,0,0)+p((3,4),B,n,1,1,0)\right)\qquad(\Gamma19)$$

Υπολογισμός του όρου $\Pr[V_2]$:

Ακολουθώντας παρόμοιο συλλογισμό
Επειδή η μηχανή M_5 είναι up και δεν είναι starved ή blocked για τα προϊόντα τύπου Α αυτό σημαίνει ότι η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d((3,4),B)$ θα είναι down, ενώ επειδή ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),B)}$ είναι άδειος θα υπολογίσουμε μόνο τις στάσιμες πιθανότητες με n=0. Ωστόσο δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τίποτα για τις ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές $M_{u1}((3,4),B)$ ή $M_{u2}((3,4),B)$ οι οποίες μπορεί να είναι up ή down.

Άρα

$$\Pr[V_2]=p((3,4),B,0,0,0,0)+p((3,4),B,0,0,1,0)+p((3,4),B,0,1,0,0)+p((3,4),B,0,1,1,0)$$

επειδή τώρα οι στάσιμες πιθανότητες
$p((3,4),B,0,0,1,0), p((3,4),B,0,1,0,0), p((3,4),B,0,1,1,0)$ αντιστοιχούν σε παροδικές καταστάσεις θα είναι ίσες με μηδέν.

Τελικά
$$\Pr[V_2] = p((3,4),B,0,0,0,0) \qquad (\Gamma 20)$$

Αντικαθιστώντας τις ισότητες (Γ13), (Γ14), (Γ15), (Γ16), (Γ17), (Γ18), (Γ19) και (Γ20) στην (Γ12) παίρνουμε τη τελική μορφή της εξίσωσης για την παράμετρο $r_u(5,B)$

Γ.3 Εξίσωση διακοπής της ροής για την εικονική μηχανή $M_u(5,A)$

Η παράμετρος $p_u(5,A)$ είναι η πιθανότητα εμφάνισης βλάβης για την εικονική μηχανή $M_u(5,A)$
Δηλαδή είναι πιθανότητα η μηχανή $M_u(5,A)$ να μην ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος τύπου Α τη χρονική στιγμή t+1, δοθέντος τη χρονική στιγμή t μπορούσε να παράγει ένα προϊόν τύπου Α και δεν ήταν μπλοκαρισμένη για τα προϊόντα τύπου Α.

Άρα
$$p_u(5,A) = \Pr[M_u(5,A) \text{ είναι down την στιγμή } t+1 / M_u(5,A) \text{ είναι up και } n_{(5,A)} < N_{(5,A)} \text{ την στιγμή } t]$$

Η μηχανή $M_u(5,A)$ είναι down τη χρονική στιγμή t+1 , δοθέντος τη χρονική στιγμή t μπορούσε να παράγει ένα προϊόν τύπου Α και δεν ήταν μπλοκαρισμένη για τα προϊόντα τύπου Α αν

- Η μηχανή M_5 είναι down τη χρονική στιγμή t+1 ή
- $n_{((3,4),A)} = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ τη χρονική στιγμή t+1.

Άρα
$$p_u(5,A) = \Pr[\alpha_5(t+1) = 0 / M_u(5,A) \text{ είναι up και } n_{(5,A)} < N_{(5,A)} \text{ την στιγμή } t] +$$
$$\Pr[n_{((3,4),A)} = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \text{ τη στιγμή } t+1 / M_u(5,A) \text{ είναι up και } n_{(5,A)} < N_{(5,A)} \text{ την στιγμή } t]$$

Ο όρος
$\Pr[\alpha_5(t+1) = 0 / M_u(5,A) \text{ είναι up και } n_{(5,A)} < N_{(5,A)} \text{ την στιγμή } t]$ είναι ίσος με την πιθανότητα επιδιόρθωσης της μηχανής M_5, δηλαδή
$\Pr[\alpha_5(t+1) = 0 / M_u(5,A) \text{ είναι up και } n_{(5,A)} < N_{(5,A)} \text{ την στιγμή } t] = r_5$.

Ο δεύτερος όρος αναλύεται ως εξής (στη συνέχεια παραλείπουμε το σύμβολο του χρόνου t για την απλοποίηση των παραστάσεων.

$$\Pr\Big[n_{((3,4),A)}=0\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0\ /\ M_u(5,A)\ \text{είναι up και}\ n_{(5,A)}<N_{(5,A)}\ \Big]=$$
$$\Pr\Big[n_{((3,4),A)}=0\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0\cap\alpha_d((3,4),A)=0\ /\ M_u(5,A)\ \text{είναι up και}\ n_{(5,A)}<N_{(5,A)}\ \Big]+$$
$$\Pr\Big[n_{((3,4),A)}=0\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0\cap\alpha_d((3,4),A)=1\ /\ M_u(5,A)\ \text{είναι up και}\ n_{(5,A)}<N_{(5,A)}\ \Big]$$

Θα αναλύσουμε τώρα τον δεύτερο όρο του παραπάνω αθροίσματος.
$$\Pr\Big[n_{((3,4),A)}=0\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0\cap\alpha_d((3,4),A)=1\ /\ M_u(5,A)\ \text{είναι up και}\ n_{(5,A)}<N_{(5,A)}\ \Big]$$

Για να έχουμε $n_{((3,4),A)}=0\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0\cap\alpha_d((3,4),A)=1$ τη χρονική στιγμή t+1, θα πρέπει να συμβαίνει ένα από τα παρακάτω τη χρονική στιγμή t.

1. $n_{((3,4),A)}=0\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0\cap\alpha_d((3,4),A)=0$, καμιά από τις upstream μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$ και $M_{u2}((3,4),A)$ δεν πρέπει να επισκευαστεί με πιθανότητα $(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A)))$ και η $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να επισκευαστεί με πιθανότητα $r_d((3,4),A)$
2. $n_{((3,4),A)}=0\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0\cap\alpha_d((3,4),A)=1$, καμιά από τις upstream μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$ και $M_{u2}((3,4),A)$ δεν πρέπει να επισκευαστεί με πιθανότητα $(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A)))$ και η $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να μην χαλάσει με πιθανότητα $1-v_d((3,4),A)$
3. $n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=1\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0\cap\alpha_d((3,4),A)=0$, η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $p_{u_1}((3,4),A)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ δεν πρέπει να επισκευαστεί με πιθανότητα $(1-r_{u_2}((3,4),A))$ και η $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να επισκευαστεί με πιθανότητα $r_d((3,4),A)$
4. $n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=1\cap\alpha_d((3,4),A)=0$, η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ δεν πρέπει να επισκευαστεί με πιθανότητα $(1-r_{u_1}((3,4),A))$ η $M_{u2}((3,4),A)$ θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $p_{u_2}((3,4),A)$, και η $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να επισκευαστεί με πιθανότητα $r_d((3,4),A)$
5. $n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=1\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=1\cap\alpha_d((3,4),A)=0$, οι μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$ και $M_{u2}((3,4),A)$ θα πρέπει να χαλάσουν με πιθανότητα $p_{u_1}((3,4),A)$ και $p_{u_2}((3,4),A)$, αντίστοιχα και η $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να επισκευαστεί με πιθανότητα $r_d((3,4),A)$
6. $n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0\cap\alpha_d((3,4),A)=0$, καμιά από τις upstream μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$ και $M_{u2}((3,4),A)$ δεν πρέπει να επισκευαστεί με πιθανότητα $(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A)))$ και η $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να επισκευαστεί με πιθανότητα $r_d((3,4),A)$

7. $n_{((3,4),A)} = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1$, η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $p_{u_1}((3,4),A)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ δεν πρέπει να επισκευαστεί με πιθανότητα $(1 - r_{u_2}((3,4),A))$ και η $M_d((3,4),A)$ δεν θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $1 - p_d((3,4),A)$
8. $n_{((3,4),A)} = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1$, η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ δεν πρέπει να επισκευαστεί με πιθανότητα $(1 - r_{u_1}((3,4),A))$ η $M_{u2}((3,4),A)$ θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $p_{u_2}((3,4),A)$, και η $M_d((3,4),A)$ δεν θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $1 - p_d((3,4),A)$
9. $n_{((3,4),A)} = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1$, , οι μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$ και $M_{u2}((3,4),A)$ θα πρέπει να χαλάσουν με πιθανότητα $p_{u_1}((3,4),A)$ και $p_{u_2}((3,4),A)$, αντίστοιχα και η $M_d((3,4),A)$ δεν θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $1 - p_d((3,4),A)$
10. $n_{((3,4),A)} = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1$, καμιά από τις upstream μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$ και $M_{u2}((3,4),A)$ δεν πρέπει να επισκευαστεί με πιθανότητα $(1 - r_{u_1}((3,4),A))((1 - r_{u_2}((3,4),A)))$ και η $M_d((3,4),A)$ δεν θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $1 - p_d((3,4),A)$

Με βάση όλα τα παραπάνω ο όρος
$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 / B\right]$,
$\text{όπου } B = \left\{M_u(5,A) \text{ είναι up και } n_{(5,A)} < N_{(5,A)}\right\}$
παίρνει τη μορφή

$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1/\mathrm{B}\right] =$$
$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 0/B\right]$$
$$(1 - r_{u_1}((3,4),A))((1 - r_{u_2}((3,4),A)))r_d((3,4),A) +$$
$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1/B\right]$$
$$(1 - r_{u_1}((3,4),A))((1 - r_{u_2}((3,4),A)))\left(1 - v_d((3,4),A)\right) +$$
$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 0/B\right]$$
$$p_{u_1}((3,4),A))((1 - r_{u_2}((3,4),A)))r_d((3,4),A) +$$
$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_d((3,4),A) = 0/B\right]$$
$$p_{u_2}((3,4),A))((1 - r_{u_1}((3,4),A)))r_d((3,4),A) +$$
$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_d((3,4),A) = 0/B\right]$$
$$p_{u_2}((3,4),A))p_{u_1}((3,4),A))r_d((3,4),A) +$$
$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 0/B\right]$$
$$(1 - r_{u_1}((3,4),A))((1 - r_{u_2}((3,4),A)))r_d((3,4),A) +$$
$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1/B\right]$$
$$p_{u_1}((3,4),A))((1 - r_{u_2}((3,4),A)))(1 - p_d((3,4),A)) +$$
$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1/B\right]$$
$$p_{u_2}((3,4),A))((1 - r_{u_1}((3,4),A)))(1 - p_d((3,4),A)) +$$
$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1/B\right]$$
$$p_{u_2}((3,4),A)p_{u_1}((3,4),A))(1 - p_d((3,4),A)) +$$
$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1/B\right]$$
$$(1 - r_{u_1}((3,4),A))((1 - r_{u_2}((3,4),A)))(1 - p_d((3,4),A))$$

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος γράφεται χρησιμοποιώντας τον τύπο του Bayes ως εξής :

$$\frac{\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \left\{M_u(5,A)\ \textit{είναι up και}\ n_{(5,A)} < N_{(5,A)}\right\}\right]}{\Pr\left[M_u(5,A)\ \textit{είναι up και}\ n_{(5,A)} < N_{(5,A)}\right]} \cdot K$$

όπου

$$\mathrm{K} = (1 - r_{u_1}((3,4),A))((1 - r_{u_2}((3,4),A)))r_d((3,4),A)$$

Η έκφραση $M_u(5,A)\ \textit{είναι up}$ συνεπάγεται ότι η μηχανή M_5 είναι up και $n_{((3,4),A)} > 0$. Όμως στον αριθμητή του παραπάνω κλάσματος έχουμε ότι $n_{((3,4),A)} = 0$, αυτό σημαίνει ότι $\left\{M_u(5,A)\ \textit{είναι up} \cap n_{((3,4),A)} = 0\right\} = \varnothing$, άρα ο αριθμητής είναι ίσος με μηδέν και κατά συνέπεια ο πρώτος όρος είναι μηδέν.
Για τον ίδιο ακριβώς λόγο και ο δεύτερος όρος του παραπάνω αθροίσματος είναι ίσος με μηδέν.

Ο τρίτος όρος του αθροίσματος είναι επίσης μηδέν. Χρησιμοποιώντας και πάλι τον τύπο του Bayes έχουμε ότι

$$\frac{\Pr\left[n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=1\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0\cap\alpha_d((3,4),A)=0\cap\left\{M_u(5,A)\ \textit{είναι up και}\ n_{(5,A)}<N_{(5,A)}\right\}\right]}{\Pr\left[M_u(5,A)\ \textit{είναι up και}\ n_{(5,A)}<N_{(5,A)}\right]}\Psi$$

όπου

$$\Psi = p_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A)))r_d((3,4),A)$$

Η έκφραση $M_u(5,A)\ \textit{είναι up}$ συνεπάγεται ότι η μηχανή M_5 είναι up και $n_{((3,4),A)}>0$, ενώ αν η μηχανή $M_d((3,4),A)$ είναι up τότε η μηχανή M_5 είναι up και $n_{(5,A)} < N_{(5,A)}$. Αυτά τα δυο μαζί μας οδηγούν στην εξής ισοδυναμία

$$\left\{M_u(5,A)\ \textit{είναι up}\cap n_{(5,A)}<N_{(5,A)}\right\}\Leftrightarrow\left\{M_d((3,4),A)\ \textit{είναι up}\cap n_{((3,4),A)}>0\right\}$$

στον αριθμητή του παραπάνω κλάσματος έχουμε
$\left\{\alpha_d((3,4),A)=0\cap M_u(5,A)\ \textit{είναι up και}\ n_{(5,A)}<N_{(5,A)}\right\}=\varnothing$, οπότε ο αριθμητής του παραπάνω κλάσματος είναι ίσος με το μηδέν και κατά συνέπεια ο τρίτος όρος είναι ίσος με μηδέν.
Για τον ίδιο ακριβώς λόγο και ο τέταρτος, πέμπτος και έκτος όρος είναι ίσοι με μηδέν.

Οι υπόλοιποι όροι αναλύονται ως εξής:
Ο έβδομος όρος γίνεται

$$\Pr\left[n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=1\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0\cap\alpha_d((3,4),A)=1/B\right]\cdot$$
$$p_{u_1}((3,4),A)((1-r_{u_2}((3,4),A)))(1-p_d((3,4),A))=$$
$$\frac{\Pr\left[n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=1\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0\cap\alpha_d((3,4),A)=1\cap B\right]}{\Pr[B]}\cdot$$
$$p_{u_1}((3,4),A)((1-r_{u_2}((3,4),A)))(1-p_d((3,4),A))=$$
$$\frac{\Pr\left[n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=1\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0\cap\alpha_d((3,4),A)=1\right]}{\Pr[B]}\cdot$$
$$p_{u_1}((3,4),A)((1-r_{u_2}((3,4),A)))(1-p_d((3,4),A))=$$
$$\frac{p((3,4),A,1,1,0,1)}{\Pr[B]}\cdot p_{u_1}((3,4),A)((1-r_{u_2}((3,4),A)))(1-p_d((3,4),A))$$

Ο όγδοος όρος γίνεται

$$\Pr\left[n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=1\cap\alpha_d((3,4),A)=1/B\right]$$
$$p_{u_2}((3,4),A)((1-r_{u_1}((3,4),A)))(1-p_d((3,4),A))=$$
$$\frac{\Pr\left[n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=1\cap\alpha_d((3,4),A)=1\cap B\right]}{\Pr[B]}$$
$$p_{u_2}((3,4),A)((1-r_{u_1}((3,4),A)))(1-p_d((3,4),A))=$$
$$\frac{\Pr\left[n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=1\cap\alpha_d((3,4),A)=1\right]}{\Pr[B]}$$
$$p_{u_2}((3,4),A)((1-r_{u_1}((3,4),A)))(1-p_d((3,4),A))=$$
$$\frac{p((3,4),A,1,0,1,1)}{\Pr[B]}p_{u_2}((3,4),A)((1-r_{u_1}((3,4),A)))(1-p_d((3,4),A))$$

Ο ένατος όρος γίνεται

$$\Pr\left[n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=1\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=1\cap\alpha_d((3,4),A)=1/B\right]$$
$$p_{u_2}((3,4),A)p_{u_1}((3,4),A)(1-p_d((3,4),A))=$$
$$\frac{\Pr\left[n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=1\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=1\cap\alpha_d((3,4),A)=1\cap B\right]}{\Pr[B]}$$
$$p_{u_2}((3,4),A)p_{u_1}((3,4),A)(1-p_d((3,4),A))=$$
$$\frac{\Pr\left[n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=1\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=1\cap\alpha_d((3,4),A)=1\right]}{\Pr[B]}$$
$$p_{u_2}((3,4),A)p_{u_1}((3,4),A)(1-p_d((3,4),A))=$$
$$\frac{p((3,4),A,1,1,1,1)}{\Pr[B]}p_{u_2}((3,4),A)p_{u_1}((3,4),A)(1-p_d((3,4),A))=0$$

ο λόγος για τον οποίο ο παραπάνω όρος είναι μηδέν είναι $p((3,4),A,1,1,1,1)=0$ γιατί η αντίστοιχη κατάσταση είναι παροδική.

Ο δέκατος όρος γίνεται

$$\Pr\left[n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0\cap\alpha_d((3,4),A)=1/B\right]$$
$$(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A)))(1-p_d((3,4),A))=$$
$$\frac{\Pr\left[n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0\cap\alpha_d((3,4),A)=1\cap B\right]}{\Pr[B]}$$
$$(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A)))(1-p_d((3,4),A))=$$
$$\frac{\Pr\left[n_{((3,4),A)}=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0\cap\alpha_d((3,4),A)=1\right]}{\Pr[B]}$$
$$(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A)))(1-p_d((3,4),A))=$$
$$\frac{p((3,4),A,1,0,0,1)}{\Pr[B]}(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A)))(1-p_d((3,4),A))$$

Για να έχουμε $n_{((3,4),A)} = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 0$ τη χρονική στιγμή t+1, θα πρέπει να συμβαίνει ένα από τα παρακάτω τη χρονική στιγμή t.

1. $n_{((3,4),A)} = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 0$, καμιά από τις upstream μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$ και $M_{u2}((3,4),A)$ δεν πρέπει να επισκευαστεί με πιθανότητα $(1 - r_{u_1}((3,4),A))((1 - r_{u_2}((3,4),A)))$ και η $M_d((3,4),A)$ δεν θα πρέπει να επισκευαστεί με πιθανότητα $(1 - r_d((3,4),A))$
2. $n_{((3,4),A)} = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1$, καμιά από τις upstream μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$ και $M_{u2}((3,4),A)$ δεν πρέπει να επισκευαστεί με πιθανότητα $(1 - r_{u_1}((3,4),A))((1 - r_{u_2}((3,4),A)))$ και η $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να παρουσιάσει βλάβη αδράνειας με πιθανότητα $v_d((3,4),A)$

Οι υπόλοιπες περιπτώσεις με $n_{((3,4),A)} = 0$ δεν λαμβάνονται υπόψη γιατί οι αντίστοιχες καταστάσεις είναι παροδικές.

Άρα

$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 / M_u(5,A) \text{ είναι up και } n_{(5,A)} < N_{(5,A)}\right] =$$

$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 / B\right]$$

$$(1 - r_{u_1}((3,4),A))((1 - r_{u_2}((3,4),A)))(1 - r_d((3,4),A)) +$$

$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 / B\right]$$

$$v_d((3,4),A)(1 - r_{u_1}((3,4),A))((1 - r_{u_2}((3,4),A)))$$

Ο πρώτος από όρος του παραπάνω αθροίσματος είναι μηδέν διότι η έκφραση $M_u(5,A)$ *είναι up* συνεπάγεται ότι η μηχανή M_5 είναι up και $n_{((3,4),A)} > 0$. Όμως για τον συγκεκριμένο όρο, έχουμε ότι $n_{((3,4),A)} = 0$ και αυτό σημαίνει ότι $\{M_u(5,A) \text{ είναι up} \cap n_{((3,4),A)} = 0\} = \varnothing$. Άρα ο όρος αυτός είναι μηδέν.

Ο δεύτερος όρος γίνεται

$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1/B\right]$$
$$v_d((3,4),A)(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A))) =$$
$$\frac{\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap B\right]}{\Pr[B]}$$
$$v_d((3,4),A)(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A))) =$$
$$\frac{\Pr\left[n_{((3,4),A)} = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1\right]}{\Pr[B]}$$
$$v_d((3,4),A)(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A))) =$$
$$\frac{p_s((3,4),A)}{\Pr[B]} v_d((3,4),A)(1-r_{u_1}((3,4),A))((1-r_{u_2}((3,4),A)))$$

Ο παρονομαστής όλων των παραπάνω κλασμάτων
$\Pr[B] = \Pr\left[M_u(5,A)\ \textit{είναι up και}\ n_{(5,A)} < N_{(5,A)}\right] =$
$$PR(5,A) - v_u(5,A)p((5,A,N,1,0) + r_u(5,A)p((5,A),N,0,0)$$

Γ.4 Εξίσωση ροής (flow rate idle time) για την εικονική μηχανή $M_u(5,B)$

Για την μηχανή M_5 έχουμε ότι η απόδοση της για τα προϊόντα τύπου Β δίνεται από το τύπο:
(ο οποίος παρουσιάζεται από τον Nemec (1999))

$$PR_B(5) = e_5 \Pr\left[A^C \cap B\right] = e_5\left(\Pr[B] - \Pr\left[A \cap B\right]\right) =$$
$$e_5\left(p_s((3,4),A) + p_b(5,A) + p((3,4),A,0,0,0,0) + p((5,A),N,0,0) - p_s((3,4),B) - p_b(5,B)\right)$$
όπου $A, B, A^C\ \textit{και}\ \mathrm{B}^C$ είναι τα σύνολα που ορίστηκαν στην παράγραφο Γ.2.

(Γ21)

Όμως $PR_B(5) = PR(5,B)$ λόγω του ότι ισχύει η αρχή διατήρησης της ροής για κάθε τύπο προϊόντος.

Επίσης

$$PR_u(5,B) = e_u(1-p_b) - e_u v_u p_b\left(\underbrace{\frac{r_u + r_d - p_u r_d - 2r_u r_d}{r_u\left(r_u + r_d - r_u r_d\right)}}_{A}\right) \Rightarrow$$

$$PR_u(5,B) = e_u - e_u p_b(1 + v_u A) \Rightarrow p_b = \frac{e_u - PR_u(5,B)}{e_u\left(1 + v_u \frac{r_u + r_d - p_u r_d - 2r_u r_d}{r_u \underbrace{\left(r_u + r_d - r_u r_d\right)}_{R}}\right)} =$$

$$\frac{e_u - PR_u(5,B)}{e_u + e_u v_u \frac{r_u + r_d - p_u r_d - 2r_u r_d}{r_u R}} = \frac{\left(e_u - PR_u(5,B)\right) r_u R}{e_u\left(r_u R + v_u\left(R - r_u r_d - p_u r_d\right)\right)}$$

(Γ22)

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας η μηχανή M_5 να είναι starved για τα προϊόντα τύπου B, έχουμε

$$PR((3,4),B) = e_d(1-p_s) + e_d v_d p_s \left[\underbrace{\frac{r_d + p_d - 1}{r_d} - \frac{(1-r_{u_1})(1-r_{u_2})(r_d + p_d)}{1-(1-r_{u_1})(1-r_{u_2})(1-r_d)}}_{F} \right] \Rightarrow$$

$$p_s = \frac{PR((3,4),B) - e_d}{e_d(v_d F - 1)} \qquad (\Gamma 23)$$

Ορίζουμε

$$C = p_s((3,4),A) + p_b(5,A) + p((3,4),A,0,0,0,0) + p((5,A),N,0,0)$$

Αντικαθιστώντας τις (Γ22) και (Γ23) στην (Γ21), έχουμε

$$PR_u(5,B) = e_5\left(C - \left(1 - \frac{PR_u}{e_u}\right)Q - \frac{PR((3,4),B) - e_d}{e_d(v_d F - 1)}\right) \text{όπου } Q = \frac{r_u R}{\left(r_u R + v_u\left(R - r_u r_d - p_u r_d\right)\right)}$$

$$PR_u(5,B) = e_5\left(C - \left(1 - \frac{PR_u}{e_u}\right)Q - \frac{PR((3,4),B) - e_d}{e_d(v_d B - 1)}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{PR_u(5,B)}{e_5} = \left(C - \left(1 - \frac{PR_u}{e_u}\right)Q - \left(\frac{PR((3,4),B)}{e_d} - 1\right)Z\right)$$

$$\frac{PR_u(5,B)}{e_5} - C = -Q + \frac{PR_u}{e_u}Q - \frac{PR((3,4),B)}{e_d}Z + Z \Rightarrow$$

$$\frac{E_u(5,B)}{e_5} - C + Q - Z = E_u Q\left(1 + \frac{p_u}{r_u}\right) - E((3,4),B)Z\left(1 + \frac{p_d}{r_d}\right) \Rightarrow$$

$$p_u = r_u\left(\frac{\frac{E_u(5,B)}{e_5} - C + Q - Z + E((3,4),B)Z\left(1 + \frac{p_d}{r_d}\right)}{E_u(5,B)Q}\right),$$

όπου $Z = \frac{1}{(v_d B - 1)}$ και $PR_u(5,B) = PR_u$

Γ.5 Η εξίσωση της βλάβης αδράνειας για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,A)$

Η πιθανότητα αδράνειας $v_u(5,A)$ εκφράζει το γεγονός η μηχανή M_5 να είναι down τη χρονική στιγμή t+1, δοθέντος ότι ήταν up τη χρονική στιγμή t και starved για τα προϊόντα τύπου Α.

$$v_u(5,A) = \Pr[\alpha_5(t+1)=0/\alpha_5(t)=1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)} \cap n_{((3,4),B)}(t-1)>0 \cap n_{(5,B)}(t-1)<N_{(5,B)}] =$$
$$p_5 \Pr[\alpha_5(t)=1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)} \cap n_{((3,4),B)}(t-1)>0 \cap n_{(5,B)}(t-1)<N_{(5,B)}]$$

Ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα

$$A = \{\alpha_5(t)=1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}\}$$
$$B = \{n_{((3,4),B)}(t-1)>0 \cap n_{(5,B)}(t-1)<N_{(5,B)}\}$$

Ισχύει ότι

$$\Pr[A] = \Pr[A \cap B] + \Pr[A \cap B^C] \Rightarrow$$
$$\Pr[\alpha_5(t)=1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)}] =$$
$$\Pr[\alpha_5(t)=1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)} \cap n_{((3,4),B)}(t-1)>0 \cap n_{(5,B)}(t-1)<N_{(5,B)}] +$$
$$\Pr[\alpha_5(t)=1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=0 \cap n_{(5,A)}(t-1)<N_{(5,A)} \cap (n_{((3,4),B)}(t-1)=0 \cup n_{(5,B)}(t-1)=N_{(5,B)})]$$
$$\Pr[A] = p_s((3,4),A)$$
$$\Pr[A \cap B^C] = \frac{p_s((3,4),B)+p_b(5,B)}{p_s((3,4),A)+p_b(5,A)} p_s((3,4),A)$$

Άρα

$$\Pr[A \cap B] = p_s((3,4),A) - \frac{p_s((3,4),B)+p_b(5,B)}{p_s((3,4),A)+p_b(5,A)} p_s((3,4),A)$$

Τελικά η πιθανότητα βλάβης αδράνειας δίνεται από τον τύπο

$$v_u(5,A) = p_5 p_s((3,4),A)\left(1 - \frac{p_s((3,4),B)+p_b(5,B)}{p_s((3,4),A)+p_b(5,A)}\right)$$

Γ.6 Η εξίσωση της βλάβης αδράνειας για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,B)$

Η πιθανότητα αδράνειας $v_u(5,B)$ εκφράζει το γεγονός η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(5,B)$ να παρουσιάσει βλάβη δεδομένου ότι είναι blocked για τα προϊόντα τύπου Β.

Δηλαδή

$$v_u(5,B) = \Pr[\alpha_5(t+1)=0 \cap n_{((3,4),A)}(t)>0 \cap n_{(5,A)}(t)<N_{(5,A)} / \alpha_5(t)=1 \cap (n_{((3,4),A)}(t-1)=0 \cup n_{(5,A)}(t-1)=N_{(5,A)}) \cap n_{((3,4),B)}(t-1)>0 \cap n_{(5,B)}(t-1)=N_{(5,B)}]$$

Ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα

$$U = \left\{\alpha_5(t+1) = 0 \cap n_{((3,4),A)}(t) > 0 \cap n_{(5,A)}(t) < N_{(5,A)}\right\}$$
$$V = \left\{\alpha_5(t) = 1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) = 0 \cap n_{(5,A)}(t-1) < N_{(5,A)} \cap n_{((3,4),B)}(t-1) > 0 \cap n_{(5,B)}(t-1) = N_{(5,B)}\right\}$$
$$W = \left\{\alpha_5(t) = 1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) > 0 \cap n_{(5,A)}(t-1) = N_{(5,A)} \cap n_{((3,4),B)}(t-1) > 0 \cap n_{(5,B)}(t-1) = N_{(5,B)}\right\}$$

Έχουμε

$$v_u(5,B) = \Pr[U/V \cup W] = \frac{\Pr[U/V]\Pr[V] + \Pr[U/W]\Pr[W]}{\Pr[V \cup W]}$$

Θα αναλύσουμε τώρα ένα προς ένα τους παραπάνω όρους

$\Pr[U/V] = \left(1 - \left(1 - r_{u_1}((3,4),A)\right)\left(1 - r_{u_1}((3,4),A)\right)\right)$ η πιθανότητα αυτή εκφράζει το γεγονός ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ να πάψει να είναι γεμάτος.

$\Pr[U/W] = r_d(5,A)$, η πιθανότητα αυτή εκφράζει το γεγονός ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(5,A)}$ να πάψει να είναι γεμάτος.

$\Pr[V \cup W] = p_b(5,B)$

Έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει ότι (η απόδειξη για αυτό παρουσιάζεται στον Nemec (1999)).

$$\Pr[V] = p_b(5,B)\frac{p_s((3,4),A)}{p_s((3,4),A) + p_b(5,A)} \text{ και } \Pr[W] = p_b(5,B)\frac{p_b(5,A)}{p_s((3,4),A) + p_b(5,A)}$$

Γ.7 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(1,A)$

Η πιθανότητα $r_d(1,A)$ εκφράζει το γεγονός ότι η μηχανή M_3 παράγει ένα προϊόν τύπου Α τη χρονική στιγμή t+1, δοθέντος ότι ήταν down και όχι starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t. Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί λόγοι για τους οποίους η μηχανή M_3 δεν παράγει ένα προϊόν τύπου Α τη χρονική στιγμή t, δοθέντος ότι δεν ήταν starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.

1. Η M_3 είναι down τη χρονική στιγμή t και δεν είναι blocked για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.
2. Η M_3 είναι down τη χρονική στιγμή t και είναι blocked για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.
3. Η M_3 είναι up τη χρονική στιγμή t και είναι blocked για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.

Άρα

$$\begin{aligned} r_d(1,A) = \Pr\Big[&\alpha_3(t+1) = 1 \cap n_{(1,A)}(t) > 0 \cap n_{((3,4),A)} < N_{((3,4),A)} / \\ &\left(\left\{\alpha_3(t) = 0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) < N_{((3,4),A)}\right\} \cup\right. \\ &\left\{\alpha_3(t) = 0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)}\right\} \cup \\ &\left.\left\{\alpha_3(t) = 1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)}\right\}\right) \cap n_{(1,A)}(t-1) > 0\Big] \end{aligned}$$

Ορίζουμε τώρα τα παρακάτω γεγονότα

$$U = \left\{\alpha_3(t+1) = 1 \cap n_{(1,A)}(t) > 0 \cap n_{((3,4),A)}(t) < N_{((3,4),A)}\right\}$$
$$X = \left\{\alpha_3(t) = 0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) < N_{((3,4),A)} \cap n_{(1,A)}(t-1) > 0\right\}$$
$$Y = \left\{\alpha_3(t) = 0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} \cap n_{(1,A)}(t-1) > 0\right\}$$
$$Z = \left\{\alpha_3(t) = 1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} \cap n_{(1,A)}(t-1) > 0\right\}$$

Τα γεγονότα αυτά είναι ξένα μεταξύ τους, οπότε έχουμε ότι

$$r_d(1,A) = \frac{\Pr[U/X]\Pr[X] + \Pr[U/Y]\Pr[Y] + \Pr[U/Z]\Pr[Z]}{\Pr[X \cup Y \cup Z]}$$

Υπολογισμός της ποσότητας $\Pr[U/X]$

Είναι προφανές ότι $\Pr[U/X] = r_3$

Υπολογισμός της ποσότητας $\Pr[U/Y]$:

Η ποσότητα $\Pr[U/Y]$ εκφράζει τη πραγματοποίηση δυο γεγονότων.
Το πρώτο γεγονός είναι ότι η μηχανή M_3 επιδιορθώνεται με πιθανότητα r_3 και το δεύτερο γεγονός είναι ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ παύει να είναι γεμάτος . Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να υπάρξει επιδιόρθωση της downstream μηχανής $M_d((3,4),A)$ με πιθανότητα $r_d((3,4),A)$.

Συνολικά η ποσότητα $\Pr[U/Y]$ είναι ίση με $\Pr[U/Y] = r_3 \cdot r_d((3,4),A)$

Υπολογισμός της ποσότητας $\Pr[U/Z]$:

Η ποσότητα $\Pr[U/Z]$ εκφράζει τη πραγματοποίηση δυο γεγονότων.
Το πρώτο γεγονός είναι ότι η μηχανή $M_{u1}(1,A)$ δεν πρέπει να χαλάσει ενώ είναι μπλοκαρισμένη για τα προϊόντα τύπου Α γεγονός που συμβαίνει με πιθανότητα $1 - v_{u_1}((3,4),A)$ και το δεύτερο γεγονός είναι ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ παύει να είναι γεμάτος . Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να υπάρξει επιδιόρθωση της downstream μηχανής $M_d((3,4),A)$ με πιθανότητα $r_d((3,4),A)$.

Συνολικά λοιπόν η ποσότητα $\Pr[U/Z]$ είναι ίση με
$\Pr[U/Z] = r_d((3,4),A)\left(1 - v_{u_1}((3,4),A)\right)$

Θα υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα του γεγονότος Χ.
Υπενθυμίζουμε ότι
$X = \left\{\alpha_3(t) = 0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) < N_{((3,4),A)} \cap n_{(1,A)}(t-1) > 0\right\}$
Η ΄΄εικονική΄΄ downstream μηχανή $M_d(1,A)$ είναι down τη χρονική στιγμή t και όχι starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1 αν συμβαίνει ένα από τα παρακάτω

- Η M_3 είναι down τη χρονική στιγμή t και δεν είναι blocked ούτε starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.

- Η M_3 είναι down τη χρονική στιγμή t και blocked αλλά όχι starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.
- Η M_3 είναι up τη χρονική στιγμή t και blocked αλλά όχι starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.

Αυτό σημαίνει ότι

$$\{\alpha_d(1,A)=0 \cap n_{(1,A)}>0\} \Leftrightarrow$$
$$\{\alpha_3(t)=0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)<N_{((3,4),A)} \cap n_{(1,A)}(t-1)>0\} \cup$$
$$\{\alpha_3(t)=0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)} \cap n_{(1,A)}(t-1)>0\} \cup$$
$$\{\alpha_3(t)=1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)} \cap n_{(1,A)}(t-1)>0\}$$

Άρα

$$\Pr[X]=\Pr[\alpha_d(1,A)=0 \cap n_{(1,A)}>0]-$$
$$\Pr[\alpha_3(t)=0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)} \cap n_{(1,A)}(t-1)>0]-$$
$$\Pr[\alpha_3(t)=1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)} \cap n_{(1,A)}(t-1)>0]$$

Κάθε ένας από τους όρους αναλύεται ως εξής:

$$\Pr[\alpha_3(t)=0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)} \cap n_{(1,A)}(t-1)>0]=$$
$$p((3,4),A,N,0,0,0)+p((3,4),A,N,0,1,0)$$

Οι πιθανότητες $p((3,4),A,N,0,1,1)$ και $p((3,4),A,N,0,0,1)$ δεν υπολογίζονται γιατί είναι ίσες με μηδέν διότι οι αντίστοιχες καταστάσεις είναι παροδικές.

Επίσης
$$\Pr[\alpha_3(t)=1 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)} \cap n_{(1,A)}(t-1)>0]=$$
$$p((3,4),A,N,1,0,0)+p((3,4),A,N,1,1,0)=p_{b3}((3,4),A)$$

Οι πιθανότητες $p((3,4),A,N,1,0,1)$ και $p((3,4),A,N,1,1,1)$ δεν υπολογίζονται γιατί είναι ίσες με μηδέν διότι οι αντίστοιχες καταστάσεις είναι παροδικές.

Θα αναλύσουμε τώρα την πιθανότητα $\Pr[\alpha_d(1,A)=0 \cap n_{(1,A)}>0]$

Για την ΄΄εικονική΄΄ downstream μηχανή $M_d(1,A)$ η ισότητα ότι για κάθε βλάβη υπάρχει και η αντίστοιχη επιδιόρθωση έχει την ακόλουθη μορφή. .(βλέπε Nemec (1999)).

$$r_d(1,A)\Pr\left[\alpha_d(1,A)=0\cap n_{(1,A)}>0\right]+r_d(1,A)\Pr\left[\alpha_d(1,A)=0\cap n_{(1,A)}=0\right]=$$
$$p_d(1,A)\Pr\left[\alpha_d(1,A)=1\cap n_{(1,A)}>0\right]+v_d(1,A)\Pr\left[\alpha_d(1,A)=1\cap n_{(1,A)}=0\right]\Rightarrow$$
$$\Pr\left[\alpha_d(1,A)=0\cap n_{(1,A)}>0\right]=\frac{p_d(1,A)}{r_d(1,A)}\Pr\left[\alpha_d(1,A)=1\cap n_{(1,A)}>0\right]+$$
$$\frac{v_d(1,A)}{r_d(1,A)}\Pr\left[\alpha_d(1,A)=1\cap n_{(1,A)}=0\right]-\Pr\left[\alpha_d(1,A)=0\cap n_{(1,A)}=0\right]$$

Επίσης ισχύει ότι (Nemec (1999)

$$PR_d(1,A)=PR(1,A)=\Pr\left[\alpha_d(1,A)=1\cap n_{(1,A)}>0\right]+v_d(1,A)p(1,A,0,0,1)-$$
$$r_d\,p(1,A,0,0,0)$$

$$\Pr\left[\alpha_d(1,A)=0\cap n_{(1,A)}=0\right]=p(1,A,0,0,0)$$
$$\Pr\left[\alpha_d(1,A)=1\cap n_{(1,A)}=0\right]=p_s(1,A)$$

τελικά έχουμε

$$\Pr\left[\alpha_d(1,A)=0\cap n_{(1,A)}>0\right]=$$
$$=\frac{p_d(1,A)}{r_d(1,A)}\left(E(1,A)-v_d(1,A)p(1,A,0,0,1)+r_d\,p(1,A,0,0,0)\right)+$$
$$\frac{v_d(1,A)}{r_d(1,A)}p_s(1,A)-p(1,A,0,0,0)$$

Άρα τελικά έχουμε ότι

$$\Pr[X]=\frac{p_d(1,A)}{r_d(1,A)}\left(PR(1,A)-v_d(1,A)p(1,A,0,0,1)+r_d\,p(1,A,0,0,0)\right)+$$
$$\frac{v_d(1,A)}{r_d(1,A)}p_s(1,A)-p(1,A,0,0,0)-p((3,4),A,N,0,0,0)-p((3,4),A,N,0,1,0)-$$
$$p((3,4),A,N,1,0,0)-p((3,4),A,N,1,1,0)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα $\Pr[Y]$:

$$\Pr[Y]=\Pr\left[\alpha_3(t)=0\cap n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}\cap n_{(1,A)}(t-1)>0\right]=$$
$$p((3,4),A,N,0,0,0)+p((3,4),A,N,0,1,0)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τον όρο $\Pr[Z]$:

$$\Pr[Z]=\Pr\left[\alpha_3(t)=1\cap n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}\cap n_{(1,A)}(t-1)>0\right]=$$
$$p((3,4),A,N,1,0,0)+p((3,4),A,N,1,1,0)=p_{b3}((3,4),A)$$

Επειδή τα γεγονότα X,Y,Z είναι ξένα μεταξύ τους έχουμε ότι

$$\Pr[X\cup Y\cup Z]=\Pr[X]+\Pr[Y]+\Pr[Z]$$

Γ.8 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(1,B)$

Η πιθανότητα $r_d(1,A)$ εκφράζει το γεγονός η μηχανή $M_d(1,B)$ να μπορέσει να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος τύπου Β τη χρονική στιγμή t+1, δοθέντος ότι δεν μπορούσε να παράγει προϊόντα τύπου Β και δεν ήταν starved για τα προϊόντα τύπου Β τη χρονική στιγμή t.
Αυτό είναι ίδιο με τη πιθανότητα η μηχανή M_3 να φτιάξει ένα προϊόν τύπου Β τη χρονική στιγμή t+1 δοθέντος ότι δεν μπορούσε να φτιάξει ένα προϊόν τύπου Β τη χρονική στιγμή t και δεν ήταν starved για τα προϊόντα τύπου Β τη χρονική στιγμή t-1.

Οι διαφορετικοί λόγοι για τους οποίους η μηχανή M_3 δεν παράγει προϊόντα τύπου Β τη χρονική στιγμή t αλλά μπορεί να φτιάξει προϊόντα τύπου Β τη χρονική t+1 είναι οι εξής

1. Η M_3 είναι up τη χρονική στιγμή t, starved η blocked για τα προϊόντα τύπου Α και blocked για τα προϊόντα τύπου Β τη χρονική στιγμή t-1.
2. Η M_3 είναι up τη χρονική στιγμή t, παράγοντας προϊόντα τύπου Α αλλά είναι έτοιμη να γίνει blocked ή starved για τα προϊόντα τύπου Α και αμέσως μετά θα παράγει προϊόντα τύπου Β.
3. Η M_3 είναι down τη χρονική στιγμή t και μόλις επιδιορθωθεί θα παράγει προϊόντα τύπου Β.

Ο πρώτος λόγος περιγράφεται από το γεγονός

$$I = \left\{\alpha_3(t) = 1 \cap A^C \cap n_{(1,B)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) = N_{((3,4),B)}\right\}$$

Ο δεύτερος λόγος περιγράφεται από τα εξής δυο γεγονότα

$$V_1 = \left\{\alpha_3(t) = 1 \cap \left(n_{(1,A)}(t-1) = 1 \cup n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} - 1\right) \cap n_{(1,B)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) < N_{((3,4),B)}\right\}$$

$$V_2 = \left\{\alpha_3(t) = 1 \cap \left(n_{(1,A)}(t-1) = 1 \cup n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} - 1\right) \cap n_{(1,B)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) = N_{((3,4),B)}\right\}$$

Ο τρίτος λόγος περιγράφεται από το γεγονός

$$D = \left\{\alpha_3(t) = 0 \cap \left(n_{(1,A)}(t-1) = 0 \cup n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)}\right) \cap n_{(1,B)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) < N_{(5,B)}\right\}$$

Επίσης ορίζουμε το γεγονός

$$U = \left\{\alpha_3(t+1) = 1 \cap \left(n_{(1,A)}(t) = 0 \cup n_{((3,4),A)}(t) = N_{((3,4),A)}\right) \cap n_{(1,B)}(t) > 0 \cap n_{((3,4),B)}(t) < N_{((3,4),B)}\right\}$$

χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω γεγονότα η πιθανότητα $r_d(1,B)$ γράφεται ως εξής

$$r_d(1,B) = \Pr[U / I \cup V_1 \cup V_2 \cup D] =$$
$$= \frac{\Pr[U / I]\Pr[I] + \Pr[U / V_1]\Pr[V_1] + \Pr[U / V_2]\Pr[V_2] + \Pr[U / D]\Pr[D]}{\Pr[I \cup V_1 \cup V_2 \cup D]}$$

Υπολογισμός του όρου $\Pr[U / I]$:

Η πιθανότητα αυτή εκφράζει το γεγονός η μηχανή M_3 να ολοκληρώσει τη παραγωγή ενός προϊόντος τύπου Β τη χρονική στιγμή t+1, δοθέντος ότι δεν μπορούσε να επεξεργαστεί ούτε προϊόντα τύπου Α (γιατί ήταν blocked ή starved για τα προϊόντα τύπου Α) , ούτε προϊόντα τύπου Β γιατί ήταν blocked για τα προϊόντα τύπου Β.
Για να είναι σε θέση η μηχανή M_3 να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος τύπου Β τη χρονική στιγμή t+1, θα πρέπει δυο γεγονότα να συμβούν ταυτόχρονα
Το πρώτο γεγονός είναι ότι θα πρέπει ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),B)}$ τη χρονική στιγμή t+1 να πάψει να είναι γεμάτος και το δεύτερο γεγονός είναι ότι θα πρέπει η μηχανή M_3 να εξακολουθήσει τη χρονική στιγμή να είναι blocked ή starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t+1.

Για να συμβεί το πρώτο γεγονός θα πρέπει η downstream ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d((3,4),B)$ να αφαιρέσει ένα προϊόν από αποθηκευτικό χώρο $B_{((3,4),B)}$. Αυτό μπορεί να συμβεί αν υπάρξει επιδιόρθωση της βλάβης που παρουσιάστηκε σε κάποιο σημείο της γραμμής downstream του αποθηκευτικού χώρου $B_{((3,4),B)}$ με αποτέλεσμα ο αποθηκευτικός χώρος να βρεθεί γεμάτος. Αυτή η επιδιόρθωση μπορεί να γίνει με πιθανότητα

$$r_d\ ((3,4),B)$$

Το δεύτερο γεγονός αναλύεται σε δυο επιμέρους γεγονότα.

Αν η μηχανή M_3 ήταν starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t, θα πρέπει να εξακολουθήσει να είναι starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t+1. Χρησιμοποιώντας και τροποποιώντας ελαφρά ένα τύπο που παρουσιάζεται από τον Nemec (1999), αυτό το γεγονός εκφράζεται από τη πιθανότητα:

$$(1-r_u\ (1,A))\frac{p_s(1,A)}{p_s(1,A)+p_{b3}((3,4),A)}$$

Αν η μηχανή M_3 ήταν blockedγια τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t, θα πρέπει να εξακολουθήσει να είναι blocked για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t+1. Χρησιμοποιώντας και τροποποιώντας ελαφρά ένα τύπο που παρουσιάζεται από τον Nemec (1999), αυτό το γεγονός εκφράζεται από τη πιθανότητα:

$$\left(1-r_d(((3,4),A)\right)\frac{p_{b3}((3,4),A)}{p_s(1,A)+p_{b3}((3,4),A)}$$

Συνολικά λοιπόν το δεύτερο γεγονός μπορεί να συμβεί με πιθανότητα

$$(1-r_u\ (1,A))\frac{p_s(1,A)}{p_s(1,A)+p_{b3}((3,4),A)}+\left(1-r_d(((3,4),A)\right)\frac{p_{b3}((3,4),A)}{p_s(1,A)+p_{b3}((3,4),A)}$$

Άρα

$$\Pr[U/I]=\Omega_1(\Omega_2+\Omega_3)$$

$$\Omega_1=r_d\ ((3,4),B)$$

$$\Omega_2 = (1 - r_u\ (1, A)) \frac{p_s(1, A)}{p_s(1, A) + p_{b3}((3,4), A)}$$

$$\Omega_3 = \left(1 - r_d(((3,4), A)\right) \frac{p_{b3}((3,4), A)}{p_s(1, A) + p_{b3}((3,4), A)}$$

Υπολογισμός της ποσότητας $\Pr[U / D]$:

Αυτός ο όρος εκφράζει τη πιθανότητα του γεγονότος η μηχανή M_3 να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος τύπου Β τη χρονική στιγμή t+1, δοθέντος ότι δεν παρήγαγε προϊόντα τύπου Β γιατί ήταν down αλλά ήταν και starved ή blocked για τα προϊόντα τύπου Α.

Πρώτα από όλα θα πρέπει η μηχανή M_5 να επισκευαστεί και αυτό μπορεί να συμβεί με πιθανότητα r_3.

Επίσης αν η μηχανή M_3 ήταν down και starved τη χρονική στιγμή t για τα προϊόντα τύπου Α, θα πρέπει να εξακολουθήσει να είναι starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t+1.
Τροποποιώντας ελαφρά ένα τύπο που παρουσιάζεται από τον Nemec (1999), αυτό το γεγονός εκφράζεται από τη πιθανότητα:

$$(1 - r_u\ (1, A)) \frac{p\ (1, A,0,0,0)}{p\ (1, A,0,0,0) + p(((3,4), A), N,0,0,0) + p(((3,4), A), N,0,1,0)}$$

Αν η μηχανή M_3 ήταν down και blocked τη χρονική στιγμή t για τα προϊόντα τύπου Α, θα πρέπει να εξακολουθήσει να είναι blocked για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t+1.
Τροποποιώντας ελαφρά ένα τύπο που παρουσιάζεται από τον Nemec (1999), αυτό το γεγονός εκφράζεται από τη πιθανότητα:

$$\left(1 - r_d((3,4), A)\right) \frac{p\ (((3,4), A), N0,0,0) + p\ (((3,4), A), N0,1,0)}{p\ (1, A,0,0,0) + p\ (((3,4), A), N0,0,0) + p\ (((3,4), A), N0,1,0)}$$

Άρα
$\Pr[U / D] = \Psi_1(\Psi_2 + \Psi_3)$
όπου
$\Psi_1 = r_3$

$$\Psi_2 = (1 - r_u\ (1, A)) \frac{p\ (1, A,0,0,0)}{p\ (1, A,0,0,0) + p(((3,4), A), N,0,0,0) + p(((3,4), A), N,0,1,0)}$$

$$\Psi_3 = \left(1 - r_d((3,4), A)\right) \frac{p\ (((3,4), A), N0,0,0) + p\ (((3,4), A), N0,1,0)}{p\ (1, A,0,0,0) + p\ (((3,4), A), N0,0,0) + p\ (((3,4), A), N0,1,0)}$$

Υπολογισμός της ποσότητας $\Pr[U/V_1]$:

Η πιθανότητα αυτή εκφράζει το γεγονός η μηχανή M_3 να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος τη χρονική στιγμή t+1, δοθέντος ότι η μηχανή M_5 ήταν up και ΄΄μόλις΄΄ έγινε blocked ή starved για τα προϊόντα τύπου A και δεν ήταν blocked ή starved για τα προϊόντα τύπου B τη χρονική στιγμή t..

Πρώτα θα ασχοληθούμε με το γεγονός ότι τη χρονική στιγμή t-1, ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(1,A)}$ έχει μόνο ένα προϊόν ή ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ έχει μόνο ένα χώρο ελεύθερο δηλαδή έχει $N_{((3,4),A)}$-1 προϊόντα.

Για να γίνει η M_3 starved τη χρονική στιγμή t, ενώ τη χρονική στιγμή t-1 ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(1,A)}$ είχε μόνο ένα προϊόν θα πρέπει η upstream μηχανή $M_u(1,A)$ να μην προσθέσει προϊόν στον αποθηκευτικό χώρο $B_{(1,A)}$.
Το γεγονός ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ έχει μόνο ένα προϊόν εκφράζεται από τις πιθανότητες του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(1,A) για τις οποίες n=1 και επειδή ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(1,A)}$ πρέπει να είναι άδειος τη χρονική στιγμή t, θα πρέπει $\alpha_d(1,A)=1$.
Οι πιθανότητες αυτές είναι οι $p(1,A,1,0,1)$, $p(1,A,1,1,1)$,

Ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(1,A)}$ είναι άδειος τη χρονική στιγμή t με πιθανότητα η οποία δίνεται από τον τύπο όπου

$$\frac{\big(1-r_u(1,A)\big)p(1,A,1,0,1)+p_u(1,A)\,p_u(1,A,1,1,1)}{p(1,A,1,0,1)+p_u(1,A,1,1,1)}$$

Ομοίως για να γίνει η M_3 blocked τη χρονική στιγμή t, ενώ τη χρονική στιγμή t-1 ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ είχε $N_{((3,4),A)}$-1 προϊόντα, θα πρέπει η downstream μηχανή $M_d((3,4),A)$ να μην αφαιρέσει προϊόν στον αποθηκευτικό χώρο $B_{((3,4),A)}$.
Το γεγονός ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ έχει $N_{((3,4),A)}$-1 προϊόντα εκφράζεται από τις πιθανότητες του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L((3,4),A) για τις οποίες n=N-1 και επειδή ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ πρέπει να είναι γεμάτος τη χρονική στιγμή t, θα πρέπει $\alpha_{u_1}((3,4),A)=1$.
Ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$είναι γεμάτος τη χρονική στιγμή t με πιθανότητα η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\frac{M}{L}$$

όπου

$$M = \big(1 - r_d((3,4), A)\big)p((3,4), A, N-1,1,0,0) + p_d((3,4), A)p((3,4), A, N-1,1,0,1) +$$
$$\big(1 - r_d((3,4), A)\big)p((3,4), A, N-1,1,1,0) + p_d((3,4), A)p((3,4), A, N-1,1,1,1) +$$
$$p((3,4), A, N-2,1,1,1)p_d((3,4), A)\big(1 - p_{u_2}((3,4), A)\big) +$$
$$p((3,4), A, N-2,1,1,0)\big(1 - r_d((3,4), A)\big)\big(1 - p_{u_2}((3,4), A)\big)$$

και

$$L = p((3,4), A, N-1,1,0,0) + p((3,4), A, N-1,1,0,1) + p((3,4), A, N-1,1,1,0) +$$
$$p((3,4), A, N-1,1,1,1) + p((3,4), A, N-2,1,1,1) + p((3,4), A, N-2,1,1,0)$$

Άρα τελικά

$$\Pr[U/V_1] = \frac{\big(1 - r_u(1, A)\big)p(1, A,1,0,1) + p_u(1, A)p_u(1, A,1,1,1)}{p(1, A,1,0,1) + p_u(1, A,1,1,1)} + \frac{\mathrm{M}}{L}$$

Υπολογισμός του όρου $\Pr[U/V_2]$

Για τον υπολογισμό του όρου $\Pr[U/V_2]$ ισχύει ότι και προηγούμενος αλλά επιπλέον η μηχανή M_3 θα πρέπει τη χρονική στιγμή t να πάψει να είναι blocked για τα προϊόντα τύπου B, δεδομένου ότι ήταν blocked τη χρονική για τα προϊόντα τύπου B στιγμή t-1.
Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η downstream μηχανή $M_d((3,4),B)$ να αφαιρέσει ένα προϊόν από τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((3,4),B)}$. Αυτό γίνεται με πιθανότητα $r_d((3,4), B)$

Άρα τελικά ο όρος $\Pr[U/V_2]$ παίρνει τη μορφή :

$$\Pr[U/V_2] = r_d((3,4), B)\Pr[U/V_1]$$

Θα αναλύσουμε τώρα ένα προς ένα τα γεγονότα D,U,I_1 και I_2.

Το γεγονός D είναι

$$D = \{\alpha_3(t) = 0 \cap \big(n_{(1,A)}(t-1) = 0 \cup n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)}\big) \cap$$
$$n_{(1,B)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) < N_{((3,4),B)}\}$$

Ισχύει ότι:

$$\{\alpha_d(1,B)=0\cap n_{(1,B)}>0\}\Leftrightarrow$$
$$\{\alpha_3(t)=1\cap n_{(1,A)}(t-1)>0\cap n_{((3,4),A)}(t-1)<N_{((3,4),A)}\cap n_{(1,B)}(t-1)>0\cap n_{((3,4),B)}(t-1)<N_{((3,4),B)}\}\cup$$
$$\{\alpha_3(t)=1\cap n_{(1,A)}(t-1)>0\cap n_{((3,4),A)}(t-1)<N_{((3,4),A)}\cap n_{(1,B)}(t-1)>0\cap n_{((3,4),B)}(t-1)=N_{((3,4),B)}\}\cup$$
$$\{\alpha_3(t)=1\cap (n_{(1,A)}(t-1)=0\cup n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)})\cap n_{(1,B)}(t-1)>0\cap n_{((3,4),B)}(t-1)=N_{((3,4),B)}\}\cup$$
$$\{\alpha_3(t)=0\cap n_{(1,A)}(t-1)>0\cap n_{((3,4),A)}(t-1)<N_{((3,4),A)}\cap n_{(1,B)}(t-1)>0\cap n_{((3,4),B)}(t-1)<N_{((3,4),B)}\}\cup$$
$$\{\alpha_5(t)=0\cap (n_{(1,A)}(t-1)=0\cup n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)})\cap n_{((3,4),B)}(t-1)>0\cap n_{(5,B)}(t-1)<N_{(5,B)}\}\cup$$
$$\{\alpha_5(t)=0\cap n_{(1,A)}(t-1)>0\cap n_{((3,4),A)}(t-1)<N_{((3,4),A)}\cap n_{(1,B)}(t-1)>0\cap n_{((3,4),B)}(t-1)=N_{((3,4),B)}\}$$

Ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα

$$A=\{n_{(1,A)}>0\cap n_{((3,4),A)}<N_{((3,4),A)}\}$$
$$A^C=\{n_{(1,A)}=0\cup n_{((3,4),A)}=N_{((3,4),A)}\}$$
$$B=\{n_{(1,B)}>0\cap n_{((3,4),B)}<N_{((3,4),B)}\}$$
$$B^C=\{n_{(1,B)}=0\cup n_{((3,4),B)}=N_{((3,4),B)}\}$$

Έχουμε

$$\{\alpha_d(1,B)=0\cap n_{(1,B)}>0\}\Leftrightarrow$$
$$\{A\cap B\}\cup\{A\cap n_{(1,B)}>0\cap n_{((3,4),B)}=N_{((3,4),B)}\}\cup$$
$$\{\alpha_3(t)=1\cap A^C\cap n_{(1,B)}(t-1)>0\cap n_{((3,4),B)}(t-1)=N_{((3,4),B)}\}\cup D$$

Άρα

$$\Pr[D]=\Pr[\{\alpha_d(1,B)=0\cap n_{(1,B)}>0\}]-\Pr[\{A\cap B\}]-$$
$$\Pr[\{A\cap n_{(1,B)}>0\cap n_{((3,4),B)}=N_{((3,4),B)}\}]-$$
$$\Pr[\{\alpha_3(t)=1\cap A^C\cap n_{(1,B)}(t-1)>0\cap n_{((3,4),B)}(t-1)=N_{((3,4),B)}\}]$$

Όμως

$$p_s(1,B)=\Pr[\alpha_3(t)=1\cap A^C\cap n_{(1,B)}(t-1)=0\cap n_{((3,4),B)}(t-1)<N_{((3,4),B)}]$$
$$p_{b3}((3,4),B)=\Pr[\alpha_3(t)=1\cap A^C\cap n_{(1,B)}(t-1)>0\cap n_{((3,4),B)}(t-1)=N_{((3,4),B)}]$$

$$\Pr[\alpha_3(t)=1\cap A^C\cap B^C]=p_s(1,B)+p_{b3}((3,4),B)$$

επειδή

$\Pr[\alpha_3(t)=0\cap A^C\cap B^C]=0$, έχουμε ότι

$$\Pr[A^C\cap B^C]=p_s(1,B)+p_{b3}((3,4),B)$$

επίσης $\Pr[A\cap n_{(1,B)}(t-1)=0\cap n_{((3,4),B)}(t-1)<N_{((3,4),B)}]=p(1,B,0,0,0)$

$\Pr[A\cap n_{(1,B)}(t-1)>0\cap n_{((3,4),B)}(t-1)=N_{((3,4),B)}]=p((3,4),B),N,0,0,0)$

άρα $\Pr[A\cap B^C]=p(1,B,0,0,0)+p((3,4),B),0,0,0,0)$

ισχύει ότι $\Pr\left[B^C\right] = \Pr\left[A^C \cap B^C\right] + \Pr\left[A \cap B^C\right] =$
$p_s(1,B) + p_{b3}((3,4),B) + p(1,B,0,0,0) + p((3,4),B),0,0,0,0)$

ομοίως έχουμε ότι

$\Pr\left[A^C\right] = p_s(1,A) + p_{b3}((3,4),A) + p(1,A,0,0,0) + p((3,4),A),0,0,0,0)$
και
$\Pr[A] = 1 - \Pr\left[A^C\right]$

Ισχύει ότι $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] - \Pr\left[A \cap B^C\right]$

Η ποσότητα $\Pr\left[\left\{\alpha_d(1,B) = 0 \cap n_{(1,B)} > 0\right\}\right]$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον τύπο που παρουσιάζεται στον Nemec (1999)

$PR_d(1,B) = \Pr\left[\alpha_d = 1 \cap n_{(1,B)} > 0\right] + v_d\, p(1,B,0,0,1) - r_d\, p(1,B,0,0,0)$
και την ισότητα που περιγράφει ότι για κάθε βλάβη υπάρχει και μια αντίστοιχη επιδιόρθωση.

Δηλαδή
$r_d \Pr\left[\alpha_d = 0 \cap n_{(1,B)} > 0\right] + r_d \Pr\left[\alpha_d = 0 \cap n_{(1,B)} = 0\right] =$
$p_d \Pr\left[\alpha_d = 1 \cap n_{(1,B)} > 0\right] + v_d \Pr\left[\alpha_d = 1 \cap n_{(1,B)} = 0\right] \Rightarrow$

$$\Pr\left[\alpha_d = 0 \cap n_{(1,B)} > 0\right] = -\Pr\left[\alpha_d = 0 \cap n_{(1,B)} = 0\right] + \frac{p_d}{r_d}\Pr\left[\alpha_d = 1 \cap n_{(1,B)} > 0\right] +$$

$$\frac{v_d}{r_d}\Pr\left[\alpha_d = 1 \cap n_{(1,B)} = 0\right] \Rightarrow$$

$$\Pr\left[\alpha_d = 0 \cap n_{(1,B)} > 0\right] = -p(1,B,0,0,0) + \frac{p_d}{r_d}\left(E_d(1,B) - v_d\, p(1,B,0,0,1) + r_d\, p(1,B,0,0,0)\right) +$$

$$\frac{v_d}{r_d}\, p(1,B,0,0,1)$$

$$\Pr[D] = -p((1,B),0,0,0) + \frac{p_d}{r_d}\left(PR_d(1,B) - v_d\, p((1,B),0,0,1) + r_d\, p((1,B),0,0,0)\right) +$$
$$\frac{v_d}{r_d}\, p((1,B),0,0,1) - 1 + p_s(1,A) + p_{b3}((3,4),A) + p((1,A),0,0,0) +$$
$$p(((3,4),A),0,0,0,0) + \left(p((1,B),0,0,0) + p(((3,4),B),0,0,0,0\right) -$$
$$p((3,4),B),N,0,0,0) - p_{b3}((3,4),B)$$

Υπολογισμός της πιθανότητας $\Pr[I]$:

$\Pr[I] = p_{b_3}((3,4),B)$

Υπολογισμός της ποσότητας $\Pr[V_1]$:
Επειδή η μηχανή M_3 είναι up και δεν είναι starved ή blocked για τα προϊόντα τύπου Α αυτό σημαίνει ότι η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_{u1}((3,4),B)$ θα είναι down. Ωστόσο δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τίποτα για τις ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές $M_{u2}((3,4),B)$ ή $M_d((3,4),B)$ οι οποίες μπορεί να είναι up ή down.

Το γεγονός V_1 περιγράφεται από τη πιθανότητα

$$\Pr[V_1] = \sum_{n=0}^{n=N-1} \left(p((3,4),B,n,0,0,0) + p((3,4),B,n,0,1,0) + p((3,4),B,n,0,0,1) + p((3,4),B,n,0,1,1) \right)$$

Υπολογισμός του όρου $\Pr[V_2]$:

Ακολουθώντας παρόμοιο συλλογισμό
Επειδή η μηχανή M_3 είναι up και δεν είναι starved ή blocked για τα προϊόντα τύπου Α αυτό σημαίνει ότι η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_{u1}((3,4),B)$ θα είναι down, ενώ επειδή ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),B)}$ είναι γεμάτος θα υπολογίσουμε μόνο τις στάσιμες πιθανότητες με n=N. Ωστόσο δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τίποτα για τις ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές $M_{u1}((3,4),B)$ ή $M_d((3,4),B)$ οι οποίες μπορεί να είναι up ή down.

Άρα

$$\Pr[V_2] = p((3,4),B,N,0,0,0) + p((3,4),B,N,0,1,0) + p((3,4),B,N,0,0,1) + p((3,4),B,N,0,1,1)$$

επειδή τώρα οι στάσιμες πιθανότητες $p((3,4),B,N,0,1,1), p((3,4),B,0,0,0,1)$ αντιστοιχούν σε παροδικές καταστάσεις θα είναι ίσες με μηδέν.

Τελικά
$$\Pr[V_2] = p((3,4),B,N,0,0,0) + p((3,4),B,N,0,1,0)$$

Γ.9 Εξίσωση διακοπής της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(1,A)$

Η πιθανότητα $p_d(1,A)$ εκφράζει τη πιθανότητα η μηχανή $M_d(1,A)$ να είναι down τη χρονική στιγμή t+1, δοθέντος ότι ήταν up και όχι starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t.

Δηλαδή
$$p_d(1,A) = \Pr\left[M_d(1,A) \text{ είναι down τη στιγμή } t+1 / \left[M_d(1,A) \text{ είναι up και } n_{(1,A)} > 0 \text{ τη στιγμή } t \right] \right.$$

Η μηχανή $M_d(1,A)$ να είναι down τη χρονική στιγμή t+1 αν και μόνο αν

- Η M_3 είναι down ή
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}$ και $M_d((3,4),A)$ είναι down

άρα

$$p_d(1,A) = \Pr\left[\alpha_3(t+1) = 0 / M_d(1,A) \text{ είναι up και } n_{(1,A)} > 0 \text{ τη στιγμή } t\right] +$$
$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \text{ τη στιγμή } t+1 / \right.$$
$$\left. M_d(1,A) \text{ είναι up και } n_{(1,A)} > 0 \text{ τη στιγμή } t\right]$$

Ο πρώτος όρος είναι ίσος με p_3

Ο δεύτερος όρος γίνεται :

$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \text{ τη στιγμή } t+1 / \right.$$
$$\left. M_d(1,A) \text{ είναι up και } n_{(1,A)} > 0 \text{ τη στιγμή } t\right] =$$
$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \text{ τη στιγμή } t+1/B\right] +$$
$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1 \text{ τη στιγμή } t+1/B\right] +$$
$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \text{ τη στιγμή } t+1/B\right] +$$
$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1 \text{ τη στιγμή } t+1/B\right] +$$

όπου

$$B = \left\{M_d(1,A) \text{ είναι up και } n_{(1,A)} > 0 \text{ τη στιγμή } t\right\}$$

Θα αναλύσουμε τώρα τον όρο

$$\Pr\left[n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \text{ τη στιγμή } t+1/B\right]$$

Για να έχουμε $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \text{ τη στιγμή } t+1$, θα πρέπει να συμβαίνει ένα από τα παρακάτω τη χρονική στιγμή t.

- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ και θα πρέπει να μην επισκευαστεί καμιά από τις μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$, $M_{u2}((3,4),A)$ και $M_d((3,4),A)$ με πιθανότητα $\left(1-r_{u_1}((3,4),A)\right)\left(1-r_{u_2}((3,4),A)\right)\left(1-r_d((3,4),A)\right)$
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ και θα πρέπει μην επισκευαστεί καμιά από τις μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$, $M_{u2}((3,4),A)$ με πιθανότητα $\left(1-r_{u_1}((3,4),A)\right)\left(1-r_{u_2}((3,4),A)\right)$ ενώ η μηχανή $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $\left(p_d((3,4),A)\right)$
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(v_{u_1}((3,4),A)\right)$, οι μηχανές $M_{u2}((3,4),A)$ και $M_d((3,4),A)$ να μην χαλάσουν με πιθανότητα $\left(1-r_{u_2}((3,4),A)\right)\left(1-r_d((3,4),A)\right)$.
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ και θα πρέπει και θα πρέπει οι μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$ και $M_d((3,4),A)$ να χαλάσουν με πιθανότητα $\left(v_{u_1}((3,4),A)\right)p_d((3,4),A)$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $\left(1-r_{u_2}((3,4),A)\right)$

- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(v_{u_2}((3,4),A)\right)$, οι μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$ και $M_d((3,4),A)$ να μην χαλάσουν με πιθανότητα $\left(1 - r_{u_1}((3,4),A)\right)\left(1 - r_d((3,4),A)\right)$.
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει και θα πρέπει οι μηχανές $M_{u2}((3,4),A)$ και $M_d((3,4),A)$ να χαλάσουν με πιθανότητα $\left(v_{u_2}((3,4),A)\right)p_d((3,4),A)$, η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $\left(1 - r_{u_1}((3,4),A)\right)$
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει οι μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$, $M_{u2}((3,4),A)$ να χαλάσουν με πιθανότητα $\left(v_{u_1}((3,4),A)\right)\left(v_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $\left(1 - r_d((3,4),A)\right)$
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει οι μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$, $M_{u2}((3,4),A)$ να χαλάσουν με πιθανότητα $\left(v_{u_1}((3,4),A)\right)\left(v_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(p_d((3,4),A)\right)$

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος γράφεται χρησιμοποιώντας τον τύπο του Bayes ως εξής :

$$\frac{\Pr\left[n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap B\right]}{\Pr[B]} \cdot K$$

όπου

$$K = \left(1 - r_{u_1}((3,4),A)\right)\left(1 - r_{u_2}((3,4),A)\right)\left(1 - r_d((3,4),A)\right)$$

Η έκφραση $M_d(1,A)$ *είναι up και* $n_{(1,A)} > 0$ *τη στιγμή t* συνεπάγεται ότι η M_3 είναι up και $n_{((3,4),A)} < N_{((3,4),A)}$. Άρα το γεγονός $\left\{B \cap n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}\right\} = \varnothing$
Άρα ο παραπάνω όρος είναι μηδέν. Ακριβώς για τον ίδιο λόγο και οι υπόλοιποι όροι είναι ίσοι με μηδέν.

Για να έχουμε $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ *τη στιγμή* $t+1$, θα πρέπει να συμβαίνει ένα από τα παρακάτω τη χρονική στιγμή t.

- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$, ενώ θα πρέπει οι μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$ και $M_d((3,4),A)$ να μην επιδιορθωθούν με πιθανότητα $\left(1 - r_{u_1}((3,4),A)\right)\left(1 - r_d((3,4),A)\right)$ και η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ δεν θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $\left(1 - v_{u_2}((3,4),A)\right)$
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(v_{u_1}((3,4),A)\right)$, η

μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $\left(1-v_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η μηχανή $M_d((3,4),A)$ να μην επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(1-r_d((3,4),A)\right)$

- $n_{((3,4),A)}=N_{((3,4),A)}\cap\alpha_d((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0$, θα πρέπει οι μηχανές $M_{u1}((3,4),A)$ και $M_d((3,4),A)$ να μην επιδιορθωθούν με πιθανότητα $\left(1-r_{u_1}((3,4),A)\right)\left(1-r_d((3,4),A)\right)$ και η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(v_{u_2}((3,4),A)\right)$
- $n_{((3,4),A)}=N_{((3,4),A)}\cap\alpha_d((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=1\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0$ θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(v_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(r_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να μην επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(1-r_d((3,4),A)\right)$.

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος γράφεται χρησιμοποιώντας τον τύπο του Bayes ως εξής :

$$\frac{\Pr\left[n_{((3,4),A)}=N_{((3,4),A)}\cap\alpha_d((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=1\cap B\right]}{\Pr[B]}\cdot$$
$$\left(1-r_{u_1}((3,4),A)\right)\left(1-r_d((3,4),A)\right)\left(1-v_{u_2}((3,4),A)\right)$$

Η έκφραση $M_d(1,A)$ *είναι up και* $n_{(1,A)}>0$ *τη στιγμή* t συνεπάγεται ότι η M_3 είναι up και $n_{((3,4),A)}<N_{((3,4),A)}$. Άρα το γεγονός $\left\{B\cap n_{((3,4),A)}=N_{((3,4),A)}\right\}=\varnothing$
Με συνέπεια ο παραπάνω όρος είναι μηδέν. Ακριβώς για τον ίδιο λόγο και οι υπόλοιποι όροι είναι ίσοι με μηδέν.

Για να έχουμε
$n_{((3,4),A)}=N_{((3,4),A)}\cap\alpha_d((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=1\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0$ *τη στιγμή* $t+1$
, θα πρέπει να συμβαίνει ένα από τα παρακάτω τη χρονική στιγμή t.

- $n_{((3,4),A)}=N_{((3,4),A)}-1\cap\alpha_d((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=1\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0$ *τη στιγμή* $t+1$, θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $\left(1-p_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να μην επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(1-r_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να μην επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(1-r_d((3,4),A)\right)$.
- $n_{((3,4),A)}=N_{((3,4),A)}-1\cap\alpha_d((3,4),A)=1\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=1\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=0$ *τη στιγμή* $t+1$ θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $\left(1-p_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να μην επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(1-r_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(p_d((3,4),A)\right)$.
- $n_{((3,4),A)}=N_{((3,4),A)}-1\cap\alpha_d((3,4),A)=0\cap\alpha_{u_1}((3,4),A)=1\cap\alpha_{u_2}((3,4),A)=1$ *τη στιγμή* $t+1$ θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $\left(1-p_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(v_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να μην επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(1-r_d((3,4),A)\right)$.

- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1 \; \tau\eta \; \sigma\tau\iota\gamma\mu\acute{\eta} \; t+1$ θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $\left(1 - p_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(v_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(p_d((3,4),A)\right)$.
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1 \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \; \tau\eta \; \sigma\tau\iota\gamma\mu\acute{\eta} \; t+1$ θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(r_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να μην επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(1 - r_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να μην επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(1 - r_d((3,4),A)\right)$.
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1 \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1 \; \tau\eta \; \sigma\tau\iota\gamma\mu\acute{\eta} \; t+1$ θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(r_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(v_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να μην επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(1 - r_d((3,4),A)\right)$.
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1 \; \tau\eta \; \sigma\tau\iota\gamma\mu\acute{\eta} \; t+1$ θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(r_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(v_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(p_d((3,4),A)\right)$.

- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \; \tau\eta \; \sigma\tau\iota\gamma\mu\acute{\eta} \; t+1$ θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(r_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να μην επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(1 - r_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(p_d((3,4),A)\right)$.

Οι πιθανότητες με $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}$ τη χρονική στιγμή δεν υπολογίζονται γιατί $\left\{B \cap n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}\right\} = \varnothing$.

Ο τελευταίος όρος γράφεται χρησιμοποιώντας τον τύπο του Bayes ως εξής :

$$\frac{\Pr\left[n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \cap B\right]}{\Pr[B]} \cdot Z$$

όπου

$Z = \left(r_{u_1}((3,4),A)\right)\left(1 - r_{u_2}((3,4),A)\right)\left(p_d((3,4),A)\right)$

Ο όρος αυτός είναι ίσος με μηδέν γιατί δεν μπορεί ταυτόχρονα να έχουμε $\alpha_{u_1}((3,4),A) = 0$ και $\alpha_d(1,A) = 0$.

Για ακριβώς τον ίδιο λόγο όλοι οι παραπάνω όροι με $\alpha_{u_1}((3,4),A) = 0$ είναι ίσοι με μηδέν.

Για να έχουμε

$n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1 \; \tau\eta \; \sigma\tau\iota\gamma\mu\acute{\eta} \; t+1$, θα πρέπει να συμβαίνει ένα από τα παρακάτω τη χρονική στιγμή t.

- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2 \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $\left(1 - p_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(r_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να μην επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(1 - r_d((3,4),A)\right)$.
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $\left(1 - p_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(r_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(p_d((3,4),A)\right)$.
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2 \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $\left(1 - p_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να μη χαλάσει με πιθανότητα $\left(1 - p_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να μην επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(1 - r_d((3,4),A)\right)$.
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $\left(1 - p_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να μη χαλάσεί με πιθανότητα $\left(1 - p_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(p_d((3,4),A)\right)$.
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1 \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $\left(1 - p_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(r_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να μην επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(1 - r_d((3,4),A)\right)$.
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $\left(1 - p_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(r_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(p_d((3,4),A)\right)$.
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1 \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $\left(1 - p_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(1 - v_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να μην επιδιορθωθεί με πιθανότητα $\left(1 - r_d((3,4),A)\right)$.
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1 \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $\left(1 - p_{u_1}((3,4),A)\right)$, η $M_{u2}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(1 - v_{u_2}((3,4),A)\right)$ και η $M_d((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $\left(p_d((3,4),A)\right)$.

Οι περιπτώσεις για τις οποίες $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}$ δεν χρειάζεται να ληφθούν υπόψη γιατί $\left\{B \cap n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}\right\} = \varnothing$.

Ομοίως οι περιπτώσεις για τις οποίες $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0$ δεν χρειάζεται να ληφθούν υπόψη γιατί δεν μπορεί ταυτόχρονα να έχουμε $\alpha_{u_1}((3,4),A) = 0$ και $\alpha_d(1,A) = 0$.

Ο όρος $\Pr[B]$ υπολογίζεται ως εξής:
Για την ΄΄εικονική΄΄ downstream μηχανή $M_d(1,A)$ ισχύει η ισότητα ότι. .(βλέπε Nemec (1999)).

$$PR_d(1,A) = \Pr[\alpha_d(1,A) = 1 \cap n_{(1,A)} > 0] + v_d(1,A)p(1,A,0,0,1) - r_d p(1,A,0,0,0)$$

Γ.10 Εξίσωση ροής (flow rate idle time) για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(1,B)$

Η απόδοση της πραγματικής μηχανής M_3, για τα προϊόντα τύπου B, $PR_B(3)$ η οποία λόγω της αρχής διατήρησης της ροής είναι ίση με την απόδοση του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(1,B), PR(1,B) δίνεται από τον τύπο που παρουσιάζεται και αποδεικνύεται από τον Nemec (1999)

$$PR_B(3) = PR(1,B) = e_3\begin{pmatrix} p_s(1,A) + p_{b3}((3,4),A) + p((1,A),0,0,0) + p((3,4),A),N,0,0,0) + \\ p((3,4),A),N,0,1,0) - p_s(1,B) - p_{b3}((3,4),B) \end{pmatrix} \quad (\Gamma 24)$$

Η απόδοση της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(1,B)$, $PR_d(1,B)$ δίνεται από τον τύπο

$$PR_d(1,B) = e_d(1-p_s) - e_d v_d p_s\left(\frac{r_u + r_d - r_u p_d - 2r_u r_d}{r_d(r_u + r_d - r_u r_d)}\right)$$

επίσης για την απόδοση της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_{u1}((3,4),B)$, $PR_{u1}((3,4),B)$ έχουμε ότι

$$PR_{u1}((3,4),B) = \sum_{\substack{n=0 \\ \alpha_2,\alpha_3 \in \{0,1}}}^{n=N-1} \left(p(((3,4),B),n,1,\alpha_2,\alpha_3)\right) + v_{u1}((3,4),B)p_{b3}((3,4),B) -$$

$$r_{u1}((3,4),B) \sum_{\alpha_2,\alpha_3 \in \{0,1\}} \left(p(((3,4),B),N,0,\alpha_2,\alpha_3)\right)$$

Θέτουμε

$$C = p_s(1,A) + p_{b3}((3,4),A) + p((1,A),0,0,0) + p((3,4),A),N,0,0,0) + p((3,4),A),N,0,1,0)$$

$$\frac{r_u + r_d - r_u p_d - 2r_u r_d}{r_d(r_u + r_d - r_u r_d)} = K$$

Λύνοντας τους παραπάνω δυο τύπους ως προς $p_s(1,B)$ *και* $p_{b3}((3,4),B)$, αντίστοιχα και ύστερα από κάποιες αλγεβρικές πράξεις έχουμε ότι

$$p_s(1,B) = \frac{e_d(1,B) - PR_d(1,B)}{e_d(1,B)(1 + v_d(1,B)K)} \quad (\Gamma 25)$$

$$p_{b3}((3,4),B) = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\Phi_1 = \frac{PR_{u1}((3,4),B) - \sum_{\substack{n=0 \\ \alpha_2,\alpha_3 \in \{0,1}}^{n=N-1} \left(p(((3,4),B),n,1,\alpha_2,\alpha_3)\right)}{v_{u1}((3,4),B)}$$

$$\Phi_2 = \frac{r_{u1}((3,4),B) \sum_{\alpha_2,\alpha_3 \in \{0,1\}} \left(p(((3,4),B),N,0,\alpha_2,\alpha_3)\right)}{v_{u1}((3,4),B)}$$

$$Q = r(1,B)\left(1 + v_d(1,B)K\right)$$

(Γ26)

Αντικαθιστώντας τις ποσότητες $p_s(1,B), p_{b3}((3,4),B)$ *και* C στην αρχική εξίσωση (Γ24) και λαμβάνοντας υπόψη ότι PR(1,B)=PR_d(1,B) (λόγω της διατήρησης της ροής) και ύστερα από πάρα πολλές αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στον παρακάτω τύπο για την εύρεση της πιθανότητας p_d(1,B).

$$p_d(1,B) = \frac{Q \cdot \left[\frac{PR(1,B)}{e_3} - C + r_d(1,B)\left(\frac{1 - PR(1,B)}{Q}\right) + p_{b3}((3,4),B)\right]}{PR(1,B)}$$

Γ.11 Εξίσωση βλάβης αδράνειας για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή M_d(1,A)

Η πιθανότητα βλάβης αδράνειας της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής M_d(1,A) δίνεται από τον τύπο

$$v_d(1,A) = \Pr[\alpha_3(t+1) = 0 / \alpha_3(t) = 1 \cap n_{(1,A)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} \cap n_{(1,B)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) < N_{(5,B)}] =$$
$$p_3 \Pr[\alpha_3(t) = 1 \cap n_{(1,A)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} \cap n_{(1,B)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) < N_{(5,B)}]$$

Ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα

$$A = \{\alpha_3(t) = 1 \cap n_{(1,A)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)}\}$$
$$B = \{n_{(1,B)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) < N_{(5,B)}\}$$

Ισχύει ότι

$$\Pr[A] = \Pr[A \cap B] + \Pr[A \cap B^C] \Rightarrow$$
$$\Pr[\alpha_3(t) = 1 \cap n_{(1,A)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)}] =$$
$$\Pr[\alpha_3(t) = 1 \cap n_{(1,A)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} \cap n_{(1,B)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) < N_{(5,B)}] +$$
$$\Pr[\alpha_3(t) = 1 \cap n_{(1,A)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} \cap (n_{(1,B)}(t-1) = 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) = N_{(5,B)})]$$

$$\Pr[A] = p_{b3}((3,4),A)$$

$$\Pr[A \cap B^C] = \frac{p_s(1,B) + p_{b3}((3,4),B)}{p_s(1,A) + p_{b3}((3,4),A)} p_{b3}((3,4),A)$$

Άρα

$$\Pr[A \cap B] = p_{b3}((3,4), A) - \frac{p_s(1,B) + p_{b3}((3,4),B)}{p_s(1,A) + p_{b3}((3,4),A)} p_{b3}((3,4), A)$$

Τελικά η πιθανότητα βλάβης αδράνειας δίνεται από τον τύπο

$$v_u(1,A) = p_3 p_{b3}((3,4),A)\left(1 - \frac{p_s(1,B) + p_{b3}((3,4),B)}{p_s(1,A) + p_{b3}((3,4),A)}\right)$$

Γ.12 Εξίσωση βλάβης αδράνειας για την εικονική μηχανή $M_d(1,B)$

Η πιθανότητα αδράνειας $v_d(1,B)$ εκφράζει το γεγονός η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(1,B)$ να παρουσιάσει βλάβη δεδομένου ότι είναι starved για τα προϊόντα τύπου Β.

Δηλαδή

$$\begin{aligned} v_d(1,B) = \Pr[&\alpha_3(t+1) = 0 \cap n_{(1,A)}(t) > 0 \cap n_{((3,4),A)}(t) < N_{((3,4,A)} \,/ \\ &\alpha_3(t) = 1 \cap \left(n_{(1,A)}(t-1) = 0 \cup n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)}\right) \\ &\cap n_{(1,B)}(t-1) = 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) N_{((3,4),B)}] \end{aligned}$$

Ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα

$$U = \{\alpha_3(t+1) = 0 \cap n_{(1,A)}(t) > 0 \cap n_{((3,4),A)}(t) < N_{((3,4,A)}\}$$
$$V = \{\alpha_3(t) = 1 \cap \left(n_{(1,A)}(t-1) = 0 \cap n_{((3,4),A)}(t) < N_{((3,4,A)}\right) \cap n_{(1,B)}(t-1) = 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) < N_{((3,4),B)}]\}$$
$$W = \{\alpha_3(t) = 1 \cap \left(n_{(1,A)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),A)}(t) = N_{((3,4,A)}\right) \cap n_{(1,B)}(t-1) = 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) < N_{((3,4),B)}]\}$$

Έχουμε

$$v_d(1,B) = \Pr[U / V \cup W] = \frac{\Pr[U/V]\Pr[V] + \Pr[U/W]\Pr[W]}{\Pr[V \cup W]}$$

Θα αναλύσουμε τώρα ένα προς ένα τους παραπάνω όρους

$\Pr[U/V] = (\!(r_u(1,A))\!)$ η πιθανότητα αυτή εκφράζει το γεγονός ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(1,A)}$ να πάψει να είναι γεμάτος.

$\Pr[U/W] = r_d((3,4),A)$, η πιθανότητα αυτή εκφράζει το γεγονός ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ να πάψει να είναι γεμάτος.

$\Pr[V \cup W] = p_s(1,B)$

Έχουμε ήδη δείξει ότι

$$\Pr[V] = p_s(1,B)\frac{p_s(1,A)}{p_{b3}((3,4),A) + p_s(1,A)} \text{ και } \Pr[W] = p_s(1,B)\frac{p_{b3}((3,4),A)}{p_{b3}((3,4),A) + p_s(1,A)}$$

Γ.13 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(2,A)$

Οι διαφορετικοί λόγοι για τους οποίους η μηχανή M_4 δεν μπορεί να φτιάξει ένα προϊόν τύπου Α τη χρονική στιγμή t, δοθέντος ότι δεν ήταν starved τη χρονική στιγμή t-1, είναι οι εξής

1. Η M_4 είναι down τη χρονική στιγμή t και δεν είναι blocked για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.
2. Η M_4 είναι down τη χρονική στιγμή t και είναι blocked για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.
3. Η M_4 είναι up τη χρονική στιγμή t και είναι blocked για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.

Ο όρος $r_d(2,A)$ μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{aligned} r_d(2,A) = \Pr\Big[&\alpha_4(t+1)=1 \cap n_{(2,A)}(t-1)>0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) < N_{((3,4),A)} - 1 \,/ \\ &\Big(\big\{\alpha_4(t)=0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) < N_{((3,4),A)} - 1\big\} \cup \\ &\big\{\alpha_4(t)=0 \cap \big(n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} - 1 \cup n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)}\big)\big\} \cup \\ &\big\{\alpha_4(t)=1 \cap \big(n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} - 1 \cup n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)}\big)\big\}\Big) \cap \\ &n_{(2,A)}(t-1)>0\Big] \end{aligned}$$

Ορίζουμε τώρα τα παρακάτω γεγονότα

$$\begin{aligned} U &= \big\{\alpha_4(t+1)=1 \cap n_{(2,A)}(t-1)>0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) < N_{((3,4),A)} - 1\big\} \\ X &= \big\{\alpha_4(t)=0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1) < N_{((3,4),A)} - 1 \cap n_{(2,A)}(t-1)>0\big\} \\ Y &= \big\{\alpha_4(t)=0 \cap \big(n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} - 1 \cup n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} \cap n_{(2,A)}(t-1)>0\big)\big\} \\ Z &= \big\{\alpha_4(t)=1 \cap \big(n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} - 1 \cup n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)}\big) \cap n_{(2,A)}(t-1)>0\big\} \end{aligned}$$

Επειδή τα γεγονότα αυτά είναι ξένα μεταξύ τους, έχουμε ότι

$$r_d(2,A) = \frac{\Pr[U/X]\Pr[X] + \Pr[U/Y]\Pr[Y] + \Pr[U/Z]\Pr[Z]}{\Pr[X \cup Y \cup Z]}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα ένα προς ένα τους παραπάνω όρους

Υπολογισμός του όρου $\Pr[U/X]$:

$\Pr[U/X] = r_4$

Υπολογισμός του όρου $\Pr[U/Y]$:

Η ποσότητα $\Pr[U/Y]$ εκφράζει τη πραγματοποίηση δυο γεγονότων.

Το πρώτο γεγονός είναι ότι η μηχανή M_4 επιδιορθώνεται με πιθανότητα r_4 και το δεύτερο γεγονός είναι ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ παύει να είναι γεμάτος . Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να υπάρξει επιδιόρθωση της downstream μηχανής $M_d((3,4),A)$ με πιθανότητα $r_d((3,4),A)$.

Συνολικά η ποσότητα $\Pr[U/Y]$ είναι ίση με $\Pr[U/Y] = r_4 \cdot r_d((3,4),A)$

Υπολογισμός της ποσότητας $\Pr[U/Z]$:

Η ποσότητα $\Pr[U/Z]$ εκφράζει τη πραγματοποίηση δυο γεγονότων.
Το πρώτο γεγονός είναι ότι η μηχανή $M_u(1,A)$ δεν πρέπει να χαλάσει ενώ είναι μπλοκαρισμένη για τα προϊόντα τύπου Α γεγονός που συμβαίνει με πιθανότητα $1-v_{u_2}((3,4),A)$ και το δεύτερο γεγονός είναι ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ παύει να είναι γεμάτος . Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να υπάρξει επιδιόρθωση της downstream μηχανής $M_d((3,4),A)$ με πιθανότητα $r_d((3,4),A)$.

Συνολικά λοιπόν η ποσότητα $\Pr[U/Z]$ είναι ίση με
$$\Pr[U/Z]=r_d((3,4),A)\left(1-v_{u_2}((3,4),A)\right)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα ξεχωριστά τις πιθανότητες των γεγονότων X,Y,Z.

Θα υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα του γεγονότος X.
Υπενθυμίζουμε ότι
$$X=\left\{\alpha_4(t)=0\cap n_{((3,4),A)}(t-1)<N_{((3,4),A)}-1\cap n_{(2,A)}(t-1)>0\right\}$$

Η ΄΄εικονική΄΄ downstream μηχανή $M_d(2,A)$ είναι down τη χρονική στιγμή t και όχι starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1 αν συμβαίνει ένα από τα παρακάτω

- Η M_4 είναι down τη χρονική στιγμή t και δεν είναι blocked για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.
- Η M_4 είναι down τη χρονική στιγμή t και είναι blocked για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.
- Η M_4 είναι up τη χρονική στιγμή t και είναι blocked για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t-1.Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned}
&\left\{\alpha_d(2,A)=0\cap n_{(2,A)}>0\right\}\Leftrightarrow\\
&\left\{\alpha_4(t)=0\cap n_{((3,4),A)}(t-1)<N_{((3,4),A)}-1\cap n_{(2,A)}(t-1)>0\right\}\cup\\
&\left\{\alpha_4(t)=0\cap\left(n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}-1\cup n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}\cap n_{(2,A)}(t-1)>0\right)\right\}\cup\\
&\left\{\alpha_4(t)=1\cap\left(n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}-1\cup n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}\right)\cap n_{(2,A)}(t-1)>0\right\}
\end{aligned}$$

Άρα
$$\begin{aligned}
&\Pr[X]=\Pr\left[\alpha_d(2,A)=0\cap n_{(2,A)}>0\right]-\\
&\Pr\left[\alpha_4(t)=0\cap\left(n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}-1\cup n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}\cap n_{(2,A)}(t-1)>0\right)\right]-\\
&\Pr\left[\alpha_4(t)=1\cap\left(n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}-1\cup n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}\right)\cap n_{(2,A)}(t-1)>0\right]
\end{aligned}$$

Ο όρος
$$\Pr\left[\alpha_4(t)=0\cap\left(n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}-1\cup n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}\cap n_{(2,A)}(t-1)>0\right)\right]$$
εκφράζει στην ουσία το γεγονός η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να είναι down.

Αυτό σημαίνει ότι

$$\Pr\left[\alpha_4(t)=0\cap\left(n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}-1\cup n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}\cap n_{(2,A)}(t-1)>0\right)\right]=$$
$$p(((3,4),A),N,0,0,0)+p(((3,4),A),N,1,0,0)+p(((3,4),A),N-1,0,0,0)+p(((3,4),A),N-1,0,0,1)+$$
$$p(((3,4),A),N-1,1,0,0)+p(((3,4),A),N-1,1,0,1)$$

Με παρόμοιο συλλογισμό αποδεικνύεται ότι

$$\Pr\left[\alpha_4(t)=1\cap\left(n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}-1\cup n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}\right)\cap n_{(2,A)}(t-1)>0\right]=$$
$$p(((3,4),A),N,0,1,0)+p(((3,4),A),N,1,1,0)+p(((3,4),A),N-1,0,1,0)+p(((3,4),A),N-1,0,1,1)+$$
$$p(((3,4),A),N-1,1,1,0)+p(((3,4),A),N-1,1,1,1)=p_{b4}((3,4),A)$$

Για την ΄΄εικονική΄΄ downstream μηχανή $M_d(2,A)$ η ισότητα ότι για κάθε βλάβη υπάρχει και η αντίστοιχη επιδιόρθωση έχει την ακόλουθη μορφή. .(βλέπε Nemec (1999)).

$$r_d(2,A)\Pr\left[\alpha_d(2,A)=0\cap n_{(2,A)}>0\right]+r_d(2,A)\Pr\left[\alpha_d(2,A)=0\cap n_{(2,A)}=0\right]=$$
$$p_d(2,A)\Pr\left[\alpha_d(2,A)=1\cap n_{(2,A)}>0\right]+v_d(2,A)\Pr\left[\alpha_d(2,A)=1\cap n_{(2,A)}=0\right]\Rightarrow$$
$$\Pr\left[\alpha_d(2,A)=0\cap n_{(2,A)}>0\right]=\frac{p_d(2,A)}{r_d(2,A)}\Pr\left[\alpha_d(2,A)=1\cap n_{(2,A)}>0\right]+$$
$$\frac{v_d(2,A)}{r_d(2,A)}\Pr\left[\alpha_d(2,A)=1\cap n_{(2,A)}=0\right]-\Pr\left[\alpha_d(2,A)=0\cap n_{(2,A)}=0\right]$$

Επίσης ισχύει ότι (Nemec (1999)

$$PR_d(2,A)=\Pr\left[\alpha_d(2,A)=1\cap n_{(2,A)}>0\right]+v_d(2,A)p(2,A,0,0,1)-r_d p(2,A,0,0,0)$$
$$\Pr\left[\alpha_d(2,A)=0\cap n_{(2,A)}=0\right]=p(2,A,0,0,0)$$
$$\Pr\left[\alpha_d(2,A)=1\cap n_{(2,A)}=0\right]=p_s(2,A)$$

τελικά έχουμε

$$\Pr\left[\alpha_d(2,A)=0\cap n_{(2,A)}>0\right]=\frac{p_d(2,A)}{r_d(2,A)}\left(E(2,A)-v_d(2,A)p(2,A,0,0,1)+r_d p(2,A,0,0,0)\right)+$$
$$\frac{v_d(2,A)}{r_d(2,A)}p_s(2,A)-p(2,A,0,0,0)$$

Άρα τελικά

$$\Pr[X]=\frac{p_d(2,A)}{r_d(2,A)}\left(E\ (2,A)-v_d(2,A)p(2,A,0,0,1)+r_d p(2,A,0,0,0)\right)+$$
$$\frac{v_d(2,A)}{r_d(2,A)}p_s(2,A)-p(2,A,0,0,0)-p(((3,4),A),N,0,0,0)-p(((3,4),A),N,1,0,0)-p(((3,4),A),N-1,0,0,0)-$$
$$p(((3,4),A),N-1,0,0,1)-p(((3,4),A),N-1,1,0,0)-p(((3,4),A),N-1,1,0,1)-$$
$$p(((3,4),A),N,0,1,0)-p(((3,4),A),N,1,1,0)-p(((3,4),A),N-1,0,1,0)-p(((3,4),A),N-1,0,1,1)-$$
$$p(((3,4),A),N-1,1,1,0)-p(((3,4),A),N-1,1,1,1)$$

Υπολογισμός του όρου $\Pr[Y]$

Ο όρος $\Pr[Y]$ έχει υπολογιστεί νωρίτερα και είδαμε ότι

$$\Pr\left[\alpha_4(t)=0\cap\left(n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}-1\cup n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}\cap n_{(2,A)}(t-1)>0\right)\right]=$$
$$p(((3,4),A),N,0,0,0)+p(((3,4),A),N,1,0,0)+p(((3,4),A),N-1,0,0,0)+p(((3,4),A),N-1,0,0,1)+$$
$$p(((3,4),A),N-1,1,0,0)+p(((3,4),A),N-1,1,0,1)$$

Άρα τελικά

$$\Pr[Y] = p(((3,4),A),N,0,0,0) + p(((3,4),A),N,1,0,0) + p(((3,4),A),N-1,0,0,0) + p(((3,4),A),N-1,0,0,1) + p(((3,4),A),N-1,1,0,0) + p(((3,4),A),N-1,1,0,1)$$

Υπολογισμός του όρου $\Pr[Z]$:

Ο όρος $\Pr[Z]$ έχει υπολογιστεί νωρίτερα και είδαμε ότι

$$\Pr[\alpha_4(t) = 1 \cap (n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} - 1 \cup n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)}) \cap n_{(2,A)}(t-1) > 0] = p(((3,4),A),N,0,1,0) + p(((3,4),A),N,1,1,0) + p(((3,4),A),N-1,0,1,0) + p(((3,4),A),N-1,0,1,1) + p(((3,4),A),N-1,1,1,0) + p(((3,4),A),N-1,1,1,1) = p_{b4}((3,4),A)$$

Άρα τελικά

$$\Pr[Z] = p(((3,4),A),N,0,1,0) + p(((3,4),A),N,1,1,0) + p(((3,4),A),N-1,0,1,0) + p(((3,4),A),N-1,0,1,1) + p(((3,4),A),N-1,1,1,0) + p(((3,4),A),N-1,1,1,1) = p_{b4}((3,4),A)$$

Επειδή τα γεγονότα X,Y και Z είναι ξένα μεταξύ τους έχουμε ότι

$$\Pr[X \cup Y \cup Z] = \Pr[X] + \Pr[Y] + \Pr[Z]$$

Γ.14 Εξίσωση επαναφοράς της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(2,B)$

Η πιθανότητα $r_d(2,B)$ εκφράζει το γεγονός η μηχανή $M_d(2,B)$ να μπορέσει να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος τύπου Β τη χρονική στιγμή t+1, δοθέντος ότι δεν μπορούσε να παράγει προϊόντα τύπου Β και δεν ήταν starved για τα προϊόντα τύπου Β τη χρονική στιγμή t.
Αυτό είναι ίδιο με τη πιθανότητα η μηχανή M_4 να φτιάξει ένα προϊόν τύπου Β τη χρονική στιγμή t+1 δοθέντος ότι δεν μπορούσε να φτιάξει ένα προϊόν τύπου Β τη χρονική στιγμή t και δεν ήταν starved για τα προϊόντα τύπου Β τη χρονική στιγμή t-1.

Οι διαφορετικοί λόγοι για τους οποίους η μηχανή M_3 δεν παράγει προϊόντα τύπου Β τη χρονική στιγμή t αλλά μπορεί να φτιάξει προϊόντα τύπου Β τη χρονική t+1 είναι οι εξής

1. Η M_4 είναι up τη χρονική στιγμή t, starved η blocked για τα προϊόντα τύπου Α και blocked για τα προϊόντα τύπου Β τη χρονική στιγμή t-1.
2. Η M_4 είναι up τη χρονική στιγμή t, παράγοντας προϊόντα τύπου Α αλλά είναι έτοιμη να γίνει blocked ή starved για τα προϊόντα τύπου Α και αμέσως μετά θα παράγει προϊόντα τύπου Β.
3. Η M_4 είναι down τη χρονική στιγμή t και μόλις επιδιορθωθεί θα παράγει προϊόντα τύπου Β.

Ο πρώτος λόγος περιγράφεται από το γεγονός

$$I = \{\alpha_4(t) = 1 \cap A^C \cap n_{(2,B)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) = N_{((3,4),B)} \cup N_{((3,4),B)} - 1\}$$

Ο δεύτερος λόγος περιγράφεται από τα εξής δυο γεγονότα

$$V_1 = \{\alpha_4(t) = 1 \cap (n_{(2,A)}(t-1) = 1 \cup n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} - 2) \cap n_{(2,B)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) < N_{((3,4),B)}\}$$

$$V_2 = \{\alpha_4(t) = 1 \cap (n_{(2,A)}(t-1) = 1 \cup n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} - 2) \cap n_{(2,B)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) = N_{((3,4),B)} \cup N_{((3,4),B)} - 1\}$$

Ο τρίτος λόγος περιγράφεται από το γεγονός

$$D = \{\alpha_4(t) = 0 \cap (n_{(2,A)}(t-1) = 0 \cup n_{((3,4),A)}(t-1) = N_{((3,4),A)} - 2) \cap$$
$$n_{(2,B)}(t-1) > 0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) < N_{(5,B)} - 1\}$$

Επίσης ορίζουμε το γεγονός

$$U = \{\alpha_4(t+1) = 1 \cap (n_{(2,A)}(t) = 0 \cup n_{((3,4),A)}(t) = N_{((3,4),A)} \cup N_{((3,4),A)} - 1) \cap$$
$$n_{(2,B)}(t) > 0 \cap n_{((3,4),B)}(t) < N_{((3,4),B)} - 1\}$$

χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω γεγονότα η πιθανότητα $r_d(2,B)$ γράφεται ως εξής

$$r_d(2,B) = \Pr[U / I \cup V_1 \cup V_2 \cup D] =$$
$$= \frac{\Pr[U / I]\Pr[I] + \Pr[U / V_1]\Pr[V_1] + \Pr[U / V_2]\Pr[V_2] + \Pr[U / D]\Pr[D]}{\Pr[I \cup V_1 \cup V_2 \cup D]}$$

Υπολογισμός του όρου $\Pr[U / I]$:

Η πιθανότητα αυτή εκφράζει το γεγονός η μηχανή M_4 να ολοκληρώσει τη παραγωγή ενός προϊόντος τύπου Β τη χρονική στιγμή t+1, δοθέντος ότι δεν μπορούσε να επεξεργαστεί ούτε προϊόντα τύπου Α (γιατί ήταν blocked ή starved για τα προϊόντα τύπου Α) , ούτε προϊόντα τύπου Β γιατί ήταν blocked για τα προϊόντα τύπου Β.
Για να είναι σε θέση η μηχανή M_4 να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος τύπου Β τη χρονική στιγμή t+1, θα πρέπει δυο γεγονότα να συμβούν ταυτόχρονα
Το πρώτο γεγονός είναι ότι θα πρέπει ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),B)}$ τη χρονική στιγμή t+1 να πάψει να είναι γεμάτος και το δεύτερο γεγονός είναι ότι θα πρέπει η μηχανή M_4 να εξακολουθήσει τη χρονική στιγμή να είναι blocked ή starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t+1.

Για να συμβεί το πρώτο γεγονός θα πρέπει η downstream ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d((3,4),B)$ να αφαιρέσει ένα προϊόν από αποθηκευτικό χώρο $B_{((3,4),B)}$. Αυτό μπορεί να συμβεί αν υπάρξει επιδιόρθωση της βλάβης που παρουσιάστηκε σε κάποιο σημείο της γραμμής downstream του αποθηκευτικού χώρου $B_{((3,4),B)}$ με αποτέλεσμα ο αποθηκευτικός χώρος να βρεθεί γεμάτος. Αυτή η επιδιόρθωση μπορεί να γίνει με πιθανότητα

$$r_d((3,4),B)$$

Το δεύτερο γεγονός αναλύεται σε δυο επιμέρους γεγονότα.

Αν η μηχανή M_4 ήταν starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t, θα πρέπει να εξακολουθήσει να είναι starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t+1. Χρησιμοποιώντας και τροποποιώντας ελαφρά ένα τύπο που παρουσιάζεται από τον Nemec (1999), αυτό το γεγονός εκφράζεται από τη πιθανότητα:

$$(1 - r_u(2,A))\frac{p_s(2,A)}{p_s(2,A) + p_{b4}((3,4),A)}$$

Αν η μηχανή M_4 ήταν blockedγια τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t, θα πρέπει να εξακολουθήσει να είναι blocked για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t+1. Χρησιμοποιώντας και τροποποιώντας ελαφρά ένα τύπο που παρουσιάζεται από τον Nemec (1999), αυτό το γεγονός εκφράζεται από τη πιθανότητα:

$$\left(1 - r_d(((3,4), A)\right)\frac{p_{b4}((3,4), A)}{p_s(2, A) + p_{b4}((3,4), A)}$$

Συνολικά λοιπόν το δεύτερο γεγονός μπορεί να συμβεί με πιθανότητα

$$(1 - r_u\ (2, A))\frac{p_s(2, A)}{p_s(2, A) + p_{b4}((3,4), A)} + \left(1 - r_d(((3,4), A)\right)\frac{p_{b4}((3,4), A)}{p_s(2, A) + p_{b4}((3,4), A)}$$

Άρα τελικά
$\Pr[U / I] = \Phi_1(\Phi_2 + \Phi_3)$

$\Phi_1 = r_d\ ((3,4), B)$

$$\Phi_2 = (1 - r_u\ (2, A))\frac{p_s(2, A)}{p_s(2, A) + p_{b4}((3,4), A)}$$

$$\Phi_3 = \left(1 - r_d(((3,4), A)\right)\frac{p_{b4}((3,4), A)}{p_s(2, A) + p_{b4}((3,4), A)}$$

Υπολογισμός της ποσότητας $\Pr[U / D]$:

Αυτός ο όρος εκφράζει τη πιθανότητα του γεγονότος η μηχανή M_4 να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος τύπου Β τη χρονική στιγμή t+1, δοθέντος ότι δεν παρήγαγε προϊόντα τύπου Β γιατί ήταν down αλλά ήταν και starved ή blocked για τα προϊόντα τύπου Α.

Πρώτα από όλα θα πρέπει η μηχανή M_4 να επισκευαστεί και αυτό μπορεί να συμβεί με πιθανότητα r_4.

Επίσης αν η μηχανή M_4 ήταν down και starved τη χρονική στιγμή t για τα προϊόντα τύπου Α, θα πρέπει να εξακολουθήσει να είναι starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t+1.
Τροποποιώντας ελαφρά ένα τύπο που παρουσιάζεται από τον Nemec (1999), αυτό το γεγονός εκφράζεται από τη πιθανότητα:

$$(1 - r_u\ (2, A))\frac{p\ (2, A,0,0,0)}{p\ (2, A,0,0,0) + \sum_{\substack{n=N-1 \\ \alpha_1,\alpha_3 \in \{0,1\}}}^{n=N} p(((3,4), A), n, \alpha_1, 0, \alpha_3)}$$

Αν η μηχανή M_4 ήταν down και blocked τη χρονική στιγμή t για τα προϊόντα τύπου A, θα πρέπει να εξακολουθήσει να είναι blocked για τα προϊόντα τύπου A τη χρονική στιγμή t+1.
Τροποποιώντας ελαφρά ένα τύπο που παρουσιάζεται από τον Nemec (1999), αυτό το γεγονός εκφράζεται από τη πιθανότητα:

$$\left(1-r_d((3,4),A)\right)\frac{\sum_{\substack{n=N-1\\ \alpha_1,\alpha_3\in\{0,1\}}}^{n=N} p(((3,4),A),n,\alpha_1,0,\alpha_3)}{p\ (2,A,0,0,0)+\sum_{\substack{n=N-1\\ \alpha_1,\alpha_3\in\{0,1\}}}^{n=N} p(((3,4),A),n,\alpha_1,0,\alpha_3)}$$

Άρα τελικά
$\Pr[U/D]=\Phi_4(\Phi_5+\Phi_6)$

$\Phi_4=r_4$

$$\Phi_5=(1-r_u\ (2,A))\frac{p\ (2,A,0,0,0)}{p\ (2,A,0,0,0)+\sum_{\substack{n=N-1\\ \alpha_1,\alpha_3\in\{0,1\}}}^{n=N} p(((3,4),A),n,\alpha_1,0,\alpha_3)}$$

$$\Phi_6=\left(1-r_d((3,4),A)\right)\frac{\sum_{\substack{n=N-1\\ \alpha_1,\alpha_3\in\{0,1\}}}^{n=N} p(((3,4),A),n,\alpha_1,0,\alpha_3)}{p\ (2,A,0,0,0)+\sum_{\substack{n=N-1\\ \alpha_1,\alpha_3\in\{0,1\}}}^{n=N} p(((3,4),A),n,\alpha_1,0,\alpha_3)}$$

Υπολογισμός της ποσότητας $\Pr[U/V_1]$:

Η πιθανότητα αυτή εκφράζει το γεγονός η μηχανή M_4 να ολοκληρώσει την επεξεργασία ενός προϊόντος τη χρονική στιγμή t+1, δοθέντος ότι η μηχανή M_4 ήταν up και ΄΄μόλις΄΄ έγινε blocked ή starved για τα προϊόντα τύπου A και δεν ήταν blocked ή starved για τα προϊόντα τύπου B τη χρονική στιγμή t..

Πρώτα θα ασχοληθούμε με το γεγονός ότι τη χρονική στιγμή t-1, ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(2,A)}$ έχει μόνο ένα προϊόν ή ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ έχει μόνο χώρο για δυο μονάδες προϊόντος ελεύθερο δηλαδή έχει $N_{((3,4),A)}$-2 προϊόντα.

Για να γίνει η M_4 starved τη χρονική στιγμή t, ενώ τη χρονική στιγμή t-1 ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(2,A)}$ είχε μόνο ένα προϊόν θα πρέπει η upstream μηχανή $M_u(2,A)$ να μην προσθέσει προϊόν στον αποθηκευτικό χώρο $B_{(2,A)}$.
Το γεγονός ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(2,A)}$ έχει μόνο ένα προϊόν εκφράζεται από τις πιθανότητες του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(2,A) για τις οποίες n=1 και επειδή ο

αποθηκευτικός χώρος $B_{(2,A)}$ πρέπει να είναι άδειος τη χρονική στιγμή t, θα πρέπει $\alpha_d(2,A)=1$.
Οι πιθανότητες αυτές είναι οι $p(2,A,1,0,1), p(2,A,1,1,1)$,

Ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(2,A)}$ είναι άδειος τη χρονική στιγμή t με πιθανότητα η οποία δίνεται από τον τύπο όπου

$$\frac{\big(1-r_u(2,A)\big)p(2,A,1,0,1)+p_u(2,A)p_u(2,A,1,1,1)}{p(2,A,1,0,1)+p_u(2,A,1,1,1)}$$

Ομοίως για να γίνει η M_4 blocked τη χρονική στιγμή t, ενώ τη χρονική στιγμή t-1 ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ είχε $N_{((3,4),A)}$-2 προϊόντα, θα πρέπει η downstream μηχανή $M_d((3,4),A)$ να μην αφαιρέσει προϊόν στον αποθηκευτικό χώρο $B_{((3,4),A)}$.
Το γεγονός ότι ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ έχει $N_{((3,4),A)}$-2 προϊόντα εκφράζεται από τις πιθανότητες του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L((3,4),A) για τις οποίες n=N-2 ή n=N-3 και επειδή ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ πρέπει να είναι γεμάτος τη χρονική στιγμή t, θα πρέπει $\alpha_{u_2}((3,4),A)=1$.
Ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$είναι γεμάτος τη χρονική στιγμή t με πιθανότητα η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\frac{M}{L}$$

όπου

$$M=\big(1-r_d((3,4),A)\big)p((3,4),A,N-2,0,1,0)+\big(1-r_d((3,4),A)\big)p((3,4),A,N-2,1,1,0)+$$
$$p_d((3,4),A)p((3,4),A,N-2,0,1,1)+p_d((3,4),A)p((3,4),A,N-2,1,1,1)+$$
$$\big(1-r_d((3,4),A)\big)r_{u_1}((3,4),A)p((3,4),A,N-3,0,1,0)+$$
$$\big(1-r_d((3,4),A)\big)\big(1-p_{u_1}((3,4),A)\big)p((3,4),A,N-3,1,1,0)+r_{u_1}((3,4),A)p_d((3,4),A)p((3,4),A,N-3,0,1,1)+$$
$$\big(1-p_{u_1}((3,4),A)\big)p_d((3,4),A)p((3,4),A,N-3,1,1,1)$$

και

$$L=p(((3,4),A),N-2,0,1,0)+p(((3,4),A),N-2,1,1,0)+p(((3,4),A),N-2,0,1,1)+$$
$$p(((3,4),A),N-2,1,1,1)+p((3,4),A,N-3,1,1,0)+p((3,4),A,N-3,0,1,0)+$$
$$p((3,4),A,N-3,0,1,1)+p((3,4),A,N-3,1,1,1)$$

Άρα τελικά

$$\Pr[U/V_1]=\frac{\big(1-r_u(2,A)\big)p(2,A,1,0,1)+p_u(2,A)p_u(2,A,1,1,1)}{p(2,A,1,0,1)+p_u(2,A,1,1,1)}+\frac{M}{L}$$

Υπολογισμός του όρου $\Pr[U/V_2]$

Για τον υπολογισμό του όρου $\Pr[U/V_2]$ ισχύει ότι και προηγούμενος αλλά επιπλέον η μηχανή M_4 θα πρέπει τη χρονική στιγμή t να πάψει να είναι blocked για τα προϊόντα τύπου Β, δεδομένου ότι ήταν blocked τη χρονική για τα προϊόντα τύπου Β στιγμή t-1.
Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η downstream μηχανή $M_d((3,4),B)$ να αφαιρέσει ένα προϊόν από τον αποθηκευτικό χώρο $B_{((3,4),B)}$. Αυτό γίνεται με πιθανότητα $r_d((3,4),B)$

Άρα τελικά ο όρος $\Pr[U/V_2]$ παίρνει τη μορφή :

$$\Pr[U/V_2] = r_d((3,4),B)\Pr[U/V_1]$$

Θα αναλύσουμε τώρα ένα προς ένα τα γεγονότα D,U,I_1 και I_2.

Το γεγονός D είναι

$$D = \{\alpha_4(t)=0 \cap (n_{(2,A)}(t-1)=0 \cup n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}-2)\cap$$
$$n_{(2,B)}(t-1)>0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1)<N_{(5,B)}-1\}$$

Το γεγονός

$$\{\alpha_d(2,B)=0 \cap n_{(2,B)}>0\}\Leftrightarrow$$
$$\{\alpha_4(t)=1 \cap n_{(2,A)}(t-1)>0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)<N_{((3,4),A)}-1 \cap n_{(2B)}(t-1)>0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1)<N_{((3,4),B)}-1\}\cup$$
$$\begin{Bmatrix}\alpha_4(t)=1 \cap n_{(2,A)}(t-1)>0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)<N_{((3,4),A)}-1 \cap n_{(1,B)}(t-1)>0 \cap \\ n_{((3,4),B)}(t-1)=N_{((3,4),B)}\cup N_{((3,4),B)}-1\end{Bmatrix}\cup$$
$$\begin{Bmatrix}\alpha_4(t)=1 \cap (n_{(2,A)}(t-1)=0 \cup n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}\cup N_{((3,4),A)}-1)\cap \\ n_{(2,B)}(t-1)>0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1)=N_{((3,4),B)}\cup N_{((3,4),B)}-1\end{Bmatrix}\cup$$
$$\begin{Bmatrix}\alpha_4(t)=0 \cap n_{(2,A)}(t-1)>0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)<N_{((3,4),A)}-1 \cap \\ n_{(2,B)}(t-1)>0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1)<N_{((3,4),B)}-1\end{Bmatrix}\cup$$
$$\begin{Bmatrix}\alpha_4(t)=0 \cap (n_{(2,A)}(t-1)=0 \cup n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)}\cup N_{((3,4),A)}-1) \\ \cap n_{(2,B)}(t-1)>0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1)<N_{((3,4),B)}-1\end{Bmatrix}\cup$$
$$\begin{Bmatrix}\alpha_4(t)=0 \cap n_{(2,A)}(t-1)>0 \cap n_{((3,4),A)}(t-1)<N_{((3,4),A)}-1 \cap n_{(2,B)}(t-1)>0 \\ \cap n_{((3,4),B)}(t-1)=N_{((3,4),B)}\cup N_{((3,4),B)}-1\end{Bmatrix}$$

Ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα

$$A = \{n_{(2,A)}>0 \cap n_{((3,4),A)}<N_{((3,4),A)}-1\}$$
$$A^C = \{n_{(2,A)}=0 \cup n_{((3,4),A)}=N_{((3,4),A)}\cup N_{((3,4),A)}-1\}$$
$$B = \{n_{(2,B)}>0 \cap n_{((3,4),B)}<N_{((3,4),B)}-1\}$$
$$B^C = \{n_{(2,B)}=0 \cup n_{((3,4),B)}=N_{((3,4),B)}\cup N_{((3,4),B)}-1\}$$

Έχουμε

$$\{\alpha_d(2,B)=0 \cap n_{(2,B)}>0\}\Leftrightarrow$$
$$\{A \cap B\}\cup\{A \cap n_{(2,B)}>0 \cap n_{((3,4),B)}=N_{((3,4),B)}\cup N_{((3,4),B)}-1\}\cup$$
$$\{\alpha_4(t)=1 \cap A^C \cap n_{(2,B)}(t-1)>0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1)=N_{((3,4),B)}\cup N_{((3,4),B)}-1\}\cup D$$

Άρα

$$\Pr[D]=\Pr[\{\alpha_d(2,B)=0 \cap n_{(2,B)}>0\}]-\Pr[\{A \cap B\}]-$$
$$\Pr[\{A \cap n_{(2,B)}>0 \cap n_{((3,4),B)}=N_{((3,4),B)}\cup N_{((3,4),B)}-1\}]-$$
$$\Pr[\{\alpha_4(t)=1 \cap A^C \cap n_{(2,B)}(t-1)>0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1)=N_{((3,4),B)}\cup N_{((3,4),B)}-1\}]$$

Όμως

$$p_s(2,B)=\Pr[\alpha_4(t)=1 \cap A^C \cap n_{(2,B)}(t-1)=0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1)<N_{((3,4),B)}]$$

$$p_{b4}((3,4),B)=\Pr\left[\alpha_4(t)=1\cap A^C\cap n_{(2,B)}(t-1)>0\cap n_{((3,4),B)}(t-1)=N_{((3,4),B)}\cup N_{((3,4),B)}-1\right]$$

$$\Pr\left[\alpha_3(t)=1\cap A^C\cap B^C\right]=p_s(2,B)+p_{b4}((3,4),B)$$

επειδή
$\Pr\left[\alpha_4(t)=0\cap A^C\cap B^C\right]=0$, έχουμε ότι
$\Pr\left[A^C\cap B^C\right]=p_s(2,B)+p_{b4}((3,4),B)$
επίσης $\Pr\left[A\cap n_{(2,B)}(t-1)=0\cap n_{((3,4),B)}(t-1)<N_{((3,4),B)}-1\right]=p(2,B,0,0,0)$
$\Pr\left[A\cap n_{(2,B)}(t-1)>0\cap n_{((3,4),B)}(t-1)=N_{((3,4),B)}\cup N_{((3,4),B)}-1\right]=$
$p((3,4),B),N,0,0,0)+p((3,4),B),N-1,0,0,0)$
άρα $\Pr\left[A\cap B^C\right]=p(2,B,0,0,0)+p((3,4),B),N,0,0,0)+p((3,4),B),N-1,0,0,0)$

ισχύει ότι $\Pr\left[B^C\right]=\Pr\left[A^C\cap B^C\right]+\Pr\left[A\cap B^C\right]=$
$p_s(2,B)+p_{b4}((3,4),B)+p(2,B,0,0,0)+p((3,4),B),N,0,0,0)+p((3,4),B),N-1,0,0,0)$

ομοίως έχουμε ότι

$$\Pr\left[A^C\right]=p_s(2,A)+p_{b4}((3,4),A)+p(2,A,0,0,0)+p((3,4),A),N,0,0,0)+p((3,4),A),N-1,0,0,0)$$
και
$$\Pr[A]=1-\Pr\left[A^C\right]$$

Ισχύει ότι $\Pr\left[A\cap B\right]=\Pr[A]-\Pr\left[A\cap B^C\right]$

Η ποσότητα $\Pr\left[\left\{\alpha_d(2,B)=0\cap n_{(2,B)}>0\right\}\right]$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον τύπο που παρουσιάζεται στον Nemec (1999)

$$PR_d(2,B)=\Pr\left[\alpha_d=1\cap n_{(2,B)}>0\right]+v_d\,p(2,B,0,0,1)-r_d\,p(2,B,0,0,0)$$
και την ισότητα που περιγράφει ότι για κάθε βλάβη υπάρχει και μια αντίστοιχη επιδιόρθωση.

Δηλαδή
$r_d\Pr\left[\alpha_d=0\cap n_{(2,B)}>0\right]+r_d\Pr\left[\alpha_d=0\cap n_{(2,B)}=0\right]=$
$p_d\ \Pr\left[\alpha_d=1\cap n_{(2,B)}>0\right]+v_d\Pr\left[\alpha_d=1\cap n_{(2,B)}=0\right]\Rightarrow$

$$\Pr\left[\alpha_d=0\cap n_{(2,B)}>0\right]=-\Pr\left[\alpha_d=0\cap n_{(2,B)}=0\right]+\frac{p_d}{r_d}\Pr\left[\alpha_d=1\cap n_{(2,B)}>0\right]+$$

$$\frac{v_d}{r_d}\Pr\left[\alpha_d=1\cap n_{(2,B)}=0\right]\Rightarrow$$

$$\Pr\left[\alpha_d=0\cap n_{(2,B)}>0\right]=-p(2,B,0,0,0)+\frac{p_d}{r_d}\left(PR_d(2,B)-v_d\,p(2,B,0,0,1)+r_d\,p(2,B,0,0,0)\right)+$$

$$\frac{v_d}{r_d}\,p(2,B,0,0,1)$$

Άρα τελικά

$$\Pr[D] = p(2,B,0,0,0) + \frac{p_d}{r_d}\left(PR_d(2,B) - v_d\, p(2,B,0,0,1) + r_d\, p(2,B,0,0,0)\right) +$$

$$\frac{v_d}{r_d}\, p(2,B,0,0,1) - 1 + p_s(2,A) + p_{b4}((3,4),A) + p(2,A,0,0,0) + p((3,4),A),N,0,0,0) +$$

$$p((3,4),A),N-1,0,0,0) + p(2,B,0,0,0) + p((3,4),B),N,0,0,0) + p((3,4),B),N-1,0,0,0) - p_{b4}((3,4),B) -$$

$$p(2,B,0,0,0)$$

Υπολογισμός της πιθανότητας $\Pr[I]$:

$$\Pr[I] = p_{b4}((3,4),B)$$

Υπολογισμός της ποσότητας $\Pr[V_1]$:
Επειδή η μηχανή M_4 είναι up και δεν είναι starved ή blocked για τα προϊόντα τύπου Α αυτό σημαίνει ότι η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_{u2}((3,4),B)$ θα είναι down. Ωστόσο δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τίποτα για τις ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές $M_{u1}((3,4),B)$ ή $M_d((3,4),B)$ οι οποίες μπορεί να είναι up ή down.

Το γεγονός V_1 περιγράφεται από τη πιθανότητα

$$\Pr[V_1] = \sum_{n=0}^{n=N-2}\left(p((3,4),B,n,0,0,0) + p((3,4),B,n,0,0,1) + p((3,4),B,n,1,0,1) + p((3,4),B,n,1,0,0)\right)$$

Υπολογισμός του όρου $\Pr[V_2]$:

Ακολουθώντας παρόμοιο συλλογισμό
Επειδή η μηχανή M_4 είναι up και δεν είναι starved ή blocked για τα προϊόντα τύπου Α αυτό σημαίνει ότι η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_{u2}((3,4),B)$ θα είναι down, ενώ επειδή ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),B)}$ είναι γεμάτος θα υπολογίσουμε μόνο τις στάσιμες πιθανότητες με n=N ή n=N-1. Ωστόσο δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τίποτα για τις ΄΄εικονικές΄΄ μηχανές $M_{u1}((3,4),B)$ ή $M_d((3,4),B)$ οι οποίες μπορεί να είναι up ή down.

Άρα

$$\Pr[V_2] = \sum_{n=N-1}^{n=N}\left(p((3,4),B,n,0,0,0) + p((3,4),B,n,0,0,1) + p((3,4),B,n,1,0,1) + p((3,4),B,n,1,0,0)\right)$$ επειδή

τα γεγονότα I,D,V_1,V_2 είναι ξένα μεταξύ τους έχουμε ότι:

$$\Pr[I \cup V_1 \cup V_2 \cup D] = \Pr[I] + \Pr[V_1] + \Pr[D] + \Pr[V_2]$$

Γ.15 Εξίσωση διακοπής της ροής για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή M_d(2,A)

Η πιθανότητα $p_d(2,A)$ εκφράζει τη πιθανότητα η μηχανή M_d(2,A) να είναι down τη χρονική στιγμή t+1, δοθέντος ότι ήταν up και όχι starved για τα προϊόντα τύπου Α τη χρονική στιγμή t.

Δηλαδή

$$p_d(2,A) = \Pr\big[M_d(2,A)\ \textit{είναι down τη στιγμή}\ t+1 / \big[M_d(2,A)\ \textit{είναι up και}\ n_{(2,A)} > 0\ \textit{τη στιγμή}\ t\big]$$

Η μηχανή $M_d(2,A)$ να είναι down τη χρονική στιγμή t+1 αν και μόνο αν

- Η M_4 είναι down ή
- $n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cup n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1$ και $M_d((3,4),A)$ είναι down

άρα

$$p_d(2,A) = \Pr\big[\alpha_4(t+1) = 0 / M_d(2,A)\ \textit{είναι up και}\ n_{(2,A)} > 0\ \textit{τη στιγμή}\ t\big] +$$
$$\Pr\big[\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} \cup N_{((3,4),A)} - 1\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0\ \textit{τη στιγμή}\ t+1 / M_d(2,A)\ \textit{είναι up και}\ n_{(2,A)} > 0\ \textit{τη στιγμή}\ t\big]$$

Ο πρώτος όρος είναι ίσος με p_4

Ο δεύτερος όρος γίνεται :

$$\Pr\big[\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0\ \textit{τη στιγμή}\ t+1 / M_d(2,A)\ \textit{είναι up και}\ n_{(2,A)} > 0\ \textit{τη στιγμή}\ t\big] +$$
$$\Pr\big[\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0\ \textit{τη στιγμή}\ t+1 / M_d(2,A)\ \textit{είναι up και}\ n_{(2,A)} > 0\ \textit{τη στιγμή}\ t\big] =$$
$$\Pr\big[\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0\ \textit{τη στιγμή}\ t+1/B\big] +$$
$$\Pr\big[\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1\ \textit{τη στιγμή}\ t+1/B\big] +$$
$$\Pr\big[\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0\ \textit{τη στιγμή}\ t+1/B\big] +$$
$$\Pr\big[\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1\ \textit{τη στιγμή}\ t+1/B\big] +$$
$$\Pr\big[\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0\ \textit{τη στιγμή}\ t+1/B\big] +$$
$$\Pr\big[\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1\ \textit{τη στιγμή}\ t+1/B\big] +$$
$$\Pr\big[\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0\ \textit{τη στιγμή}\ t+1/B\big] +$$
$$\Pr\big[\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1\ \textit{τη στιγμή}\ t+1/B\big]$$

όπου

$$B = \{M_d(2,A)\ \textit{είναι up και}\ n_{(2,A)} > 0\ \textit{τη στιγμή}\ t\}$$

Θα αναλύσουμε τώρα τον όρο

$$\Pr\big[\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0\ \textit{τη στιγμή}\ t+1/B\big]$$

Για να έχουμε

$\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0\ \textit{τη στιγμή}\ t+1$, θα πρέπει να τη χρονική στιγμή t να είναι $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1\}$. Όμως επειδή τη χρονική στιγμή t ισχύει ότι $\{M_d(2,A)\ \textit{είναι up και}\ n_{(2,A)} > 0\ \textit{τη στιγμή}\ t\}$ έχουμε ότι

$\{M_d(2,A)\ \textit{είναι up και}\ n_{(2,A)} > 0\ \textit{τη στιγμή}\ t\} \cap \{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1\} = \varnothing$

άρα ο όρος
$\Pr[\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0\ \textit{τη στιγμή}\ t+1/B] = 0$
Για να έχουμε
$\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1\ \textit{τη στιγμή}\ t+1$ θα πρέπει τη χρονική στιγμή t να έχουμε

- $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει να μην επισκευαστεί η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ με πιθανότητα $(1 - r_{u_1}((3,4),A))$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_2}((3,4),A))$ και η μηχανή $M_d((3,4),A)$ να μην επισκευαστεί με πιθανότητα $(1 - r_d((3,4),A))$
- $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει να μην επισκευαστεί η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ με πιθανότητα $(1 - r_{u_1}((3,4),A))$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_2}((3,4),A))$ ενώ η μηχανή $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $(p_d((3,4),A))$
- $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $(p_{u_1}((3,4),A))$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_2}((3,4),A))$ ενώ η μηχανή $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να μην επισκευαστεί με πιθανότητα $(1 - r_d((3,4),A))$
- $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $(p_{u_1}((3,4),A))$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να μην χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_2}((3,4),A))$ ενώ η μηχανή $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $(p_d((3,4),A))$

Οι όροι για τους οποίους $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2\} \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ αυτός είναι ίσος με μηδέν γιατί δεν μπορεί ταυτόχρονα να έχουμε $\alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ και $\alpha_d(2,A) = 1$.

Για να έχουμε

$\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0\ \textit{τη στιγμή}\ t+1$
θα πρέπει τη χρονική στιγμή t να έχουμε

- $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει να επισκευαστεί η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ με πιθανότητα $(r_{u_1}((3,4),A))$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $(p_{u_2}((3,4),A))$ και η μηχανή $M_d((3,4),A)$ να μην επισκευαστεί με πιθανότητα $(1 - r_d((3,4),A))$

- $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει να επισκευαστεί η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ με πιθανότητα $(r_{u_1}((3,4),A))$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $(p_{u_2}((3,4),A))$ ενώ η μηχανή $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $(p_d((3,4),A))$
- $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μη χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_1}((3,4),A))$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $(p_{u_2}((3,4),A))$ ενώ η μηχανή $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να μην επισκευαστεί με πιθανότητα $(1 - r_d((3,4),A))$
- $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μη χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_1}((3,4),A))$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να χαλάσει με πιθανότητα $(p_{u_2}((3,4),A))$ ενώ η μηχανή $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $(p_d((3,4),A))$

Οι όροι για τους οποίους $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2\} \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ αυτός είναι ίσος με μηδέν γιατί δεν μπορεί ταυτόχρονα να έχουμε $\alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ και $\alpha_d(2,A) = 1$.

Για να έχουμε

$\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ *τη στιγμή* $t+1$

θα πρέπει τη χρονική στιγμή t να έχουμε

- $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 3\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει να επισκευαστεί η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ με πιθανότητα $(r_{u_1}((3,4),A))$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να μη χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_2}((3,4),A))$ και η μηχανή $M_d((3,4),A)$ να μην επισκευαστεί με πιθανότητα $(1 - r_d((3,4),A))$
- $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 3\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει να επισκευαστεί η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ με πιθανότητα $(r_{u_1}((3,4),A))$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να μη χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_2}((3,4),A))$ ενώ η μηχανή $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $(p_d((3,4),A))$
- $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 3\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μη χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_1}((3,4),A))$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να μη χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_2}((3,4),A))$ ενώ η μηχανή $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να μην επισκευαστεί με πιθανότητα $(1 - r_d((3,4),A))$
- $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 3\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μη χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_1}((3,4),A))$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να μη χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_2}((3,4),A))$ ενώ η μηχανή $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $(p_d((3,4),A))$

Οι όροι για τους οποίους $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 3\} \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ αυτός είναι ίσος με μηδέν γιατί δεν μπορεί ταυτόχρονα να έχουμε $\alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ και $\alpha_d(2,A) = 1$.

Οι όροι
$\Pr[\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \text{ τη στιγμή } t+1/B]$,
$\Pr[\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1 \text{ τη στιγμή } t+1/B]$,
$\Pr[\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0 \text{ τη στιγμή } t+1/B]$
Είναι ίσοι με μηδέν.
Ο πρώτος όρος είναι ίσος με μηδέν, διότι θα έπρεπε τη χρονική στιγμή t, να είχαμε

$\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}\}$. Όμως επειδή τη χρονική στιγμή t ισχύει ότι
$\{M_d(2,A) \text{ είναι up και } n_{(2,A)} > 0\}$ έχουμε ότι

$$\{M_d(2,A) \text{ είναι up και } n_{(2,A)} > 0 \text{ τη στιγμή } t\} \cap \{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}\} = \varnothing$$

Επίσης ο δεύτερος και τρίτος όρος είναι ίσος με μηδέν, διότι θα έπρεπε τη χρονική στιγμή t, να είχαμε

$\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1\}$. Όμως επειδή τη χρονική στιγμή t ισχύει ότι
$\{M_d(2,A) \text{ είναι up και } n_{(2,A)} > 0\}$ έχουμε ότι

$$\{M_d(2,A) \text{ είναι up και } n_{(2,A)} > 0 \text{ τη στιγμή } t\} \cap \{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 1\} = \varnothing$$

Για να έχουμε

$$\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)}\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1 \text{ τη στιγμή } t+1$$
θα πρέπει τη χρονική στιγμή t να έχουμε

- $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει να επισκευαστεί η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ με πιθανότητα $(r_{u_1}((3,4),A))$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να μη χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_2}((3,4),A))$ και η μηχανή $M_d((3,4),A)$ να μην επισκευαστεί με πιθανότητα $(1 - r_d((3,4),A))$
- $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει να επισκευαστεί η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ με πιθανότητα $(r_{u_1}((3,4),A))$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να μη χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_2}((3,4),A))$ ενώ η μηχανή $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $(p_d((3,4),A))$
- $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 0 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μη χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_1}((3,4),A))$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να μη χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_2}((3,4),A))$ ενώ η μηχανή $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να μην επισκευαστεί με πιθανότητα $(1 - r_d((3,4),A))$

- $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2\} \cap \alpha_d((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_1}((3,4),A) = 1 \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 1$ και θα πρέπει η μηχανή $M_{u1}((3,4),A)$ να μη χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_1}((3,4),A))$, η μηχανή $M_{u2}((3,4),A)$ να μη χαλάσει με πιθανότητα $(1 - p_{u_2}((3,4),A))$ ενώ η μηχανή $M_d((3,4),A)$ θα πρέπει να χαλάσει με πιθανότητα $(p_d((3,4),A))$

Οι όροι για τους οποίους $\{n_{((3,4),A)} = N_{((3,4),A)} - 2\} \cap \alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ αυτός είναι ίσος με μηδέν γιατί δεν μπορεί ταυτόχρονα να έχουμε $\alpha_{u_2}((3,4),A) = 0$ και $\alpha_d(2,A) = 1$.

Ο όρος $\Pr[M_d(2,A)\ \textit{είναι up και}\ n_{(2,A)} > 0\ \textit{τη στιγμή}\ t]$ υπολογίζεται ως εξής:
Για την ΄΄εικονική΄΄ downstream μηχανή $M_d(2,A)$ ισχύει η ισότητα ότι. .(βλέπε Nemec (1999)).

$$PR_d(2,A) = \Pr[\alpha_d(2,A) = 1 \cap n_{(2,A)} > 0] + v_d(2,A)p(2,A,0,0,1) - r_d p(2,A,0,0,0)$$

Γ.16 Εξίσωση ροής flow rate idle time για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_d(2,B)$

Η απόδοση της πραγματικής μηχανής M_4, για τα προϊόντα τύπου Β, $PR_B(4)$ η οποία λόγω της αρχής διατήρησης της ροής είναι ίση με την απόδοση του ΄΄εικονικού΄΄ υποσυστήματος L(2,B), PR(2,B) δίνεται από τον τύπο που παρουσιάζεται και αποδεικνύεται από τον Nemec (1999)

$$PR_B(4) = PR(2,B) =$$
$$e_4\begin{pmatrix} p_s(2,A) + p_{b4}((3,4),A) + p((2,A),0,0,0) + p(((3,4),A),N,0,0,0) + \\ p(((3,4),A),N,1,0,0) + p(((3,4),A),N-1,0,0,0) + p(((3,4),A),N-1,1,0,0) + \\ p(((3,4),A),N-1,1,0,1) + p(((3,4),A),N-1,0,0,1) - p_s(2,B) - p_{b4}((3,4),B) \end{pmatrix} \quad (\Gamma 27)$$

Η απόδοση της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_d(2,B)$, $PR_d(2,B)$ δίνεται από τον τύπο

$$PR_d(2,B) = e_d(1 - p_s) - e_d v_d p_s\left(\frac{r_u + r_d - r_u p_d - 2r_u r_d}{r_d(r_u + r_d - r_u r_d)}\right)$$

επίσης για την απόδοση της ΄΄εικονικής΄΄ μηχανής $M_{u2}((3,4),B)$, $PR_{u2}((3,4),B)$ έχουμε ότι

$$PR_{u1}((3,4),B) = \sum_{\substack{n=0 \\ \alpha_1,\alpha_3 \in \{0,1\}}}^{n=N-2} (p(((3,4),B),n,\alpha_1,1,\alpha_3)) + v_{u2}((3,4),B)p_{b4}((3,4),B) -$$
$$r_{u2}((3,4),B) \sum_{\substack{n=N-1 \\ \alpha_1,\alpha_3 \in \{0,1\}}}^{n=N} (p(((3,4),B),n,\alpha_1,1,\alpha_3))$$

Θέτουμε

$$C = p_s(2,A) + p_{b4}((3,4),A) + p((2,A),0,0,0) + p(((3,4),A),N,0,0,0) +$$
$$p(((3,4),A),N,1,0,0) + p(((3,4),A),N-1,0,0,0) + p(((3,4),A),N-1,1,0,0) +$$
$$p(((3,4),A),N-1,1,0,1) + p(((3,4),A),N-1,0,0,1)$$

$$\frac{r_u + r_d - r_u p_d - 2r_u r_d}{r_d\left(r_u + r_d - r_u r_d\right)} = K$$

Λύνοντας τους παραπάνω δυο τύπους ως προς $p_s(1,B)\ \kappa\alpha\iota\ p_{b4}((3,4),B)$, αντίστοιχα και ύστερα από κάποιες αλγεβρικές πράξεις έχουμε ότι

$$p_s(2,B) = \frac{e_d(2,B) - PR_d(2,B)}{e_d(2,B)(1 + v_d(2,B)K)} \qquad (\Gamma 28)$$

$$p_{b4}((3,4),B) = \Psi_1 + \Psi_2 \qquad (\Gamma 29)$$

$$\Psi_1 = \frac{PR_{u2}((3,4),B) - \sum_{\substack{n=0 \\ \alpha_1,\alpha_3 \in \{0,1\}}}^{n=N-2} \left(p(((3,4),B),n,\alpha_1,1,\alpha_3)\right)}{v_{u2}((3,4),B)}$$

$$\Psi_2 = \frac{r_{u2}((3,4),B) \sum_{\substack{n=N-1 \\ \alpha_1,\alpha_3 \in \{0,1\}}}^{n=N} \left(p(((3,4),B),n,\alpha_1,1,\alpha_3)\right)}{v_{u2}((3,4),B)}$$

$$Q = r(2,B)\left(1 + v_d(2,B)K\right)$$

Αντικαθιστώντας τις ποσότητες $p_s(1,B), p_{b3}((3,4),B)\ \kappa\alpha\iota\ C$ στην αρχική εξίσωση (Γ27) και λαμβάνοντας υπόψη ότι PR(2,B)=PR_d(2,B) (λόγω της διατήρησης της ροής) και ύστερα από πάρα πολλές αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στον παρακάτω τύπο για την εύρεση της p_d(2,B).

$$p_d(2,B) = \frac{Q \cdot \left[\frac{PR(2,B)}{e_4} - C + r_d(2,B)\left(\frac{1 - PR(2,B)}{Q}\right) + p_{b4}((3,4),B)\right]}{PR(2,B)}$$

Γ.17 Εξίσωση βλάβης αδράνειας για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή M_d(2,A)

Η εξίσωση βλάβης αδράνειας για την ΄΄εικονική΄΄ μηχανή M_d(2,A) πανομοιότυπη με αυτή που παρουσιάστηκε για τη μηχανή M_d(1,A). Για αυτό το λόγο παραλείπεται και παρουσιάζεται μόνο η τελική μορφή της εξίσωσης που είναι :

$$v_u(2,A) = p_4 p_{b4}((3,4),A)\left(1 - \frac{p_s(2,B) + p_{b4}((3,4),B)}{p_s(2,A) + p_{b4}((3,4),A)}\right)$$

Γ18 Εξίσωση βλάβης αδράνειας για την εικονική μηχανή $M_d(2,B)$

Η πιθανότητα αδράνειας $v_d(2,B)$ εκφράζει το γεγονός η ΄΄εικονική΄΄ μηχανή $M_u(2,B)$ να παρουσιάσει βλάβη δεδομένου ότι είναι starved για τα προϊόντα τύπου Β.

Δηλαδή

$$v_d(2,B) = \Pr\Big[\alpha_4(t+1)=0 \cap n_{(2,A)}(t)>0 \cap n_{((3,4),A)}(t) < N_{((3,4,A)}-1 \,/\, \alpha_4(t)=1 \cap \big(n_{(2,A)}(t-1)=0 \cup n_{((3,4),A)}(t-1)=N_{((3,4),A)} \cup N_{((3,4),A)}-1\big) \cap n_{(2,B)}(t-1)=0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) < N_{((3,4),B)}-1\Big]$$

Ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα

$$U = \left\{\alpha_4(t+1)=0 \cap n_{(2,A)}(t)>0 \cap n_{((3,4),A)}(t) < N_{((3,4,A)}-1\right\}$$

$$V = \left\{\begin{matrix}\alpha_4(t)=1 \cap \big(n_{(2,A)}(t-1)=0 \cap n_{((3,4),A)}(t) < N_{((3,4,A)}-1\big)\big) \\ \cap\, n_{(2,B)}(t-1)=0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) < N_{((3,4),B)}-1\end{matrix}\right\}$$

$$W = \left\{\begin{matrix}\alpha_4(t)=1 \cap \big(n_{(2,A)}(t-1)>0 \cap n_{((3,4),A)}(t) = N_{((3,4,A)} \cup N_{((3,4,A)}-1\big)\big) \\ \cap\, n_{(2,B)}(t-1)=0 \cap n_{((3,4),B)}(t-1) < N_{((3,4),B)}-1\end{matrix}\right\}$$

Έχουμε

$$v_d(2,B) = \Pr[U/V \cup W] = \frac{\Pr[U/V]\Pr[V] + \Pr[U/W]\Pr[W]}{\Pr[V \cup W]}$$

Θα αναλύσουμε τώρα ένα προς ένα τους παραπάνω όρους

$\Pr[U/V] = \left(\left(r_u\ (2,A)\right)\right)$ η πιθανότητα αυτή εκφράζει το γεγονός ο αποθηκευτικός χώρος $B_{(2,A)}$ να πάψει να είναι γεμάτος.

$\Pr[U/W] = r_d((3,4),A)$, η πιθανότητα αυτή εκφράζει το γεγονός ο αποθηκευτικός χώρος $B_{((3,4),A)}$ να πάψει να είναι γεμάτος.

$\Pr[V \cup W] = p_s(2,B)$

Έχουμε ήδη δείξει ότι

$$\Pr[V] = p_s(2,B)\frac{p_s(2,A)}{p_{b4}((3,4),A) + p_s(2,A)} \text{ και}$$

$$\Pr[W] = p_s(2,B)\frac{p_{b4}((3,4),A)}{p_{b4}((3,4),A) + p_s(2,A)}$$