

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

ΣΥΡΟΣ – ΙΟΥΝΙΟΣ 2010

ΟΜΑΔΑ Δ

1. Να εξεταστεί αν συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^2 \sin x - 1}{x^5} dx.$$

2. Βρείτε τα σημεία  $A, B, C$  αντίστοιχα, όπου το επίπεδο με εξίσωση  $z - 2x - y + 1 = 0$  τέμνει τους άξονες των  $x, y, z$ . Βρείτε το μήκος των πλευρών του τριγώνου  $ABC$  και το συνημίτονο της γωνίας  $\hat{A}$ .
3. Δίνονται τα σημεία  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(0, 1, -1)$  και το επίπεδο  $\sigma$  με εξίσωση  $2x - 3y + z = 2$ .

(α') Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνά από το σημείο  $A$  και είναι παράλληλο προς το επίπεδο  $\sigma$ .

(β') Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας  $\varepsilon$  που περνά από το σημείο  $B$  και είναι κάθετη προς το επίπεδο  $\sigma$ . Προσδιορίστε το σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon$  και του επιπέδου  $\sigma$ .

4. Η κίνηση ενός σημείου στο επίπεδο δίνεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(t) = (\cos 2t - 5, 2 - \sin 2t), \quad t \in [0, \pi].$$

Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σημείου τη χρονική στιγμή  $t$ . Ποιο είναι το συνολικό μήκος της καμπύλης που διαγράφει το σημείο κατά την κίνησή του;

5. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης  $f(x, y) = 6 - 3x^2 - y^2 + 2xy - 2x + y$ , καθώς και το είδος τους.
6. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  υπό τη συνθήκη  $z^2 - x^2 = 4$  (δίνεται ότι η συνάρτηση  $f$  έχει πράγματι ολικό ελάχιστο υπό αυτή τη συνθήκη).
7. Έστω  $h(u, v)$  παραγωγίσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x, y, z) = -z + h(x^2 + z^2, ye^{-x}).$$

Δείξτε ότι

$$z \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial z} + yz \frac{\partial f}{\partial y} = x.$$