Φυλλάδιο 6
Διανυσματικοί Χώροι (2)

Σύρος 2011-2012

1. Να λύσετε τα παρακάτω ομογενή γραμμικά συστήματα και να βρείτε μια βάση και τη διάσταση του χώρου των λύσεων τους L_0.

$$i)\begin{cases} -2x_2 - 10x_3 - 9x_4 + 3x_5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0 \\ -x_1 \quad + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ -3x_1 + \quad 6x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0 \end{cases} \quad ii)\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$iii)\begin{cases} x + y + z - w + u - v = 0 \\ y + z - w - u + v = 0 \end{cases} \quad iv)\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 7x + y + z = 0 \end{cases}$$

2. Να λύσετε και να διερευν΄νσετε τα παρακάτω συστήματα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$i)\begin{cases} (4-\lambda)x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + (1-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \quad ii)\begin{cases} (\lambda+2)x - y + (\lambda+1)z = 0 \\ 2x + \lambda y + z = 0 \\ \lambda x - 3y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

3. Να εξετάσετε εάν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα έχουν λύση και εάν ναι, να τα επιλύσετε.

$$i)\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases} \quad ii)\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases} \quad iii)\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

4. Να εξετάσετε εάν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και εάν ναι, να γράψετε μια διαγωνοποίηση του A.

$$i)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad ii)A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$iii)A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad iv)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. Να εξετάσετε εάν είναι διαγωνοποιήσιμος και εάν ναι να βρείτε μια διαγωνοποίηση του A^{100}.

6. Να βρεθούν οι 3×3 πίνακες A που είναι διαγωνοποιήσιμοι και ικανοποιούν
$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Έστω πίνακας $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ και λ_1, λ_2, ..., λ_n οι ιδιοτιμές του. Να δείξετε ότι η ορίζουσα $|A| = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n$.

8. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα διαγωνοποίησης συμμετρικών πινάκων να βρείτε το είδος της κωνικής του επιπέδου με εξίσωση :
   (α) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 1 = 0$,
   (β) $5x^2 + 8y + 5y^2 = 25$,
   (ς) $3x^2 - 8xy + y^2 - 2x - 4y = 0$,
   (δ) $x^2 + 4xy + 4y^2 = 4$,
   (ε) $xy = 4$

   και να τις σχεδιάσετε.