"Εισαγωγή στην Σχεδίαση με Η/Υ (2402)"
Ακαδημαϊκό Έτος 2011-2012 – Γ' Εξάμηνο
Διδάσκοντες: Σ. Κυρατζή, Φ. Αζαριάδης, Κ. Μπάιλας
Γραπτή Εξέταση – Ιανουάριος 2012

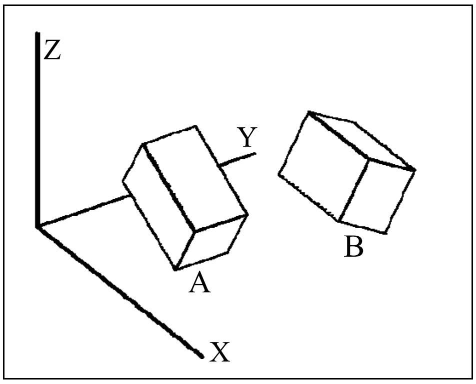
ΘΕΜΑ 1. (2/8.4) Έστω μία καμπύλη Bezier $P^3(t)$, με $t \in [0, 1]$.

(Α) Εξηγήστε τι σημαίνει η ιδιότητα της «Κυρτής Περιβάλλουσας» και του «Ψευδο-τοπικού ελέγχου».

(Β) Πότε η καμπύλη P^3 θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα;

(Γ) Δεδομένων τεσσάρων τυχαίων σημείων P_0, P_1, P_2, και P_3, ζητείται να κατασκευαστεί μία καμπύλη Bezier 3ου βαθμού και μία κατά τμήματα καμπύλη παρεμβολής Hermite. Θα ταυτίζονται οι δύο αυτές καμπύλες; Εξηγείστε την απάντηση σας.

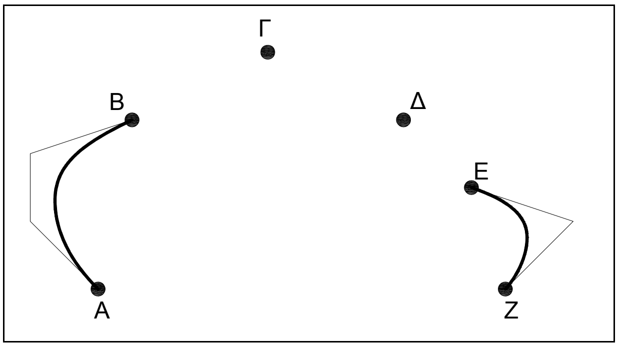
ΘΕΜΑ 2. (2.4/8.4)



[2α] Τα 3Δ σχήματα Α και Β έχουν τις ίδιες διαστάσεις αλλά είναι τοποθετημένα στο χώρο με διαφορετικό προσανατολισμό. Ποιος είναι ο πίνακας μετασχηματισμού που ταυτίζει το Σχήμα Β με το Σχήμα Α; (*Για την λύση της άσκησης θεωρήστε τους πίνακες $A_z(v)$ και $A_z^{-1}(v)$ γνωστούς*).

[2β] Αν υλοποιούσατε τον μετασχηματισμό ως «εντολή» σε ένα πρόγραμμα σχεδίασης, τι στοιχεία θα ζητούσατε από τον χρήστη του προγράμματος για να μπορέσει να εκτελεστεί η εντολή; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

ΘΕΜΑ 3. (4/8.4)



Η εταιρεία στην οποία δουλεύετε έχει αναλάβει την σχεδίαση ενός επαρχιακού δρόμου που ενώνει μεταξύ τους τα χωριά Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ (καμπύλη $S(u)$). Από τον τοπογραφικό χάρτη που σας δίνεται παρατηρείται ότι τα χωριά Α και Β ενώνονται ήδη από το δρόμο ΑΒ, ο οποίος περιγράφεται από μία καμπύλη Bezier $R^3(u)$, με σημεία ελέγχου $A \equiv R_0(2, 0)$, $R_1(0, 2)$, $R_2(0, 4)$ και $B \equiv R_3(3, 5)$. Αντίστοιχα υπάρχει και ο δρόμος ΕΖ, ο οποίος περιγράφεται από μία καμπύλη Bezier $Q^2(u)$, με σημεία ελέγχου $E \equiv Q_0(13, 3)$, $Q_1(16, 2)$ και $Z \equiv Q_2(14, 0)$.

[3α] ***(i)*** Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της κατά τμήματα παρεμβολής Hermite για να υπολογίσετε, για τη συνολική καμπύλη $S(u)$, το τμήμα $P(u)$ του δρόμου που λείπει, ώστε αυτό να ενώνει τα χωριά Β και Ε διερχόμενο από τα χωριά Γ(7, 7) και Δ(11, 5). (*Να χρησιμοποιηθεί ομοιόμορφη παραμετροποίηση, με $t_0=0$ και $\Delta t=1$, και η μέθοδος εύρεσης εφαπτόμενων διανυσμάτων FMILL για τα σημεία Γ και Δ*), ***(ii)*** Από ποια τμήματα αποτελείται η συνολική καμπύλη $S(u)$;, ***(iii)*** Σε ποιο σημείο της διαδρομής βρίσκεστε για $u=2$;

[3β] Υπολογίστε την καμπύλη $P(u)$ του δρόμου που λείπει, ώστε αυτός να ενώνει τα χωριά Β και Ε χωρίς να διέρχεται από τα χωριά Γ και Δ. (*Υπολογίστε καμπύλη Bezier $P(u)$ ελαχίστου βαθμού, εξασφαλίζοντας παραμετρική συνέχεια C^1 στα σημεία Β και Ε*).

Καλή Επιτυχία

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_y w_z - v_z w_y)\vec{i} + (v_z w_x - v_x w_z)\vec{j} + (v_x w_y - v_y w_x)\vec{k}$$

$$T(m,n)=\begin{bmatrix}1 & 0 & m\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ S(s_x,s_y)=\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0\\ 0 & s_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ R_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P(u)=\frac{b-u}{b-a}P_0+\frac{u-a}{b-a}P_1,\ \ u\in[a,b]$$

$$\mathbf{P}^n(t)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}\,\mathbf{P}_i=\sum_{i=0}^{n}B_i^n(t)\mathbf{P}_i,\ t\in[0,1]\ \text{και}\ \binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$\frac{d}{du}P^n(a)=\frac{n}{(b-a)}(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0),\ \frac{d}{du}P^n(b)=\frac{n}{(b-a)}(\mathbf{P}_n-\mathbf{P}_{n-1}),\ u\in[a,b]$$

$$\frac{d^2}{du^2}P^n(a)=\frac{n(n-1)}{(b-a)^2}(\mathbf{P}_2-2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_0),\ \frac{d^2}{du^2}P^n(b)=\frac{n(n-1)}{(b-a)^2}(\mathbf{P}_n-2\mathbf{P}_{n-1}+\mathbf{P}_{n-2}),\ u\in[a,b]$$

$$\frac{dP^n(t)}{dt}=n\sum_{i=0}^{n-1}B_i^{n-1}(t)[\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_i],\ t\in[0,1]$$

$$\left.\begin{aligned}H_0^3(t)&=2t^3-3t^2+1\\ H_1^3(t)&=t^3-2t^2+t\\ H_2^3(t)&=t^3-t^2\\ H_3^3(t)&=-2t^3+3t^2\end{aligned}\right\}t\in[0,1]\qquad \left.\begin{aligned}\hat{H}_0^3(u)&=H_0^3(t)\\ \hat{H}_1^3(u)&=(b-a)H_1^3(t)\\ \hat{H}_2^3(u)&=(b-a)H_2^3(t)\\ \hat{H}_3^3(u)&=H_3^3(t)\end{aligned}\right\}u\in[a,b],t\in[0,1],t=\frac{u-a}{b-a}$$

$$\mathbf{P}(t)=H_0^3(t)\mathbf{P}_0+H_1^3(t)\mathbf{m}_0+H_2^3(t)\mathbf{m}_1+H_3^3(t)\mathbf{P}_1,\ \ \mathrm{t}\in[0,1]$$

$$\mathbf{P}_i(u)=\hat{H}_0^3(u)\mathbf{P}_i+\hat{H}_1^3(u)\mathbf{m}_i+\hat{H}_2^3(u)\mathbf{m}_{i+1}+\hat{H}_3^3(u)\mathbf{P}_{i+1},\ \ u\in[t_i,t_{i+1}]$$

$$\mathbf{m}_i=\mathbf{P}_{i+1}-\mathbf{P}_{i-1}$$