Φυλλάδιο 5
Διανυσματικοί Χώροι

Σύρος 2011-2012

1. Να εξετάσετε με τον ορισμό εάν τα παρακάτω υποσύνολα U του $\mathbb{R}^3$ είναι διανυσματικοί υπόχωροι του.
   (a) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
   (b) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 = 0,\, x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$
   (c) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0,\, 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0\}$
   (d) $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 2x_2 = 0\}$

2. Να δείξετε ότι το υποσύνολο $[e_1, e_2, ..., e_n]$ του $\mathbb{R}^n$ με $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (οπου το 1 είναι στην $i-$θέση) παράγει τον $\mathbb{R}^n$.

3. Να δείξετε ότι τα παρακάτω υποσύνολα U του $\mathbb{R}^2$ και του $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα, είναι διανυσματικοί υπόχωροι τους.
   (a) $U = \{(x - 2y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
   (b) $U = \{(xx + 2y - z, 2y, 3x - z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

4. Να βρείτε ενα σύνολο διανυσμάτων που παράγουν τον διανυσματικό υπόχωρο
   (a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 4y + 8z = 0\}$
   (b) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - t = 0,\, z + 2t = 0\}$
   (c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0,\, 2y - z = 0,\, 2z - x = 0\}$

5. Να εκφράσετε το διάνυσμα X ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων a, b.
   (a) $X = (1, 0)$, $a = (1, 1)$, $b = (0, 1)$
   (b) $X = (2, 1)$, $a = (1, -1)$, $b = (1, 1)$
   (c) $X = (1, 1)$, $a = (2, 1)$, $b = (-1, 0)$
   (d) $X = (3, 5)$, $a = (-2, 3)$, $b = (1, -4)$

6. Να βρείτε τις συνιστώσες του X ως προς τα διανύσματα A, B, C.
   (a) $X = (1, 0, 0)$, $A = (1, 1, 1)$, $B = (-1, 1, 0)$, $C = (1, 0, -1)$
   (b) $X = (1, 1, 1)$, $A = (0, 1, -1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 0, 2)$

7. Να εξετάσετε ποία από τα παρακάτω διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, γραμμικά εξαρτημένα, ποία παράγουν τον $\mathbb{R}^3$ και ποία αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.
   (a) $(1, -1)$
   (b) $(1, 1)$, $(1, 2)$
   (c) $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 2)$

8. Η προηγούμενη άσκηση για τον $\mathbb{R}^3$.
   (a) $(1, 2, 3)$

(b) $(2,-2,0)$, $(-6,6,0)$

(c) $(1,1,1)$, $(0,1,0)$, $(2,1,1)$

(d) $(1,-1,2)$, $(2,1,1)$, $(1,2,-1)$

(e) $(1,2,0)$, $(1,1,1)$, $(0,-1,1)$, $(0,1,0)$

9. Να βρείτε μία βάση και τη διάσταση των υποχώρων της άσκησης 1 και 4.

10. Να δείξετε οτι τα διανύσματα $x=(2,-1,1)$, $y=(0,2,-1)$ και $z=(1,-1,0)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι μια βάση του και να βρείτε τις συνιστώσες του $a=(1,0,1)$ ως προς αυτή τη βάση.

11. (a) Να βρείτε μια βάση και τη διάσταση του διανυσματικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα $x=(1,3,-2)$, $y=(4,0,2)$ και $z=(2,-6,6)$.

    (b) Να βρείτε μια βάση και τη διάσταση του διανυσματικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα $x=(1,4,-1,3)$, $y=(2,1,-3,-1)$ και $z=(0,2,1,-5)$.

    (c) Να βρείτε μια βάση και τη διάσταση του διανυσματικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα $x=(3,-1,2,-2)$, $y=(1,1,0,0)$, $z=(4,-2,3,-3)$, $t=(0,2,-1,1)$.

12. Για ποίο $k\in\mathbb{R}$ το διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$, $x=(1,-2,k)$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $x_1=(3,0,-2)$ και $x_2=(2,-1,-5)$;

13. Έστω $V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y+3z=0\}$ και $V_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y+2z=0\}$. Να βρείτε τον διανυσματικο υπόχωρο $V=V_1\cap V_2$ του $\mathbb{R}^3$, ένα σύνολο γεννητόρων του V και μια βάση των V_1,V_2,V.

14. (a) Εάν $V_1=[(1,1,0,-1),\ (1,2,3,0),\ (2,3,3,-1)]$ και $V_2=[(1,2,2,-2),\ (2,3,2,-3),\ (1,3,4,-3)]$ να βρείτε τη διάσταση του $V_1\cap V_2$.

    (b) Εάν $V_1=\{(a,0,b,c) : a,b,c\in\mathbb{R}\}$ και $V_2=[(1,2,0,1),\ (0,1,2,1)]$ να βρείτε τη διάσταση των $V_1,V_2,V_1\cap V_2$.

15. Εάν στον διανυσματικό χώρο V τα e_1,e_2,e_3,e_4 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τα v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6 είναι γραμμικά εξαρτημένα και παράγουν τον V, ποίες είναι οι πιθανές τιμές της διάστασης του V;

16. Να μετατρέψετε τους παρακάτω πίνακες σε κλιμακωτούς.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&1&3\\4&1&-1\\-1&2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&-2&3\\1&-3&2&1\\1&-1&-2&7\\1&0&-4&10\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}3&-1&1&-5&-1\\6&-2&2&-9&1\\-9&3&-3&11&-1\end{pmatrix}$$