

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

ΣΥΡΟΣ - ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2011

ΟΜΑΔΑ Β

1. Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα, αν υπάρχει:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx.$$

2. Δίνονται τα σημεία $A(-1, 3, 1)$ και $B(2, 1, -1)$. Βρείτε ένα σημείο C του άξονα y τέτοιο ώστε η γωνία \widehat{CAB} να είναι ορθή.
3. Δίνονται ένα επίπεδο σ και μια ευθεία ε με τις εξής ιδιότητες. Το επίπεδο σ περνά από το σημείο $A(3, 2, -2)$ και είναι κάθετο προς το διάνυσμα $\vec{v} = (-1, -1, 2)$. Η ευθεία ε περνά από το $(1, 2, 1)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξισώσεις

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z}{3}.$$

Βρείτε το σημείο τομής του επιπέδου σ και της ευθείας ε .

4. Αν η συνάρτηση $w = f(u, v)$ είναι παραγωγίσιμη και θέσουμε $u = \frac{x}{y}$, $v = x - y$, ναδειχθεί ότι

$$x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} = v \frac{\partial w}{\partial v}.$$

5. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x, y) = 3x^2 - 6x + 4y^3 + y^4 + 4y^2$, καθώς και το είδος τους.
6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y, z) = \ln(3x + yz + 1).$$

Βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $(0, 0, 0)$ κατά την κατεύθυνση που ορίζει το διάνυσμα $\vec{v} = (3, 0, 4)$. Ποια είναι η κατεύθυνση μέγιστης αύξησης της f στο ίδιο σημείο;