Φυλλάδιο 3

Σύρος 2011-2012

Άσκηση 1: Αν $y_1,\ y_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της δ.ε.

$$ty'' + 2y' + te^t y = 0$$

και αν $W(y_1, y_2)(1) = 2$, να βρεθεί η τιμή της $W(y_1, y_2)(5)$.

Άσκηση 2: Εάν y_1 και y_2 είναι οι λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0,\ x > 0$$

με $y_1(1) = 1, y_1'(1) = 0; y_2(1) = 0, y_2'(1) = 1$ να βρεθεί η ορίζουσα Wronski των y_1, y_2.

Άσκηση 3: Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων αν είναι γνωστή μια λύση τους $y_1(x)$:

(i) $(2x - x^2)y'' + 2(x - 1)y' - 2y = 0, \qquad y_1(x) = x - 1.$

(ii) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,\ x \in (-1, 1), \qquad y_1(x) = x.$

(iii) $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0, \qquad y_1(x) = x.$

(iv) $xy'' - (1 + x)y' + y = 0, \qquad y_1(x) = e^x.$

(v) $x^4y'' + 2x^3y' - y = 0,\ x > 0 \qquad y_1(x) = e^{1/x}.$

Άσκηση 4: Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 3y' + 2y = xe^x$$

εάν είναι γνωστή η λύση $y_1(x) = e^{-x}$ της αντίστοιχης ομογενούς της.

Άσκηση 5: Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω Δ. Ε. :

(i) $y'' - 6y' + 9y = 0$ (ii) $y'' - y' + y = 0$ (iii) $y'' - 4y' + 3y = 0$

Άσκηση 6: Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω Δ. Ε. :

(i) $y'' + 2y' + 3y = x^2 + 2x - 1$

(ii) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}(x^2 + 1)$

(iii) $y'' + y = xe^{-x}$

(iv) $y'' - 4y' + 4y = e^x + \sin x$

(v) $y'' - 3y' + 2y = \sin x \cos x$

(vi) $y'' - 2y' + y = xe^x \cos 2x.$

Άσκηση 7: Να βρεθεί η λύση των παρακάτω Π.Α.Τ.

$$(i)\begin{cases} y'' - 4y' - 4y = e^{2x} \\ \\ y(0) = 0 \\ \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad (ii)\begin{cases} y'' + y = x + 2e^{-x} \\ \\ y(0) = 1 \\ \\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

Άσκηση 8: Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω Δ. Ε. :

(i) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$ (ii) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

(iii) $y'' - 2y' + y = \dfrac{1}{x}e^x,\ x > 0$ (iv) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x},\ x > 0$

(v) $y'' - 4y' + 3y = \dfrac{e^x}{1+e^{-2x}}$ (vi) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}.$

(*Υπόδειξη :* Για την εύρεση μερικής λύσης να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Lagrange).

Άσκηση 9: Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(\sin^2 x)y'' - 2(\sin x\cos x)y' + (1+\cos^2 x)y = \sin^3 x,\quad x \in (0,\pi)$$

αφού αποδειχθεί ότι οι $y_1(x) = \sin x$ και $y_2(x) = x\sin x,\ x \in (0,\pi)$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.

Άσκηση 10: Να λυθεί το Π.Α.Τ.:

$$y'' + y = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x \le \pi/2 \\ \\ \cos x, & x > \pi/2 \end{cases}, \qquad y(0) = y'(0) = 1.$$

Υπόδειξη: Να λύσετε τη δ.ε. κατά κλάδους και στη συνέχεια να απαιτήσετε η δίκλαδη λύση να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο.

Άσκηση 11: Εάν $p,\ q$ θετικές σταθερές και $y_1(x),\ y_2(x)$ δύο λύσεις της Δ. Ε.

$$y'' + py' + qy = h(x),$$

να δείξετε ότι $y_1(x) - y_2(x) \to 0$, καθώς $x \to +\infty$.

Άσκηση 12: Να βρείτε τη γενική λύση της Δ. Ε.

$$y'' + py' + qy = h(x), \quad (\ p, q \text{ σταθερές},\ \ h(x) \text{ συνεχής συνάρτηση}),$$

εάν δίνεται ότι οι συναρτήσεις $y_1(x) = \cos x,\ y_2(x) = \cos x + e^x,\ y_3(x) = \cos x + xe^x$ είναι 3 λύσεις της.