ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8

ΣΥΡΟΣ - 2012

1. Αν $w = f(x, y, z)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και θέσουμε $x = \frac{t}{s}$, $y = t^s$ και $z = \ln(s + t^2)$, βρείτε τις παραγώγους $\frac{\partial w}{\partial t}$ και $\frac{\partial w}{\partial s}$ συναρτήσει των μερικών παραγώγων της f ως προς x, y, z.

2. Βρείτε τη μερική παράγωγο $\frac{\partial w}{\partial s}$ με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας, αν

   $w = f\left(s^2 - ts, \cos(t + s), \operatorname{Arcsin}(st)\right)$ όπου $f(x, y, z) = xy^2 z$

3. Αν η $f(u, v)$ είναι παραγωγίσιμη και $z = f(x + y, x - y)$, δείξτε ότι

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2.$$

4. Αν η f είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής παραγωγίσιμη και $z = f\left(2x^3 + 3y^2\right)$, δείξτε ότι

$$y\frac{\partial z}{\partial x} = x^2\frac{\partial z}{\partial y}.$$

5. Έστω $x = u\cos\theta - v\sin\theta$ και $y = u\sin\theta + v\cos\theta$, όπου θ είναι *σταθερά*. Άν $z = f(x, y)$, δείξτε ότι

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

6. Έστω $\vec{a}$ ένα σταθερό διάνυσμα και $f(\vec{r})$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη σε όλο το χώρο $\mathbb{R}^3$.

   (α′) Θέτουμε $g(t) = f(t\vec{a})$. Βρείτε την $g'(t)$.

   (β′) Υποθέτουμε ότι ισχύει $f(t\vec{b}) = tf(\vec{b})$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και κάθε $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι για κάθε $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ισχύει

$$f(\vec{b}) = \vec{\nabla} f(0) \cdot \vec{b}.$$

7. Έστω $f(x, y) = x^2 - y,\ g(x, y) = \sin(3x + 5y)$. Άν $\vec{r}(t)$ είναι μια καμπύλη που για $t = 0$ περνά από το $(0, 0)$ και ισχύει

$$\left.\frac{d\left(f\left(\vec{r}(t)\right)\right)}{dt}\right|_{t=0} = 3 \qquad \text{και} \qquad \left.\frac{d\left(g\left(\vec{r}(t)\right)\right)}{dt}\right|_{t=0} = 2,$$

   βρείτε το $\vec{r}\,'(0)$.

8. Αν η συνάρτηση $f(u)$ είναι παραγωγίσιμη και $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$, δείξτε ότι τα διανύσματα $r = (x, y)$ και $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

9. Αν η $f\left(u\right)$ είναι παραγωγίσιμη, δείξτε ότι για την συνάρτηση $z = yf\left(x^2 - y^2\right)$ ισχύει $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

10. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στις παρακάτω επιφάνειες, στα σημεία που δίνονται:

    (α′) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, στο $(6, 2, 3)$.

    (β′) $\sin xy + (x + yz)^2 = 1$, στο $(0, 1, 1)$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x, y, z\right) = e^x y - zx$ και το σημείο A με συντεταγμένες $(\ln 3, 2, 3)$. Αν S είναι η ισοσταθμική επιφάνεια που περνά από το A, βρείτε (α) την εξίσωση της ευθείας που περνά από το A και είναι κάθετη στην επιφάνεια, (β) την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στην S, στο σημείο A.

12. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στην επιφάνεια $z = e^{x^2+y^2}$ στο σημείο που οι δύο πρώτες συντεταγμένες του είναι 0 και 1.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y, z) = \sin(xyz)$. Βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $(\pi/4, \pi/4, 0)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{v} = (0, 1, -1)$. Το ίδιο για τη συνάρτηση $f(x, y, z) = x^{yz}$ στο σημείο $(e, e, 0)$ και κατά την κατεύθυνση $(12, 3, 4)$.

14. Ποια είναι η κατεύθυνση μέγιστης αύξησης της συνάρτησης $f(x, y) = x(1 + x^y)$ στο σημείο $(1, 1)$; Το ίδιο για την $f(x, y, z) = \frac{x}{|(x,y,z)|^{3/2}}$ στο $(1, -1, 2)$.

15. Δίνεται μια μεταλλική επιφάνεια με εξίσωση $z = c - ax^2 - by^2$, όπου a, b, c θετικές σταθερές. Αν αφήσουμε ένα βώλο στο σημείο της επιφάνειας $(1, 1, c - a - b)$, προς ποια κατεύθυνση θα κατρακυλίσει;